KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO

LINEÁRNÍ ALGEBRA 1

OLGA KRUPKOVÁ

VÝVOJ TOHOTO UČEBNÍHO TEXTU JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Olomouc 2008

Abstrakt

Tento text distančního vzdělávání obsahuje úvodní partie kurzu z lineární algebry. Představuje základy maticového počtu, systémy lineárních rovnic a úvod do teorie vektorových prostorů.

Cílová skupina

Text je primárně určen studentům prezenčního studia informatiky. Jako studijní pomůcka je vhodný rovněž pro studenty všech forem studia oborů matematických, informatických a fyzikálních.

Obsah

1 Matice

Studijní cíle: V úvodních kapitolách kurzu z lineární algebry se seznámíme s číselnými maticemi a naučíme se s nimi počítat. Maticový počet představuje základní matematický aparát, který umožňuje přehledně formulovat problémy, provádět výpočty a řešit mnohé praktické úlohy nejen v samotné algebře, ale i v dalších oblastech matematiky, v informatice, ve fyzice, i v technických a dalších oborech. Začneme zavedením základních pojmů a operací.

Klíčová slova: Číselné pole, matice, submatice, jednotková matice, nulová matice, čtvercová matice, diagonální matice, sčítání matic, násobení matice číslem, násobení matic, matice opačná, matice komplexně sdružená, matice transponovaná, matice adjungovaná, symetrická matice, antisymetrická matice, symetrická část matice, antisymetrická část matice, stopa matice.

Potřebný čas: 180 minut.

1.1 Číselná pole

Uvažujme množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ se známými operacemi *sčítání, odčítání, násobení* komplexních čísel a *dělení* komplexního čísla číslem různým od nuly.

Připomeňme si vlastnosti těchto operací: sčítání i násobení jsou definovány pro libovolnou dvojici komplexních čísel, jsou komutativní a asociativní a splňují distributivní zákon; tedy pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{C}$ platí

- $a + b = b + a, \quad a.b = b.a$ (komutativita)
- $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativita)
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita)

Odčítání je inverzní operací ke sčítání a je rovněž definováno pro libovolná dvě komplexní čísla. Dělení je inverzní operací k násobení na množině $\mathbb{C} - \{0\}$.

Říkáme, že množina $\mathbb{C}$ s uvedenými operacemi *má algebraickou strukturu pole*; nazývá se *pole komplexních čísel*.

Definice 1.1 (Číselné pole)**.** Každou podmnožinu množiny komplexních čísel, která je uzavřená vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení s výjimkou dělení nulou[1], budeme nazývat *číselným polem*, nebo také *podpolem pole komplexních čísel.*

Úmluva. V tomto textu budeme číselné pole označovat písmenem $\mathbb{P}$.

Snadno se prověří, že rovněž množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ jsou vzhledem k uvažovaným operacím číselná pole. Nazývají se *pole reálných čísel* a *pole racionálních čísel.*

Kontrolní úkoly a cvičení

- Ověřte si, že množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ vzhledem k uvažovaným operacím (sčítání, odčítání, násobení a dělení s výjimkou dělení nulou) skutečně jsou číselná pole.
- Rozhodněte, které z uvedených podmnožin pole komplexních čísel jsou číselnými poli: přirozená čísla, celá čísla, kladná čísla, nezáporná čísla, sudá čísla, lichá čísla, iracionální čísla, $\{x + iy \mid x,\, y \in \mathbb{Q}\}$, $\{x + iy \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{Q}\}$.
- Dokažte, že je-li množina M číselným polem, pak

  (a) nutně obsahuje čísla $0,\ 1$,

  (b) je-li $x \in M$, pak také $-x \in M$

  (c) je-li $x \in M$ a $x \neq 0$, pak také $\frac{1}{x} \in M$.

[1] Uzavřeností množiny M vzhledem ke sčítání se rozumí, že součet libovolných dvou čísel z množiny M leží v množině M; pro ostatní operace je tento pojem definován zcela analogicky.

1.2 Číselné matice

Definice 1.2 (Matice nad číselným polem)**.** Nechť $\mathbb{P}$ je číselné pole, m, n jsou přirozená čísla. *Maticí typu* $m \times n$ *nad polem* $\mathbb{P}$ rozumíme zobrazení kartézského součinu $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ do $\mathbb{P}$.

Matici A typu $m \times n$ nad $\mathbb{P}$, tedy zobrazení

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \ni (i, j) \to a_{ij} \in \mathbb{P}$$

zapisujeme nejčastěji ve tvaru tabulky

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nebo stručně, je-li z kontextu známý počet řádků a sloupců matice A, ve tvaru

$$A = (a_{ij}).$$

Matici typu $m \times n$ tedy můžeme chápat jako indexovaný systém a_{ij} čísel z pole $\mathbb{P}$ takový, že i probíhá množinu $\{1, 2, \ldots, m\}$ a j probíhá množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prvky množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$, tj. levé indexy, budeme nazývat *indexy řádkové* a prvky množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, tj. pravé indexy, budeme nazývat *indexy sloupcové*.

Pro pevné i budeme i*-tým řádkem* matice A nazývat systém čísel $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$; podobně pro pevné j budeme systém $\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\}$ nazývat j*-tým sloupcem* matice A. Samotná čísla $a_{ij} \in \mathbb{P}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, nazýváme *prvky* matice A.

Matice, pro kterou $m = 1$, se nazývá *řádková matice*. Podobně matice, pro kterou $n = 1$, se nazývá *sloupcová matice*.

Matice, která má stejný počet řádků jako sloupců, tj. platí pro ni $m = n$, se nazývá *čtvercová matice řádu n*.

Prvky matice $A = (a_{ij})$, pro které $i = j$ (tedy $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$, kde k je menší z čísel m, n, je-li $m \neq n$, resp. $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, je-li $m = n$) se nazývají *diagonální*, množina $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}\}$ se pak nazývá *hlavní diagonála matice* A.

Říkáme, že matice A má *diagonální tvar*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule, se nazývá *nulová matice*. Označuje se symbolem 0.

Čtvercová matice, jejíž všechny diagonální prvky jsou rovny 1 a všechny zbývající jsou rovny 0, se nazývá *jednotková matice*. Klademe

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

a jednotkovou matici označujeme

$$E = (\delta_{ij}).$$

Symbol označující prvky jednotkové matice se nazývá *Kroneckerův symbol*.

Buď A matice typu $m \times n$, p, q celá čísla taková, že $0 \leq p \leq m-1$, $0 \leq q \leq n-1$. Vypustíme-li v matici A p různých řádků a q různých sloupců, dostaneme matici B typu $(m-p) \times (n-q)$, která se nazývá *submatice* matice A.

Řekneme, že dvě matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *jsou si rovny*, jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny hodnoty indexů i, j.

Množinu všech matic typu $m \times n$ (resp. množinu všech čtvercových matic řádu n) nad polem $\mathbb{P}$ budeme označovat $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{P})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$).

1.3 Operace s maticemi

Jak víme, operace na množině je speciálním případem zobrazení do uvažované množiny. Konkrétně, *unární operací* na množině M rozumíme zobrazení množiny M do sebe, tedy zobrazení, které každému prvku množiny M přiřazuje nějaký prvek množiny M. *Binární operace* na množině M je definována jako zobrazení kartézského součinu $M \times M$ do M, tedy jako zobrazení, které každé uspořádané dvojici prvků z množiny M přiřazuje nějaký prvek množiny M. Připomeňme si také důležitou skutečnost, že operace na množině M nemusí indukovat operaci na *podmnožině* množiny M, tedy zúžení operace na podmnožinu nemusí být operace na této podmnožině (výsledek operace nemusí ležet ve zvolené podmnožině!). Jestliže operace na M indukuje na podmnožině $N \subset M$ *operaci*, říkáme, že podmnožina N je vzhledem k dané operaci *uzavřená*.

Příklady.

• Sčítání je binární operace na množině reálných čísel. Je to operace na množině sudých čísel, ne však na množině lichých čísel (součtem dvou lichých čísel není liché číslo), ani např. na množině čísel menších než 3.

• Vytvoření komplexně sdruženého čísla je unární operace na množině komplexních čísel. [2]

Vytvoření opačného čísla k danému číslu je unární operace na množině reálných čísel, a také např. na podmnožině celých čísel, není to operace na množině přirozených čísel.

• Uveďte další příklady.

Nyní se vrátíme k maticím.

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definujeme tyto matice:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{matice opačná k matici } A,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & \dots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} & \dots & a^*_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a^*_{m1} & a^*_{m2} & a^*_{m3} & \dots & a^*_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{matice komplexně sdružená k matici } A,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ & & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{matice transponovaná k matici } A,$$

[2] V tomto textu označujeme číslo komplexně sdružené k číslu z symbolem z^*. Připomeňte si definici komplexně sdruženého čísla: je-li $z = a + bi$, pak $z^* = a - bi$.

$$A^{\mathrm{adj}} = A^{*T} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* & \dots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* & \dots & a_{m2}^* \\ & & \vdots & & \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & a_{3n}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix} \quad \textit{matice adjungovaná k matici } A.$$

Lze také říci, že matice transponovaná k A je taková matice, pro jejíž prvky platí

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \text{pro všechna } i, j.$$

Všimněte si, že zobrazení $A \to -A$ a $A \to A^*$ jsou zobrazení množiny $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ na sebe, jsou to tedy unární operace na množině $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ (pro $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q}$ se komplexní sdružení redukuje na identické zobrazení).

Naproti tomu, matice transponovaná i adjungovaná k matici typu $m \times n$ je typu $n \times m$. To znamená, že pro $m = n$ to jsou unární operace na množině $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$, zatímco pro $m \neq n$ tato zobrazení nevyhovují definici operace na množině $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$.

Na množině $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ definujeme binární operaci *sčítání matic* takto: *Součtem matic* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ nazýváme matici $A+B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ definovanou vztahem

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{pro všechny hodnoty indexů } i, j;$$

Podle definice je tedy

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ & & \vdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

K operaci sčítání existuje inverzní operace *odčítání matic*. Je definována vztahem

$$A - B = A + (-B).$$

Dalším důležitým zobrazením je *násobení matice číslem*: Pro matici $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ definujeme *násobek matice A číslem c z pole* $\mathbb{P}$ jako matici $cA \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$, jejíž prvky mají tvar

$$ca_{ij}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,$$

tedy

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \dots & ca_{2n} \\ & & \dots & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ca_{m3} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Násobení matice číslem je zobrazení $\mathbb{P} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P}) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$, není to tedy operace na množině $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$.

Nakonec budeme definovat *násobení matic*. Pro matice A typu $m \times p$ a B typu $p \times n$ definujeme matici $C = AB$ typu $m \times n$ vztahem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots a_{ip} b_{pj}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \tag{1.1}$$

Nazýváme ji *součinem* matic A, B.

Pro snadnější zapamatování tohoto vzorce si uvědomme, že prvek matice AB na pozici (i, j) (tedy na průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce) se vypočte jako součet součinů postupně po řadě každého prvku v i-tém *řádku* matice A s prvkem v j-tém *sloupci* matice B (tento součet tvoří p sčítanců):

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots a_{ip} b_{pj}.$$

Celkově,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ & & \vdots & & \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k2} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{k2} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{kn} \\ & & \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{k2} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Při násobení matic musíme dát pozor na *pořadí* matic. Je-li totiž pro matice A, B definován součin AB, nemusí být definován součin BA; oba součiny jsou zřejmě definovány, je-li A typu $m \times p$ a B typu $p \times m$ (tj. $m = n$); pak ovšem AB je čtvercová matice řádu m a BA je čtvercová matice řádu p.

Je zřejmé, že zobrazení násobení matic je binární operací pouze na množině $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$.

Úmluva. Seznámili jsme se s několika zobrazeními, která nám umožňují „počítat“ s maticemi. Pouze některá z nich však vyhovovují matematické definici operace. I když je to nepřesné, je z praktického hlediska vhodné označovat všechna uvedená zobrazení jako „operace s maticemi“. Proto přijmeme úmluvu, že nadále budeme o těchto zobrazeních hovořit jako o *operacích*.

Věta 1.3 (Důležité vlastnosti a vzorce)**.** *Pro libovolné matice A, B, C a libovolná čísla $c, c_1, c_2 \in \mathbb{P}$ takové, že uvedené operace mají smysl, platí*

- $A + B = B + A$ *(sčítání matic je komutativní)*
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(sčítání matic je asociativní)*
- $(AB)C = A(BC)$ *(násobení matic je asociativní)*
- $A(B + C) = AB + AC,\ (A + B)C = AC + BC$ *(pro sčítání a násobení matic platí distributivní zákony[3])*

[3] Vzhledem k tomu, že násobení matic není komutativní, dostáváme dva distributivní zákony - jeden pro násobení součtu zleva a druhý pro násobení součtu zprava.

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(cA)^T = cA^T$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
- $c(A+B) = cA + cB$
- $(c_1 + c_2)A = c_1 A + c_2 A$
- $(c_1 c_2)A = c_1(c_2 A)$
- $-A = -1A$

Zdůrazňujeme, že *násobení matic není komutativní*, tj. existují matice A, B, pro které jsou definovány matice AB i BA a platí $AB \neq BA$. Vymyslete příklady takových matic (a to i takové, kdy obě matice jsou čtercové stejného řádu).

Pro *čtvercové* matice A, B řádu n je definován součin AB i BA, přičemž oba tyto součiny jsou rovněž čtvercové matice řádu n. Říkáme, že matice A, B *komutují*, jestliže $AB = BA$. Všimněte si, že libovolná čtvercová matice komutuje s jednotkovou maticí.

Poslední „operací“, kterou budeme definovat je *stopa čtvercové matice*: Na množině $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$ definujeme zobrazení $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{P}) \to \mathbb{P}$ vztahem

$$\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn}.$$

Pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n je tedy číslo $\mathrm{Tr}\, A$ dáno jako součet jejích diagonálních prvků. Číslo $\mathrm{Tr}\, A$ se nazývá *stopa matice* A.[4]

Poznámka 1.4. Matice lze sestavovat nejen z čísel: jejich prvky mohou být vybírány i z nějaké jiné vhodné množiny (např. z nějaké množiny funkcí). Aby bylo možno i na takové množině matic zavést sčítání a násobení, které jsou definovány pomocí *prvků* příslušných matic, je třeba, aby na množině, ze které vybíráme prvky matic, byly definovány operace sčítání a násobení. S maticemi, jejichž prvky jsou *funkce*, se setkáváme často v matematické analýze a v geometrii, a tedy i v četných aplikacích v informatice, ve fyzice a v technice.

Kontrolní otázky a úkoly.

- Pro jaké matice platí $A = A^*$?
- Platí $(A+B)^* = A^* + B^*$?
- Určete $(A^T)^T$.
- Definujte součin matic.
- Uveďte příklad dvou nenulových matic, jejichž součinem je nulová matice.
- Uveďte příklad nenulové matice, jejíž stopa je rovna nule.

1.4 Symetrické a antisymetrické matice

Nyní prozkoumáme blíže *strukturu množiny všech čtvercových matic řádu* n.

Definice 1.5. Čtvercová matice A se nazývá *symetrická*, jestliže $A = A^T$ a *antisymetrická*, jestliže $A = -A^T$.

[4] Anglicky se „stopa“ řekne *trace*. Ve starší literatuře je stopa matice A označována symbolem $\mathrm{Sp}\, A$ (z německého *Spur*).

Rozepíšeme-li tyto definice pomocí prvků matice, dostáváme, že matice $A = (a_{ij})$ je symetrická tehdy a jen tehdy, když $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny hodnoty indexů i, j. Symetrická matice je tedy „symetrická podél hlavní diagonály“. Podobně matice $A = (a_{ij})$ je antisymetrická tehdy a jen tehdy, když $a_{ij} = -a_{ji}$ pro všechny hodnoty indexů i, j. Tedy antisymetrická matice je „antisymetrická podél hlavní diagonály“ a prvky její hlavní diagonály jsou všechny rovny 0.

Všimněme si, že součet dvou symetrických (antisymetrických) matic je symetrická (antisymetrická) matice: skutečně pro $A = A^T$ a $B = B^T$ máme $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$, pro $A = -A^T$ a $B = -B^T$ platí $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$. Podobně c-násobek symetrické (antisymetrické) matice je opět symetrická (antisymetrická) matice.

Jak ukazuje následující věta, symetrické a antisymetrické matice mají v množině $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$ významné postavení.

Věta 1.6. *Libovolnou čtvercovou matici lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické matice.*

Důkaz. Buď A čvercová matice. Položme

$$A^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A^{\mathrm{alt}} = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Jelikož

$$(A^{\mathrm{sym}})^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = A^{\mathrm{sym}}, \quad (A^{\mathrm{alt}})^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A^{\mathrm{alt}},$$

je A^{sym} symetrická matice a A^{alt} antisymetrická matice. Dostáváme tak rozklad matice A na součet symetrické a antisymetrické matice. Zbývá dokázat jejich jednoznačnost.

Předpokládejme tedy, že $A = M_1 + M_2$, kde matice M_1 je symetrická a M_2 je antisymetrická. Pak ovšem $A + A^T = M_1 + M_2 + {M_1}^T + {M_2}^T = 2M_1$, tj. $M_1 = A^{\mathrm{sym}}$. Podobně $A - A^T = M_1 + M_2 - {M_1}^T - {M_2}^T = 2M_2$, tj. $M_2 = A^{\mathrm{alt}}$ a tvrzení je dokázáno. □

Matice $A^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(A + A^T)$ se nazývá *symetrická část matice A*. Podobně matice $A^{\mathrm{alt}} = \frac{1}{2}(A - A^T)$ se nazývá *antisymetrická část matice A*.

Kontrolní otázky.

• Je matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

antisymetrická?

• Jaká je symetrická část symetrické matice A? Jaká je její antisymerická část?

• Jaká je antisymetrická část antisymetrické matice A? Jaká je její symerická část?

• Jakou stopu mají antisymetrické matice?

• Jaký je vztah mezi stopou matice a stopou symetrické části této matice?

Cvičení

1. Opakování:
   • Definujte všechny pojmy uvedené v Klíčových slovech.
   • Doplňte vzorce:

$$\begin{array}{cccc} c(A+B) = & A(B+C) = & (A+B)^T = & A^{\mathrm{sym}} = \\ (a+b)C = & (A+B)C = & (AB)^T = & A^{\mathrm{alt}} = \end{array}$$

   • Vyslovte a dokažte větu o rozkladu čtvercové matice na symetrickou a antisymetrickou část.

2. Vypočtěte součin matic, které mají tvar

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$$

4. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a zjistěte, zda tyto matice komutují.

5. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 1+2i & 0 & -3 & i \\ -2-3i & 1 & -1 & -1+i & 0 \\ -2 & 0 & 3+2i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2+i & -1 & i & 0 & 0 \\ 2+2i & -1 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete ke každé z nich matici opačnou, transponovanou, komplexně sdruženou a adjungovanou. Vypočtěte $A+B$, CA, AB^T, C^2, $\operatorname{Tr} C$.

6. Dokažte všechna tvrzení Věty 1.3.

[Návod. Rovnosti dokazujte pro prvky matic: ukažte, že pro libovolné hodnoty indexů i, j se prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice na levé straně rovnosti rovná prvku na pozici (i, j) matice na pravé straně.]

7. Platí-li pro matice A, B, že $AB = 0$, plyne z toho, že $A = 0$ nebo $B = 0$?

8. Určete kolik prvků je třeba zadat k určení symetrické matice a kolik prvků je třeba k zadání antisymetrické matice řádu n. Určete všechny matice, které jsou zároveň symetrické a antisymetrické (tj. platí pro ně $A = A^T \wedge A = -A^T$).

9. Ukažte, že zobrazení $A \to \operatorname{Tr} A$, které přiřazuje čtvercové matici řádu n její stopu, je surjektivní, ale není injektivní.

[Návod: Surjektivnost: pro (libovolné pevné) číslo $a \in \mathbb{C}$ napište matici, pro kterou $\operatorname{Tr} A = a$. Injektivnost: uveďte příklad několika různých matic, které mají stejnou stopu.]

10. K matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

najděte všechny matice, které s ní komutují.

11. Určete všechny čtvercové matice řádu 2, pro které platí $AA^T = E$.

[Návod: Rozepište si podmínku $AA^T = E$ pro prvky matice A a řešte rovnice, které takto vzniknou.]

12. Rozložte matici C z příkladu 1. na součet symetrické a antisymetrické matice.

13. Spočítejte antisymetrickou část matice M uvedené v první kontrolní otázce.

14. Dokažte, že pro matici A typu $m \times n$ je matice AA^T i matice A^TA symetrická.

15. Platí $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$? Platí analogický vzorec pro součin matic? Zdůvodněte.

16. Dokažte, že stopa součinu symetrické a antisymetrické matice je rovna nule.

2 Hodnost matice

Studijní cíle: Hodnost matice patří mezi základní pojmy v lineární algebře. Nyní tento pojem zavedeme, uvedeme základní tvrzení o hodnosti matic a naučíme se hodnost matice počítat. Nabyté znalosti a dovednosti budeme dále hojně využívat v lineární algebře i jinde v matematice, a ovšem také v informatice, fyzice a dalších oblastech, kde se poznatky z lineární algebry používají.

Klíčová slova: Elementární řádkové úpravy matice, elementární sloupcové úpravy matice, elementární matice, inverzní elementární úprava, ekvivalentní řádkové (sloupcové) úpravy matice, ekvivalentní matice, lineární kombinace řádků (sloupců) matice, lineárně nezávislé řádky (sloupce) matice, lineárně závislé řádky (sloupce) matice, hodnost matice, regulární matice, singulární matice, Gaussův kanonický tvar matice, schodovitý tvar matice, věty o hodnosti.

Potřebný čas: 220 minut.

2.1 Elementární úpravy

Uvažujme matici A typu $m \times n$ nad číselným polem $\mathbb{P}$.

Definice 2.1. *Elementárními řádkovými úpravami matice* A rozumíme

- vynásobení i-tého řádku matice A číslem $c \in \mathbb{P}$ různým od nuly,
- přičtení c-násobku j-tého řádku matice A k jejímu i-tému řádku ($i \neq j$).

Elementárními sloupcovými úpravami matice A rozumíme

- vynásobení i-tého sloupce matice A prvkem $c \in \mathbb{P}$ různým od nuly,
- přičtení c-násobku j-tého sloupce matice A k jejímu i-tému sloupci ($i \neq j$).

Provedeme-li tedy s maticí A první uvedenou řádkovou elementární úpravu, vznikne matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Provedeme-li s A druhou uvedenou řádkovou elementární úpravu, vznikne matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \dots & a_{in}+ca_{jn} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kontrolní úkol.

• Napište matice, které vzniknou po provedení první, resp. druhé *sloupcové* elementární úpravy matice A.

Ukážeme si, že provést s maticí A řádkovou elementární úpravu vlastně znamená *vynásobit matici A zleva jistou vhodnou maticí*; podobně provést s maticí A sloupcovou elementární úpravu znamená *vynásobit matici A vhodnou maticí zprava*. Platí totiž

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = Q(i,c) \cdot A$$

a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & ca_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & ca_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{m,i-1} & ca_{mi} & a_{m,i+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \cdot Q(i,c),$$

kde $Q(i,c)$ je čtvercová diagonální matice (vhodného řádu), jejíž diagonála má tvar $\{1,\dots,1,c,1,\dots,1\}$ (číslo c je na i-tém místě), a podobně

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \dots & a_{in}+ca_{jn} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = Q(ij,c) \cdot A$$

a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i}+ca_{1j} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i}+ca_{2j} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{m,i-1} & a_{mi}+ca_{mj} & a_{m,i+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \cdot Q(ij,c),$$

kde $Q(ij,c)$ je čtvercová matice (vhodného řádu), jejíž diagonála má tvar $\{1,\dots,1\}$, na pozici (i,j) je číslo c a zbývající prvky jsou rovny nule.

Uvedené matice $Q(i,c)$ a $Q(ij,c)$ se nazývají *elementární matice*.

Ke každé elementární úpravě zřejmě existuje úprava *inverzní*, tj. taková, která upravenou matici převede na původní tvar, a tato úprava je opět elementární.

Kontrolní úkoly.

• Napište si explicitní tvar elementárních matic. Pro matice $Q(ij,c)$ rozlište případy $i<j$ a $i>j$.

• Charakterizujte inverzní úpravy k jednotlivým elementárním úpravám a napište tvar odpovídajících elementárních matic.

• Označme Q^{-1} matici inverzní elementární úpravy k elementární úpravě reprezentované maticí Q. Ověřte, že pro každou elementární úpravu jsou obě matice svázány vztahem

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = E. \tag{2.1}$$

Ekvivalentní řádkovou (resp. *sloupcovou*) *úpravou* matice A budeme rozumět postupnou aplikaci konečného počtu řádkových (resp. sloupcových) elementárních úprav na matici A.

Podle výše uvedeného lze ekvivalentní řádkovou či sloupcovou úpravu vyjádřit jako *součin konečného počtu elementárních matic*. Vznikla-li tedy matice B z matice A postupnou aplikací řádkových elementárních úprav, kterým odpovídají matice $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, platí

$$B = Q_k Q_{k-1} \cdots Q_2 Q_1 A.$$

Podobně, vznikla-li matice B z matice A postupnou aplikací sloupcových elementárních úprav, kterým odpovídají matice $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$, platí

$$B = AQ_1 Q_2 \cdots Q_{l-1} Q_l.$$

Je zřejmé, že matice ekvivalentní úpravy je vždy čtvercová.

Ke každé ekvivalentní řádkové či sloupcové úpravě existuje *inverzní elementární úprava*, při níž upravená matice B přejde zpět na původní matici A. Přitom když nějaké ekvivalentní úpravě odpovídá matice $Q_1 Q_2 \ldots Q_k$ (součin matic příslušných elementárních úprav), pak inverzní úpravě odpovídá matice $Q_k^{-1} \ldots Q_2^{-1} Q_1^{1}$ tj. součin inverzních matic elementárních úprav *v opačném pořadí.*

Poznámka 2.2. Všimněte si, že provedeme-li s maticí ekvivalentní úpravu a následně úpravu inverzní, má výsledná ekvivalentní úprava jednotkovou matici. Dostáváme totiž

$$Q_1 Q_2 \ldots (Q_k Q_k^{-1}) \ldots Q_2^{-1} Q_1^{1} = Q_1 Q_2 \ldots (Q_{k-1} Q_{k-1}^{-1}) \ldots Q_2^{-1} Q_1^{-1} = \cdots = Q_1 Q_1^{-1} = E.$$

Příklad 2.3. Nejjednodušším příkladem ekvivalentní úpravy matice je *vzájemná výměna* jejích *dvou řádků nebo sloupců*. Abychom ukázali, že skutečně jde o ekvivalentní úpravu, stačí nalézt nějakou posloupnost elementárních úprav, které k této úpravě vedou. Úvahu provedeme pro řádky - pro sloupce je postup analogický.

Uvažujme tedy matici A typu $m \times n$. Označíme f_i a f_j její i-tý a j-tý řádek (tedy $f_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ a analogicky pro f_j) a postupujeme takto:

• přičteme j-tý řádek k i-tému řádku: obdržíme matici $A_1 \sim A$ jejíž i-tý řádek je $f_i + f_j = (a_{i1} + a_{j1}, \ldots, a_{in} + a_{jn})$ a j-tý řádek je f_j;

• i-tý řádek matice A_1 vynásobíme číslem -1: obdržíme matici A_2 s i-tým řádkem $-f_i - f_j$ a j-tým řádkem f_j;

• přičteme i-tý řádek matice A_2 k jejímu j-tému řádku: vznikne matice A_3, jejíž i-tý řádek je $-f_i - f_j$ a j-tý řádek je $-f_i$;

• vynásobíme j-tý řádek matice A_3 číslem -1: dostaneme matici A_4 s i-tým řádkem $-f_i - f_j$ a j-tým řádkem f_i;

• přičteme j-tý řádek matice A_4 k jejímu i-tému řádku: vznikne matice A_5, která má i-tý řádek $-f_j$ a j-tý řádek f_i;

• vynásobíme i-tý řádek matice A_5 číslem -1 a obdržíme požadovanou matici $A' \sim A$.

Cvičení

1. K jednotlivým elementárním úpravám z předchozího příkladu napište elementární matice a najděte matici U, která odpovídá popsané řádkové ekvivalentní úpravě. Přesvědčte se, že skutečně platí $A' = UA$.
2. Nalezněte matici ekvivalentní úpravy, která odpovídá výměně dvou sloupců matice A a vyjádřete tuto úpravu ve tvaru součinu matic.

2.2 Ekvivalentní matice

Definice 2.4. Matice A, B se nazývají *ekvivalentní*, jestliže lze převést jednu na druhou pomocí konečného počtu elementárních úprav.

Podle této definice *matice A, B jsou ekvivalentní právě tehdy, když existují matice U, V takové, že platí*

$$B = UAV,$$

přičemž každá z matic U, V je součinem konečného počtu nějakých elementárních matic.

Podívejme se nyní na tuto skutečnost podrobněji:

Uvažujme množinu $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ všech matic typu $m \times n$ nad polem $\mathbb{P}$. Na této množině uvažujme relaci $\sim$ definovanou takto:

„$A \sim B$, jestliže existují matice U, V, takové, že U, V jsou součinem konečného počtu elementárních matic a platí $B = UAV$“.

Vyšetříme vlastnosti relace $\sim$.

- Položíme-li $U = V = E$, vidíme, že pro libovolnou matici $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ platí $A \sim A$. To znamená, že relace $\sim$ je *reflexivní*.
- Nechť A je v relaci s B, t.j. nechť $B = UAV$ pro jisté matice U, V, které jsou součinem elementárních matic. Provádíme-li s maticí B inverzní řádkové a sloupcové elementární úpravy postupně v opačném pořadí, dostaneme matici A; je tedy $A = U'BV'$ pro jisté matice U', V' požadovaných vlastností. To znamená, že relace $\sim$ je *symetrická*.
- Předpokládejme, že pro nějaké matice $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ platí $A \sim B$ a zároveň $B \sim C$, tj. že $B = U_1AV_1$ a $C = U_2BV_2$ pro jisté matice U_1, U_2, V_1, V_2 požadovaných vlastností. Pak $C = U_2U_1AV_1V_2$. Položme $U = U_2U_1$, $V = V_1V_2$. Matice U, V jsou součinem konečného počtu elementárních matic a platí $C = UAV$, tj. $A \sim C$. Tedy relace $\sim$ je *tranzitivní*.

Vidíme, že relace $\sim$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tedy skutečně *relace ekvivalence* na množině $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ a výše definovaný pojem „ekvivalentní matice“ je zaveden korektně.

Pro matici $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ označme $[A]$ třídu ekvivalence matice A, tj. množinu všech matic z $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$, ekvivalentních s maticí A. Připomeňme si, že pro libovolné dvě matice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ jsou jejich třídy ekvivalence $[A], [B]$ buď disjunktní nebo splývají, tedy, že relace ekvivalence $\sim$ definuje *rozklad* množiny $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ na *třídy ekvivalence*.

Ve zbytku této kapitoly prozkoumáme blíže faktorovou množinu $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})/_\sim$.

2.3 Hodnost matice

Pro stručnost zápisu budeme v dalším textu označovat

$$\begin{aligned} f_i &= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \quad i\text{-tý řádek matice } A, \\ f'_j &= (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \quad j\text{-tý sloupec matice } A. \end{aligned}$$

Nulový řádek či sloupec označíme symbolem o.

Definice 2.5. *Lineární kombinací řádků* $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$ matice A s *koeficienty* $c_1, \dots, c_p$ nazýváme výraz

$$\sum_{s=1}^{p} c_s f_{i_s} = c_1 f_{i_1} + c_2 f_{i_2} + \dots + c_p f_{i_p}, \quad c_1, \dots, c_p \in \mathbb{P}.$$

Řekneme, že řádky $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$ matice A jsou *lineárně nezávislé*, jestliže podmínka

$$c_1 f_{i_1} + \dots + c_p f_{i_p} = \mathrm{o}$$

je splněna jedině pro $c_1 = \dots = c_p = 0$, (t.j. nulový řádek lze získat lineární kombinací daných řádků jediným způsobem - s nulovými koeficienty).

Řekneme, že řádky $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$ matice A jsou *lineárně závislé*, jestliže nejsou lineárně nezávislé.

Definice *lineárně závislých* řádků matice se dá zřejmě ekvivalentně přeformulovat takto: Existují čísla $c_1 \cdots c_p \in \mathbb{P}$, z nichž alespoň jedno je *různé od nuly*, tak, že

$$c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k} + \dots + c_p f_{i_p} = \mathrm{o}\,.$$

Je -li např. $c_k \neq 0$, lze ovšem psát

$$f_{i_k} = -\frac{1}{c_k}(c_1 f_{i_1} + \dots + c_{k-1} f_{i_{k-1}} + c_{k+1} f_{i_{k+1}} + \dots + c_p f_{i_p}),$$

což znamená, že i_k-tý řádek lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících řádků $f_{i_1}, \dots, f_{i_{k-1}}, f_{i_{k+1}}, \dots, f_{i_p}$. Můžeme tedy říkat, že *řádky $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$ matice A jsou lineárně závislé, jestliže alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních řádků.*

Všimněte si, že

- systém řádků matice A obsahující *nulový* řádek je lineárně závislý,
- pro *jeden* řádek (tj. $p = 1$) se definice linární nezávislosti redukuje na tento tvar: jeden řádek matice A je lineárně nezávislý právě když je nenulový; je lineárně závislý právě když je nulový,
- pro *dva* řádky (tj. $p = 2$) se definice linární závislosti redukuje na tuto jednoduchou vlastnost: dva řádky f_{i_1}, f_{i_2} matice A jsou lineárně závislé, jestliže jeden z nich je (nenulovým) násobkem druhého (tj. $f_{i_2} = c f_{i_2}$ pro nějaké číslo $c \neq 0$); podobně
- dva řádky matice A jsou lineárně nezávislé, jestliže jsou oba nenulové a jeden z nich není násobkem druhého.

Řekneme, že řádky $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ matice A tvoří *maximální lineárně nezávislý systém* řádků, jestliže jsou lineárně nezávislé a pro libovolný řádek $f_j \neq f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$, matice A jsou řádky $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}, f_j$ lineárně závislé. Tedy lineárně nezávislý systém řádků je maximální, jestliže jeho doplněním o libovolný jiný řádek dané matice vznikne lineárně závislý systém řádků.

Analogicky se definují pojmy *lineární kombinace*, *lineární nezávislost*, *lineární závislost* a *maximální lineárně nezávislý systém* pro *sloupce* matice.

Kontrolní úkol.

• Rozepište podmínky lineární nezávislosti a lineární závislosti řádků matice $A = (a_{ij})$ pomocí prvků této matice. Totéž proveďte pro sloupce.

Nyní již můžeme definovat hodnost matice, což je jeden z klíčových pojmů v teorii matic.

Definice 2.6 (Hodnost matice)**.** *Hodností* matice A rozumíme počet prvků maximálního lineárně nezávislého systému řádků matice A.

Hodnost matice A označujeme $\operatorname{rank} A$.[5]

Přímo z definice hodnosti matice vyplývá, že

- hodnost *nulové matice* je rovna 0, hodnost nenulové matice je ≥ 1,
- hodnost *diagonální matice* je rovna *počtu* jejích *nenulových řádků*.

Definice 2.7. Čtvercová matice A řádu n se nazývá *regulární*, je-li $\operatorname{rank} A = n$ (tedy je tvořena lineárně nezávislými řádky). Čtvercová matice A řádu n se nazývá *singulární*, jestliže není regulární, tj. je-li $\operatorname{rank} A < n$.

Kontrolní úkol.

• Všimněte si, že *všechny elementární matice jsou regulární.*

2.4 Věty o hodnosti matice

Dokážeme si věty, které nám odhalí strukturu faktorové množiny $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})/_\sim$ a také nám poskytnou techniky k určování hodnosti matic.

Věta 2.8 (Gauss)**.** *Elementární úpravy nemění hodnost matice.*

Důkaz. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $\operatorname{rank} A = k$. Označme $f_{i_1}, \dots f_{i_k}$ maximální lineárně nezávislý systém řádků matice A. Je třeba ukázat, že po provedení libovolné elementární úpravy bude mít matice $\bar{A} \sim A$ právě k lineárně nezávislých řádků.

Tvrzení dokážeme postupně pro všechny čtyři typy elementárních úprav.

- Vynásobení p-tého řádku číslem $c \neq 0$: Jestliže řádek f_p matice A je lineárně závislý, pak také $\bar{f}_p = cf_p$ je lineárně závislý; ostatní řádky se touto úpravou nemění. Jestliže f_p patří lineárně nezávislému systému řádků matice A, pak každý další řádek matice A, a tedy i matice $\bar{A}$, již je lineárně závislý; přitom vynásobením jednoho z řádků lineárně nezávislého systému číslem $c \neq 0$ vznikne opět lineárně nezávislý systém (kdyby cf_p byl lineární kombinací nějakých řádků uvažovaného systému, pak by též f_p musel být jejich lineární kombinací, což je spor).

- Vynásobení p-tého řádku číslem $c \in \mathbb{P}$ a přičtení ke q-tému řádku, $p \neq q$: Pro řádky upravené matice $\bar{A}$ nyní platí, že $\bar{f}_q = f_q + cf_p$ a ostatní řádky se nezmění. Jestliže řádek f_q matice A je lineární kombinací maximálního lineárně nezávislého systému, pak také řádek $\bar{f}_q$ je lineárně závislý (ať už řádek f_p je jedním z řádků $f_{i_1}, \dots f_{i_k}$, či je jejich lineární kombinací). Nechť tedy f_q patří lineárně nezávislému systému řádků matice A. Jelikož ostatní řádky matice $\bar{A}$ jsou stejné jako řádky matice A, stačí ukázat, že řádky $\bar{f}_{i_1}, \dots \bar{f}_{i_k}$ jsou také lineárně nezávislé. Jestliže řádek f_p patří lineárně nezávislému systému, platí

$$\begin{aligned}
&c_1\bar{f}_{i_1} + \cdots + c_p\bar{f}_p + c_q\bar{f}_q + \cdots + c_k\bar{f}_{i_k} \\
&= c_1 f_{i_1} + \cdots + c_p f_p + c_q(f_q + cf_p) + \cdots + c_k f_{i_k} \\
&= c_1 f_{i_1} + \cdots + (c_p + c_q c) f_p + c_q f_q + \cdots + c_k f_{i_k} = \mathrm{o},
\end{aligned}$$

  odkud díky lineární nezávislosti řádků $f_{i_1}, \dots f_{i_k}$ okamžitě vyplývá, že $c_1 = \cdots = c_p = c_q = \cdots = c_k = 0$. Je-li naopak řádek f_p lineárně závislý, tj.

$$f_p = b_1 f_{i_1} + \cdots + b_q f_q + \cdots + b_k f_{i_k},$$

[5] Anglicky se „hodnost“ řekne *rank*.

má vyšetřovaná podmínka tvar

$$
\begin{aligned}
c_1\bar f_{i_1} + \cdots + c_q\bar f_q + \cdots + c_k\bar f_{i_k} &= c_1 f_{i_1} + \cdots + c_q(f_q + cf_p) + \cdots + c_k f_{i_k}\\
&= c_1 f_{i_1} + \cdots + c_q f_q + c_q c(b_1 f_{i_1} + \cdots + b_q f_q + \cdots + b_k f_{i_k}) \cdots + c_k f_{i_k}\\
&= (c_1 + c_q c b_1) f_{i_1} + \cdots + c_q(1 + cb_q) f_q + \cdots + (c_k + c_q c b_k) f_{i_k} = \mathrm{o}\,.
\end{aligned}
$$

Protože každý z koeficientů u $f_{i_1}, \ldots, f_q, \ldots, f_{i_k}$ musí být roven nule, dostáváme $c_q = 0$, a tedy také $c_1 = \cdots = c_{q-1} = c_{q+1} = c_k = 0$, což jsme měli ukázat.

- Vynásobení p-tého sloupce číslem $c \neq 0$: Řádky matice A označíme $f_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $1 \le j \le m$, pak řádky matice $\bar A$ jsou $\bar f_j = (a_{j1}, \ldots, ca_{jp}, \ldots a_{jn})$, $1 \le j \le m$. Jestliže

$$f_j = b_1 f_{i_1} + \cdots + b_k f_{i_k} = \sum b_s f_{i_s} = (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s n}),$$

pak také

$$
\begin{aligned}
\bar f_j &= (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, c\sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s n})\\
&= (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s (c a_{i_s p}), \ldots, \sum b_s a_{i_s n}) =\\
&= \sum b_s (a_{i_s 1}, \ldots, c a_{i_s p}, \ldots, a_{i_s n}) = \sum b_s \bar f_{i_s}.
\end{aligned}
$$

Je tedy třeba zkoumat lineární nezávislost řádků $\bar f_{i_1}, \ldots, \bar f_{i_k}$: Nechť

$$\sum b_s \bar f_{i_s} = (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s (c a_{i_s p}), \ldots, \sum b_s a_{i_s n}) = (0, \ldots, 0).$$

Pak

$$\sum b_s a_{i_s 1} = 0, \quad \ldots, \quad c\sum b_s a_{i_s p} = 0, \quad \ldots, \quad \sum b_s a_{i_s n} = 0.$$

Jelikož $c \neq 0$, platí

$$\mathrm{o} = (0, \ldots, 0) = (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s n}) = \sum b_s f_{i_s},$$

a z lineární nezávislosti řádků $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$ plyne $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Řádky $\bar f_{i_1}, \ldots, \bar f_{i_k}$ tedy tvoří maximální lineárně nezávislý systém řádků matice $\bar A$.

- Vynásobení p-tého sloupce číslem $c \in \mathbb{P}$ a přičtení ke q-tému sloupci, $p \neq q$: Nyní řádky matice $\bar A$ mají tvar $\bar f_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jp}, \ldots, a_{jq} + ca_{jp}, \ldots, a_{jn})$, $1 \le j \le m$, kde předpokládáme $c \neq 0$ (případ, kdy $c = 0$, je triviální). Je-li řádek f_j lineární kombinací maximálního lineárně nezávislého systému řádků matice A, máme:

$$f_j = \sum b_s f_{i_s} = (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s q}, \ldots, \sum b_s a_{i_s n}),$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
\bar f_j &= (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s q} + c\sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s n})\\
&= \sum b_s (a_{i_s 1}, \ldots, a_{i_s p}, \ldots, a_{i_s q} + c a_{i_s p}, \ldots, a_{i_s n}) = \sum b_s \bar f_{i_s}.
\end{aligned}
$$

Zbývá ukázat, že řádky $\bar f_{i_1}, \ldots, \bar f_{i_k}$ jsou lineárně nezávislé. Nechť tedy $\sum b_s \bar f_{i_s} = \mathrm{o}$. Pak ovšem

$$
\begin{aligned}
&\sum b_s (a_{i_s 1}, \ldots, a_{i_s p}, \ldots, a_{i_s q} + c a_{i_s p}, \ldots, a_{i_s n})\\
&= (\sum b_s a_{i_s 1}, \ldots, \sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s q} + c\sum b_s a_{i_s p}, \ldots, \sum b_s a_{i_s n})\\
&= (0, \ldots, 0),
\end{aligned}
$$

odkud dostáváme

$$\sum b_s a_{i_s1} = 0, \dots, \sum b_s a_{i_sp} = 0, \dots, \sum b_s a_{i_sq} = 0, \dots, \sum b_s a_{i_sn} = 0,$$

tj.

$$\sum b_s (a_{i_s1}, \dots, a_{i_sp}, \dots, a_{i_sq}, \dots, a_{i_sn}) = \sum b_s f_{i_s} = \mathrm{o}\,.$$

To ovšem znamená, že $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Jak bylo ukázáno výše, další řádky matice $\bar{A}$ jsou lineární kombinací řádků $\bar{f}_{i_1}, \dots, \bar{f}_{i_k}$. Celkově tedy $\operatorname{rank} \bar{A} = \operatorname{rank} A = k$.

$\square$

Věta 2.9 (Důsledky)**.**

(1) *Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.*

(2) *Hodnost matice se nezmění vynásobením konečným počtem elementárních matic zleva nebo zprava.*

Věta 2.10 (Gauss)**.** *Každou matici A lze konečným počtem elementárních úprav převést na matici*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

kde E je jednotková matice řádu $k = \operatorname{rank} A$, a 0 reprezentuje nulové matice, jejichž typ je zřejmý z kontextu.

Definice 2.11. Matice tvaru (2.2) popsaná v předchozí větě se nazývá *Gaussův kanonický tvar* matice A.

Důkaz. Dokážeme druhou Gaussovu větu: Uvažujme matici A. Je-li nulová, má požadovaný tvar. Nechť tedy A je nenulová. Pak lze záměnou řádků a sloupců (tedy pomocí elementárních úprav) dosáhnout toho, že $a_{11} \neq 0$. Vynásobíme první řádek číslem $1/a_{11}$, čímž na pozici $(1,1)$ dostaneme číslo 1. Nyní pro každé $i \geq 2$ přičteme k i-tému řádku první řádek vynásobený číslem $-a_{i1}$, dostaneme tak na pozici $(i,1)$ číslo 0. Po těchto úpravách přejde tedy matice A na ekvivalentní matici tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & \cdots \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Dále pro každé $j \geq 2$ přičteme k j-tému sloupci první sloupec vynásobený číslem $-a'_{1j}$, takto na pozici v prvním řádku a j-tém sloupci obdržíme číslo 0, tedy

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Nyní zcela analogický postup aplikujeme na submatici

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \cdots \\ a'_{32} & a'_{33} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix},$$

která má $m-1$ řádků a $n-1$ sloupců. Po konečném počtu kroků takto dospějeme k matici, která je ekvivalentní s A a má kanonický tvar. Jelikož její hodnost je rovna $\operatorname{rank} A = k$, má její jednotková submatice E řád k. $\square$

Věta 2.12 (Důsledky)**.**

(1) *Každá matice A je ekvivalentní nějaké diagonální matici, přičemž počet nenulových řádků (sloupců) diagonální matice je roven hodnosti matice A.*

(2) *Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků v diagonálním tvaru = počtu nenulových sloupců v diagonálním tvaru.*

(3) *Maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice je roven maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků, tj. hodnosti matice.*

(4) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$.

(5) *Pro matici A typu $m \times n$ je číslo* $\operatorname{rank} A$ *prvkem množiny* $\{0, 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$.[6]

Poznámka 2.13. Předchozí věta o kanonickém tvaru nám přibližuje strukturu faktorové množiny $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})/_\sim$: Faktorová množina je tvořena $1 + \min\{m, n\}$ prvky (třídami ekvivalence). Třída nulové matice je jednoprvková, ostatní třídy ekvivalence jsou netriviální. Každá třída obsahuje „kanonického reprezentanta“ (2.2), kde řád jednotkové matice určuje hodnost příslušných ekvivalentních matic.

Věta 2.14 (Důsledky pro čtvercové regulární matice)**.**

(1) *Každá regulární matice je ekvivalentní jednotkové matici.*

(2) *Každou regulární matici lze vyjádřit ve tvaru součinu jistých elementárních matic (neboť každou regulární matici A lze získat konečným počtem řádkových a sloupcových úprav jednotkové matice, tedy platí $A = UEV = UV$, kde U, V jsou součiny konečného počtu elementárních matic).*

Kromě výše uvedených důsledků platí pro regulární matice i silnější tvrzení.

Věta 2.15.

(1) *Každou regulární matici lze převést na diagonální tvar konečným počtem buď pouze řádkových nebo pouze sloupcových elementárních úprav.*

(2) *Každou regulární matici lze převést pouze řádkovými elementárními úpravami nebo pouze sloupcovými elementárními úpravami na jednotkovou matici.*

Důkaz. Stačí dokázat jedno z těchto tvrzení, druhé je jeho důsledkem.

Dokážeme (2). Důkaz provedeme pro řádkové úpravy; pro sloupcové úpravy se postupuje analogicky.

Buď A regulární matice řádu n. Řádkovými elementárními úpravami lze dosáhnout toho, že $a_{11} \neq 0$ (první sloupec je jistě nenulový, a je-li na pozici $(1, 1)$ nula, stačí vhodně vyměnit řádky). Nyní postupujeme podobně jako v důkazu věty o kanonickém tvaru s tím, že provádíme pouze řádkové úpravy. Matici A tak upravíme na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & \cdots \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \end{pmatrix},$$

[6] $\min\{m, n\}$ je standardní označení pro „menší z čísel m, n“.

a stejně upravujeme submatici

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \cdots \\ a'_{32} & a'_{33} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Po konečném počtu kroků dostaneme

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní pro každé $i = 1, 2, \dots n-1$ přičteme k i-tému řádku poslední řádek vynásobený číslem $-b_{in}$, čímž dostaneme na pozici (i, n) v posledním sloupci číslo 0. Analogicky upravujeme submatici tvořenou prvními $n-1$ řádky a prvními $n-1$ sloupci. Po konečném počtu kroků získáme jednotkovou matici. □

Výše jsme viděli, že regulární matice vznikají jako součiny elementárních matic. Toto zjištění lze využít k důkazu důležitého tvrzení o hodnosti *součinu* matic.

Věta 2.16. *Vynásobením matice regulární maticí zleva nebo zprava se hodnost nemění.*

Důkaz. Buď A matice typu $m \times n$. Nechť U je libovolná regulární matice řádu m a V je libovolná regulární matice řádu n. Jak jsme ukázali výše, matice U a V jsou součinem konečně mnoha elementárních matic. To ovšem znamená, že matice UA a AV jsou ekvivalentní s A, takže $\operatorname{rank} UA = \operatorname{rank} AV = \operatorname{rank} A$. □

Věta 2.17 (Důsledky)**.**

(1) *Součin regulárních matic je regulární matice.*

(2) *Součin konečného počtu elementárních matic je regulární matice.*

2.5 Výpočet hodnosti matice

Z Gaussových vět vyplývá, že hodnost matice lze určit tak, že najdeme její diagonální nebo kanonický tvar. Zamyslíme-li se ale nad důkazy Gaussových vět, snadno objevíme, že při praktickém výpočtu hodnosti matice není nutno provádět tolik ekvivalentních úprav, a že hodnost matice lze určit již daleko dříve. Dostáváme tak efektivní metodu (algoritmus) pro výpočet hodnosti matice, který nyní podrobně popíšeme.

Definice 2.18. Řekneme, že matice A má *schodovitý tvar*, jestliže je nulová, nebo pro její řádky $f_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i = 1, 2, \dots, m$, platí:

- $a_{ij} = 0$ pro $j < k_i$, a $a_{ik_i} \neq 0$, kde $k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq n$ pro nějaké $p \leq m$,
- všechny řádky $f_{p+1}, \dots, f_m$ jsou nulové.

Volně můžeme říci, že (nenulová) matice ve schodovitém tvaru vypadá tak, že první nenulový prvek každého řádku je „dál", než první nenulový prvek řádku předcházejícího.

Prakticky okamžitě je vidět, že *nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé*, tedy, že *hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Kontrolní úkoly.

• Mezi uvedenými maticemi vyberte ty, které jsou ve schodovitém tvaru:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 4 & 3 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

• Určete Gaussův kanonický tvar výše uvedených matic.

• Určete, které z výše uvedených matic jsou navzájem ekvivalentní.

• Jak vypadá schodovitý tvar *regulární* čtvercové matice?

Slibovaná metoda výpočtu hodnosti matice vyplývá z této věty:

Věta 2.19.

(1) *Každou matici lze konečným počtem řádkových elementárních úprav převést na schodovitý tvar.*

(2) *Každá matice A je ekvivalentní nějaké matici ve schodovitém tvaru, přičemž počet nenulových řádků této schodovité matice je roven hodnosti matice A.*

(3) *Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků ve schodovitém tvaru.*

Důkaz. Dokážeme první tvrzení, ostatní dvě jsou důsledkem prvního.

Uvažujme nenulovou matici A o m řádcích. Vybereme řádek (jeden z řádků), kde první nenulový prvek stojí nejvíce vlevo a tento řádek napíšeme jako první (přesněji, vyměníme jej s prvním řádkem). Nyní mohou nastat dvě možnosti:

1) Ve všech zbývajících řádcích je první nenulový prvek více vpravo, než v řádku prvním, takže všechny prvky v dalších řádcích, které stojí pod prvním nenulovým prvkem prvního řádku, jsou rovny nule.

2) Mezi zbývajícími řádky je p řádků, jejichž první nenulový prvek zleva je ve stejném sloupci jako první nenulový prvek a_{1k_1} v prvním řádku. V tomto případě takové řádky uspořádáme pod sebe pod první řádek a provedeme tyto ekvivalentní úpravy: od prvního řádku vynásobeného číslem a_{2k_1} odečteme druhý řádek vynásobený číslem a_{1k_1}. Na pozici $(2, k_1)$ tak dostaneme nulu. Pak od prvního řádku vynásobeného číslem a_{3k_1} odečteme třetí řádek vynásobený číslem a_{1k_1}, čímž na pozici $(3, k_1)$ dostaneme nulu. Analogicky postupujeme pro řádky $3, \ldots, p$. Po těchto úpravách dostaneme stav popsaný v bodě 1).

Stejný postup jako výše aplikujeme na submatici tvořenou řádky $2, \ldots, m$. Po konečném počtu kroků dospějeme zřejmě k matici ve schodovitém tvaru. □

Metoda převádění matice na schodovitý, diagonální nebo kanonický tvar pomocí elementárních úprav se nazývá *Gaussova eliminační metoda*.

Shrneme-li výsledky, můžeme vyslovit obecný návod, jak jednoduše hledat hodnost matice:

Postupnou aplikací řádkových elementárních úprav najdeme k dané matici A nějakou s ní ekvivalentní schodovitou matici A' („říkáme, že matici A „převedeme na schodovitý tvar“). *Hodnost matice A je pak rovna počtu nenulových řádků schodovité matice A'.*

Příklad 2.20. Popsaný algoritmus použijeme k určení hodnosti matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zapíšeme řádkové elementární úpravy krok za krokem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že daná matice má hodnost 3.

Jednotlivé kroky není třeba takto podrobně rozepisovat. Ty úpravy, které vedou k „vynulování“ celého sloupce pod uvažovaným řádkem lze vždy zapsat naráz do jedné matice, takže výsledný zápis bude podstatně kratší. V našem případě dopadne takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.21. Najdeme Gaussův kanonický tvar matice z předchozího příkladu.

Jelikož známe hodnost matice, můžeme využít Gausovu větu a kanonický tvar napsat okamžitě:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Můžeme ovšem postupovat i přímým výpočtem, přičemž můžeme použít algoritmus založený na kombinaci řádkových a sloupcových úprav, popsaný v důkazu věty o Gaussově kanonickém tvaru matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení

1. Opakování.
   • Definujte všechny pojmy uvedené v Klíčových slovech.
   • Napište, jak vypadají elementární matice. Jaký je jejich význam?
   • Vyslovte Gaussovy věty o hodnosti matice.
   • Jaké vlastnosti (týkající se ekvivalence) mají regulární matice?
   • Jak vypadaá rozklad množiny $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ na třídy ekvivalence podle hodnosti?
2. Zjistěte, zda jsou níže uvedené řádky matice lineárně nezávislé
   a) pomocí definice lineární nezávislosti řádků,
   b) pomocí ekvivalentních úprav matice.
   $$f_1 = (1,2,0,0), \quad f_2 = (3,6,0,0), \quad f_3 = (1,2,3,4), \quad f_4 = (0,1,2,3).$$
3. Zjistěte, zda jsou dané řádky matice lineárně závislé a v kladném případě tuto závislost vyjádřete explicitně:
   $$f_1 = (5,2,-3,1,0), \quad f_2 = (7,1,-3,8,-6), \quad f_3 = (1,1,-1,-2,2).$$
4. Nalezněte všechny hodnoty parametru α, pro které se řádek $(7,-2,\alpha)$ vyjadřuje jako lineární kombinace řádků
   $$f_1 = (2,3,5), \quad f_2 = (3,7,8), \quad f_3 = (1,-6,1).$$
   Toto vyjádření zapište.
5. Určete hodnost matice
   $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   a napište její Gaussův kanonický tvar.
6. Určete hodnost matice
   $$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$
   v závislosti na parametru α.
7. Určete Gaussův kanonický tvar matice z přechozího příkladu.
8. Zjistěte, zda matice
   $$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & 5 \\ 6 & 8 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$
   je regulární nebo singulární.
9. Najděte číslo α, pro které má matice
   $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
   nejmenší hodnost.

10. Určete Gaussův kanonický tvar matice z předchozího příkladu
a) výpočtem hodnosti matice a aplikací Gaussovy věty o kanonickém tvaru matice,
b) přímým výpočtem pomocí kombinace řádkových a sloupcových elementárních úprav,
c) přímým výpočtem s využitím pouze řádkových elementárních úprav,
d) přímým výpočtem s využitím pouze sloupcových elementárních úprav.

    V případech b), c), d) napište elementární matice odpovídající jednotlivým úpravám a najděte příslušné matice ekvivalentních úprav. Vyjádřete nalezenou matici v kanonickém tvaru jako součin zadané matice a matic ekvivalentních úprav. Vynásobením příslušných matic se přesvědčte o správnosti svého řešení úlohy.

11. Určete $\operatorname{rank}(AB)$, víte-li, že B je regulární matice.

12. Dokažte, že pro hodnost součinu matic A, B platí

$$\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}.$$

3 Determinanty a inverzní matice

Studijní cíle: V poslední kapitole o maticích se budeme věnovat podrobněji čtvecovým maticím. Zavedeme si pojem *determinantu* matice, prozkoumáme jeho vlastnosti a hlavně, naučíme se determinaty počítat. Dále se budeme věnovat pojmu *inverzní matice*. V první kapitole jsme se seznámili se základními operacemi na množině čtvercových matic - sčítáním a násobením. Zjistili jsme, že ke sčítání lze zavést inverzní operaci - odčítání, zatímco inverzní operaci k násobení matic jsme nezaváděli (naopak jsme zjistili, že násobení matic není komutativní, takže ani nelze zavést „dělení", jak je známe v číselných polích). V množině čtvercových matic ovšem lze zavést, podobně jako u čísel, pojem „inverzního prvku" vzhledem k násobení. Připomeňme si, že inverzním prvkem k číslu $x \neq 0$ je číslo $x^{-1} = 1/x$, tedy takové, jehož součin s číslem x je 1. V této kapitole uvidíme, že omezíme-li se na *regulární* matice, pak můžeme k dané matici A najít matici tak, aby jejím součinem s maticí A (v libovolném pořadí) byla *jednotková matice*. Takovou matici pak budeme nazývat *inverzní matice* k matici A. Prostudujeme vlastnosti inverzních matic a uvedeme metody jejich výpočtu. V závěru kapitoly se seznámíme ještě s jednou metodou pro výpčet hodnosti matice - tzv. *metodou vroubení*, která je založena na výpočtech determinantů.

Klíčová slova: Permutace, parita permutace, Levi-Civitův symbol, determinant matice, regulární matice, singulární matice, Sarrusovo pravidlo, minor, algebraický doplněk prvku matice, Laplaceova věta, inverzní matice.

Potřebný čas: 390 minut.

3.1 Permutace

Buď $\{p_1, \ldots, p_n\}$ uspořádaná podmnožina množiny přirozených čísel (tj. $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$). *Permutací* množiny $\{p_1, \ldots, p_n\}$ budeme rozumět bijektivní zobrazení této množiny na sebe. Permutaci σ množiny $\{p_1, \ldots, p_n\}$ definovanou vztahem $\sigma(p_1) = \sigma_1, \sigma(p_2) = \sigma_2, \ldots, \sigma(p_n) = \sigma_n$ budeme označovat

$$\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix},$$

nebo stručně $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$.

Permutace, která odpovídá identickému zobrazení množiny $\{p_1, \ldots, p_n\}$ na sebe, se nazývá *identická*; budeme ji označovat symbolem id.

Z definice permutace vyplývá, že složením dvou permutací množiny $\{p_1, \ldots, p_n\}$ vzniká opět permutace této množiny, tj. že skládání permutací je binární operace na množině $\{p_1, \ldots, p_n\}$; tato operace zřejmě není komutativní. Operaci skládání permutací budeme označovat obvyklým symbolem $\circ$. Připomeňme si, že pro permutace σ, π je *složená permutace* $\sigma \circ \pi$ definována vztahem $(\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x))$ pro všechna $x \in \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Analogicky vidíme, že ke každé permutaci σ existuje *inverzní permutace*, označovaná σ^{-1}. Víme, že inverzní permutace je určena jednoznačně a je definována vztahem $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Buď

$$\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

permutace. Uspořádanou dvojici (σ_i, σ_j) nazveme *inverzí*, jestliže $i < j$ a přitom $\sigma_i > \sigma_j$. Inverze tedy tvoří takové dvojice prvků v permutaci, v nichž prvek (číslo) s „nižším pořadovým číslem" je větší než prvek s „vyšším pořadovým číslem". Označme s počet inverzí v permutaci σ. Číslo $(-1)^s$ budeme nazývat *paritou permutace* σ. Je-li parita permutace σ rovna 1, tj. je-li počet inverzí v permutaci σ sudý, nazývá se permutace σ *sudá*. Je-li parita rovna -1, tj. je-li počet inverzí lichý, nazývá se tato permutace *lichá*.

Abychom si usnadnili zápis a některé výpočty, zavedeme si nyní pomocný symbol, nazývaný *Levi–Civitův symbol*. Předpokládejme, že indexy $j_1, \dots, j_n$ nabývají hodnoty v podmnožině $\{p_1, \dots, p_n\}$ přirozených čísel, $p_1 < p_2 \cdots < p_n$. Klademe

$$\varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \begin{cases} 1 & \text{tvoří-li } \{j_1, \dots, j_n\} \text{ sudou permutaci množiny } \{p_1, \dots, p_n\}, \\ -1 & \text{tvoří-li } \{j_1, \dots, j_n\} \text{ lichou permutaci množiny } \{p_1, \dots, p_n\}, \\ 0 & \text{jsou-li alespoň dva z indexů } \{j_1, \dots, j_n\} \text{ stejné.} \end{cases}$$

Cvičení

1. Kolik je permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$?
2. Určete paritu následujících permutací:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vypište všechny permutace množiny $\{1, 2, 3\}$ a určete jejich paritu.
4. Vypište všechny permutace množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a určete jejich paritu.
5. Najděte složenou permutaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Najděte inverzní permutace k permutacím z příkladu 2.

3.2 Determinant čtvercové matice

Definice 3.1. Nechť A je čtvercová matice řádu n nad číselným polem $\mathbb{P}$. Číslo

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n}$$

se nazývá *determinant* matice A.

Determinant matice A se také často označuje symbolem $|A|$, explicitně píšeme

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Zřejmě $\det A \in \mathbb{P}$, tj. det je zobrazení množiny $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$ do pole $\mathbb{P}$.

Všimněte si, že determinant je součtem členů $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ přes všechny permutace $\sigma = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ množiny $\{1, 2, \dots n\}$, opatřených znaménkem $+$ pokud jde o sudou a $-$ pokud jde o lichou permutaci. Determinant matice A je tedy součet součinů prvků této matice vytvořených tak, že každý sčítanec obsahuje *právě jeden prvek z každého řádku a sloupce*, a opatřených vhodným znaménkem.

Rozepíšeme definici determinantu pro „malé“ matice:

• Pro $n = 1$: V tomto případě má matice A jen jeden řádek a jeden sloupec. Je tedy $A = a \in \mathbb{P}$, takže $\det A = a$.

• Pro $n = 2$ máme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

a pouze dvě permutace množiny $\{1, 2\}$: sudou permutaci $\{1, 2\}$ a lichou permutaci $\{2, 1\}$. Je tedy $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$ a $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, takže

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Tento vzorec si snadno zapamatujete: determinant matice 2×2 je součin prvků na diagonále minus součin zbývajících prvků.

• Pro $n = 3$ máme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

a $3! = 6$ permutací množiny $\{1, 2, 3\}$. Definice determinantu má tedy pro tento případ tvar

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ke snadnému zapamatování tohoto vzorce slouží následující grafické schéma, nazývané *Sarrusovo pravidlo*: napíšeme si pod sebe do pěti řádků první, druhý a třetí řádek matice A a znovu její první a druhý řádek:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Determinant pak dostaneme jako součet 6 členů, tvořených součiny prvků na třech sousedících diagonálách jdoucích zleva doprava se znaménkem $+$ a na třech „protějších“ sousedících diagonálách jdoucích zprava doleva se znaménkem $-$.

Je-li $n = 4$, pak determinant je součtem $4! = 24$ členů a jednoduché pravidlo pro jejich zapamatování už nemáme. Pro výpočet determinantu lze ovšem nalézt jiné postupy, jejichž použití je snadnější, než přímé dosazení do definičního vztahu.

Uvedeme některé vlastnosti determinantů, které nám usnadní jejich výpočet.

Věta 3.2. (1) *Je-li některý řádek (sloupec) matice A nulový, je* $\det A = 0$.

(2) *Determinant matice ve schodovitém tvaru a determinant diagonální matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále, tedy* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Obě tvrzení ihned plynou z definice determinantu.

Nyní můžeme okamžitě určit *determinanty elementárních matic*:

$$\det Q(i, c) = c\,, \quad \det Q(ij, c) = 1.$$

Jelikož podle definice elementárních úprav je v matici $Q(i, c)$ číslo c různé od nuly, jsou determinanty všech elementárních matic různé od nuly.

Věta 3.3. (1) *Pro libovolné dvě čtvercové matice A, B platí*

$$\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B.$$

(2) *Pro libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$\det A = \det A^T.$$

Důkaz. (1) Vzorec dokážeme dosazením do definice determinantu. Označme $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, a připomeňme si, že $c_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj}$ pro všechny hodnoty indexů i, j. Máme tedy

$$\begin{aligned} \det AB &= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} c_{1j_1}\dots c_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} a_{1k_1}b_{k_1j_1}a_{2k_2}b_{k_2j_2}\dots a_{nk_n}b_{k_nj_n} \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} b_{k_1j_1}\dots b_{k_nj_n}a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}. \end{aligned}$$

Všimněme si pozorně posledního výrazu, v němž vystupuje suma přes všechny hodnoty indexů $j_1, \dots, j_n$ a $k_1 \dots, k_n$. Uvažujme nejprve ty členy v uvedeném součtu, které mají všechny hodnoty indexů $k_1, \dots, k_n$ navzájem různé, to znamená, že $(k_1, \dots, k_n)$ je nějaká permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. V každém ze součinů $b_{k_1j_1} \dots b_{k_nj_n}$ lze tedy přeskládat činitele tak, aby levé (řádkové) indexy tvořily uspořádanou množinu $\{1, 2, \dots, n\}$. Tímto přeskládáním ovšem zároveň změníme pořadí indexů $j_1, \dots, j_n$, čímž dostaneme na místě sloupcových indexů jinou permutaci. Zřejmě, byla-li $(k_1, \dots, k_n)$ sudá permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, pak vznikne permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, která má stejnou paritu jako permutace $(j_1, \dots j_n)$. Podobně, byla-li $(k_1, \dots, k_n)$ lichá permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, vznikne permutace, která má opačné znaménko. Indexy $j_1, \dots, j_n$ jsou ovšem sčítací, to znamená, že v součtu $\sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} b_{k_1j_1} \dots b_{k_nj_n}$ vystupují *všechny* permutace $(j_1, \dots, j_n)$. Z toho vyplývá, že uvedeným přeskládáním činitelů v každém ze sčítanců $b_{k_1j_1} \dots b_{k_nj_n}$ vznikne výraz, který bude buď přímo roven některému z výrazů vystupujících v součtu členů $\varepsilon_{j_1\dots j_n} b_{k_1j_1} \dots b_{k_nj_n}$ (to v případě, že permutace $(k_1, \dots, k_n)$ byla sudá), nebo bude roven některému z těchto sčítanců, ale bude mít opačné znaménko (to nastane tehdy, když permutace $(k_1, \dots, k_n)$ byla lichá). Platí tedy pro každou permutaci $(k_1 \dots k_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} b_{k_1j_1} \dots b_{k_nj_n} = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} \varepsilon_{k_1\dots k_n} b_{1j_1} \dots b_{nj_n}. \tag{3.1}$$

Zbývá vyšetřit ty sčítance v součtu

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} b_{k_1j_1}\dots b_{k_nj_n}a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n},$$

kde alespoň dva z indexů $k_1, \dots, k_n$ jsou stejné. Uvažujme tedy pro pevně zvolené indexy $k_1, \dots, k_n$ součet $\sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} b_{k_1j_1} \dots b_{k_nj_n}$ a předpokládejme, že p z těchto indexů nabývá stejné hodnoty. Pak ovšem v uvažovaném součtu bude vystupovat $(p!)$-sčítanců, které budou v absolutní hodnotě stejné, ale se znaménky takovými, že se navzájem vyruší. Celkově tedy dostáváme, že vztah (3.1) platí pro libovolné hodnoty indexů $k_1, \ldots, k_n$. Odtud

$$\begin{aligned}
\det AB &= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} b_{k_1 j_1} \ldots b_{k_n j_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} \varepsilon_{k_1\ldots k_n} b_{1j_1} \ldots b_{nj_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \\
&= \Big(\sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{k_1\ldots k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \Big) \cdot \Big(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} b_{1j_1} \ldots b_{nj_n} \Big) \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

(2) K důkazu druhého tvrzení též využijeme definici determinantu. Platí

$$\det A^T = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}. \tag{3.2}$$

Všimněme si blíže nenulových členů ve výrazu pro $\det A^T$. Pro pevné hodnoty indexů $j_1, \ldots, j_n$ je $(j_1 \ldots j_n)$ permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Přeskládáme-li činitele v součinu $a_{j_1 1} \ldots a_{j_n n}$ tak, aby levé (řádkové) indexy byly uspořádány v pořadí $1, 2, \ldots, n$, vytvoří pravé (sloupcové) indexy permutaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, jejíž znaménko bude stejné jako bylo znaménko permutace $(j_1 \ldots j_n)$. Z toho je zřejmé, že v součtu (3.2) vystupují stejné sčítance a se stejnými znaménky jako v součtu $\sum_{j_1,\ldots,j_n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$. Pak ovšem $\det A^T = \det A$. $\square$

Věta 3.4. *Matice A je regulární právě tehdy, když $\det A \neq 0$ a singulární právě tehdy, když $\det A = 0$.*

Důkaz. Buď A regulární matice. Pak A je součinem konečného počtu elementárních matic. Jelikož všechny elementární matice mají nenulový determinant, a jelikož podle výše uvedené věty je determinant součinu konečně mnoha matic roven součinu jejich determinantů, dostáváme $\det A \neq 0$.

Obráceně, nechť $\det A \neq 0$. Převedeme-li matici A elementárími úpravami na diagonální tvar A', dostáváme $A' = UAV$ pro jisté matice U, V, které jsou součinem konečně mnoha elementárních matic, takže $\det U \neq 0$, $\det V \neq 0$. Podle věty o součinu determinantů je $\det A' = \det U \cdot \det A \cdot \det V \neq 0$. Determinant matice A' je ovšem roven součinu jejích diagonálních prvků, proto musí každý z těchto prvků být různý od 0. Matice A' tedy nemá žádný řádek nulový, tudíž její hodnost je maximální. Matice A má stejnou hodnost jako matice A', je tedy rovněž regulární.

Druhá část tvrzení je negací jeho právě dokázané první části. $\square$

Vyšetříme ještě, co se děje s determinantem při elementárních úpravách matice.

Věta 3.5. (1) *Nechť matice A' vznikne z A vynásobením řádku (sloupce) číslem $c \neq 0$. Pak*

$$\det A' = c \det A.$$

(2) *Jestliže v matici A k i-tému řádku (sloupci) přičteme c-násobek j-tého řádku (sloupce), její deteminant se nezmění.*

(3) *Výměna dvou řádků (sloupců) matice mění znaménko determinantu.*

Důkaz. K důkazu prvních dvou tvrzení si stačí uvědomit, že pro determinanty elementárních matic platí $\det Q(i, c) = c$, $\det Q(ij, c) = 1$ a aplikovat větu o determinantu součinu matic.

Výměna dvou řádků (sloupců) matice je reprezentována součinem U konečně mnoha elementárních matic, které odpovídají úpravám uvedeným v příkladu 2.3. Odtud okamžitě vidíme, že determinant matice U je roven -1. Zbytek opět plyne věty o determinantu součinu matic. $\square$

Úkol. Čtenáře jistě napadlo, že všechna tvrzení předchozí věty by bylo možno snadno dokázat rovněž přímým užitím definice determinantu. Doporučujeme, aby tyto důkazy provedl.

Definice 3.6. Nechť A je (ne nutně čtvercová) matice. *Minorem řádu* k matice A rozumíme determinant její čtvercové submatice řádu k.

Odvodíme nyní z praktického hlediska velmi důležité vzorce, vyjadřující determinant čtvercové matice řádu n pomocí jejích minorů řádu $n-1$.

Definice 3.7. Buď nyní $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n. Označme A_{ij} její submatici řádu $n-1$, která vznikne z A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce. Číslo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

nazýváme *algebraický doplněk prvku* a_{ij}.

Spočteme explicitně determinant submatice A_{ij}. Podle definice determinantu je

$$\det A_{ij} = \sum_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_n \neq j} \varepsilon_{k_1\ldots k_{i-1}k_{i+1}\ldots k_n} a_{1k_1} \ldots a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}} \ldots a_{nk_n}$$

(přesněji, sčítá se přes $k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_n \in \{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}$).

Věta 3.8 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu)**.** *Buď $A = (a_{kl})$ čtvercová matice řádu n, $\mathcal{A}_{ij}$ algebraický doplněk prvku a_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Platí*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathcal{A}_{1k} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\mathcal{A}_{2k} = \cdots = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\mathcal{A}_{nk}, \tag{3.3}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\mathcal{A}_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k2}\mathcal{A}_{k2} = \cdots = \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\mathcal{A}_{kn}\,. \tag{3.4}$$

Všimněte si, že Laplaceova věta představuje $2n$ *vzorců pro výpočet determinantu*. Vzorce (3.3) vyjadřují determinant jako sumu součinů prvků (libovolného pevného) *řádku* matice A s jejich algebraickými doplňky. Podobně vzorce (3.4) vyjadřují determinant jako sumu součinů prvků (libovolného pevného) *sloupce* matice A s jejich algebraickými doplňky. Proto vzorec

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ik}$$

nazýváme *rozvoj determinantu matice podle jejího i-tého* řádku a

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathcal{A}_{kj}$$

nazýváme *rozvoj determinantu matice podle jejího j-tého* sloupce.

Důkaz. K důkazu Laplaceovy věty užijeme definice determinantu matice.

- Nejprve dokážeme první sadu vzorců. Zvolme i-tý řádek matice A libovolně, ale pevně. Platí

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{ij_i} \varepsilon_{j_1\ldots j_i \ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_i\ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n}\,.
\end{aligned}$$

Poslední sumu rozepíšeme pro $j_i = 1, 2, \ldots, n$ a jednotlivé sčítance budeme dále upravovat:

První člen této sumy má tvar

$$a_{i1} \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_{i-1}1j_{i+1}\ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n}. \tag{3.5}$$

Vynecháme-li v součtu nulové členy, vidíme, že sloupcové indexy $j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_n$ probíhají všechny permutace množiny $\{2, \ldots, n\}$. Dále zřejmě

$$\varepsilon_{j_1\ldots j_{i-1}1j_{i+1}\ldots j_n} = (-1)^{i-1} \varepsilon_{1j_1\ldots j_{i-1}j_{i+1}\ldots j_n},$$

a podle definice determinantu je

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=2,3,\ldots,n} \varepsilon_{1j_1\ldots j_{i-1}j_{i+1}\ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n} = \det A_{i1}$$

determinant matice řádu $n-1$, která je rovna submatici matice A, vzniklé vypuštěním i-tého řádku a prvního sloupce. Tedy výraz (3.5) je roven

$$a_{i1}(-1)^{i-1} \det A_{i1} = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} = a_{i1}\mathcal{A}_{i1}.$$

Podobně pro druhý člen uvažovaného součtu máme:

$$a_{i2} \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\ldots j_{i-1}2j_{i+1}\ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n}. \tag{3.6}$$

Nyní sloupcové indexy $j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_n$ probíhají všechny permutace množiny $\{1, 3, \ldots, n\}$. Dále

$$\varepsilon_{j_1\ldots j_{i-1}2j_{i+1}\ldots j_n} = (-1)^{i-1+1} \varepsilon_{j_12j_3\ldots j_{i-1}j_{i+1}\ldots j_n},$$

a podle definice determinantu je

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1,3,\ldots,n} \varepsilon_{j_12j_3\ldots j_{i-1}j_{i+1}\ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n} = \det A_{i2}$$

determinant matice řádu $n-1$, která je rovna submatici matice A, vzniklé vypuštěním i-tého řádku a druhého sloupce. Tedy výraz (3.6) je roven

$$a_{i2}(-1)^{i} \det A_{i2} = a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} = a_{i2}\mathcal{A}_{i2}.$$

Analogické úvahy vedou k závěru, že pro k-tý člen sumy ($k = 1, 2, \ldots, n$) je

$$a_{ik}(-1)^{i-1+k-1} \det A_{ik} = a_{ik}(-1)^{i+k-2} \det A_{ik} = a_{ik}(-1)^{i+k} \det A_{ik} = a_{ik}\mathcal{A}_{ik}.$$

Celkově tedy máme

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ik},$$

což je dokazovaný vztah. Z libovolnosti indexu i plyne, že vzorec platí pro každé $i = 1, 2, \ldots n$.

- K důkazu druhé sady vzorců využijeme toho, že determinant matice A se rovná determinantu matice k ní transponované, tedy

$$\det A = \det A^T = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} a_{i_11} \ldots a_{i_nn}.$$

Zvolíme pevně sloupcový index j, tuto sumu rozepíšeme a postupujeme stejně jako výše.

$\square$

Příklad 3.9. Uvedeme příklad na aplikaci Laplaceovy věty. Spočítáme determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nejvýhodnější bude využít rozvoj podle 3. řádku:

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

Pro ilustraci metody uvedeme ještě výpočet pomocí rozvoje podle 2. sloupce:

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+ 0 \cdot (-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6.$$

Poznámka 3.10 (Metody výpočtu determinantu)**.** Výsledky tohoto odstavce poskytují teoretické zázemí pro výpočet determinantu libovolné čtvercové matice. Při výpočtu můžeme tedy aplikovat tyto metody:

- Determinant matice určíme dosazením do definice determinantu. Tento postup je ovšem pro matice řádu vyššího než 3 zpravidla velmi zdlouhavý a jeho složitost prudce roste s řádem matice (pro matici řádu n má definiční vzorec pro $\det A$ $n!$ členů). Definici tedy využíváme nejčastěji k výpočtu determinantů matic řádu $n = 1, 2, 3$.

- Pomocí elementárních transformací převedeme danou matici na matici ve schodovitém tvaru, jejíž determinant můžeme snadno určit (je součinem diagonálních prvků). Při výpočtu determinantu původní matice pak musíme vzít v úvahu vliv jednotlivých elementárních úprav na hodnotu determinantu.

- Využijeme Laplaceovu větu o rozvoji podle některého řádku nebo sloupce determinantu. Tato metoda je zvláště výhodná, pokud se v některém řádku či sloupci vyskytují nuly.

- Nejčastěji ovšem při výpočtu determinantu používáme vhodné kombinace všech těchto metod, s cílem co nejvíce si výpočet zjednodušit.

Kontrolní otázky a úkoly.

• Definujte determinant.

• Popište, co se děje s determinantem matice při elementárních úpravách této matice.

• Co je to Sarrusovo pravidlo?

• Jaký je determinant matice, která má nulový jeden nebo více řádků či sloupců?

• Jaký je determinant singulární matice?

• Napište, jak vypadá determinant diagonální matice a determinant matice ve schodovitém tvaru.

• Jak se změní determinant matice, když jeden její řádek nebo sloupec vynásobíme číslem c?

• Jak se změní determinant matice, když prohodíme dva její řádky nebo sloupce?

• Jak se změní determinant matice, když a-násobek jednoho jejího řádku (sloupce) přičteme k b-násobku jiného jejího řádku (sloupce)?

• Vyslovte Laplaceovu větu.

• Rozepište Laplaceovu větu explicitně pro případ matice řádu 4 a rozvoje podle jejího třetího sloupce.

• Platí-li pro čtvercové matice A, B vztah $AB = E$, může být $\det A = 0$?

• Doplňte vzorce:

$$\det(AB) = \qquad \det A^T = \qquad \det(AB)^T =$$

• Uveďte příklad matic, pro které $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

• Co můžete říci o matici A víte-li, že $\det A \neq 0$?

• Může být součinem dvou singulárních matic regulární matice?

Cvičení

1. Určete $\det(cA)$, znáte-li $\det A$.
2. Víte-li, že pro čtvercové matice A, X platí $AX = E$, určete $\det X$.
3. Určete $\det A$, víte-li, že $AA^T = E$.
4. Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je roven nule.
   [Návod: Využijte toho, že platí $A = -A^T$ a tedy $\det A = \det(-A^T)$.]
5. Zjistěte, které z níže uvedených matic jsou regulární a které singulární
   a) výpočtem hodnosti matice,
   b) výpočtem determinantu.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočtěte determinanty:

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -4 & 5 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -5 & -7 & 6 & 0 & -7 \\ -3 & 5 & 0 & 1 & -4 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & -1 & 0 & 9 & 2 & -6 \\ -5 & -6 & 4 & -9 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -11 & -2 & -1 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & -8 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & & & & \\ n & \cdots & n & n \cdots & n \end{pmatrix}.$$

7. Je zobrazení $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{P}) \to \mathbb{P}$, které přiřazuje čtvercové matici její determinant, surjektivní? Je toto zobrazení injektivní?

8. Uvažujme množinu $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ spolu s operací sčítání matic a množinu $\mathbb{R}$ s operací sčítání reálných čísel. Vyšetřete, zda zobrazení det je kompatibilní s těmito operacemi, tj. zda součet matic zobrazuje na součet jim odpovídajících reálných čísel. Stejnou úlohu řešte pro případ, že množiny $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$ uvažujeme s operací násobení.
9. Napište si program pro výpočet determinantu matice
   • řádu ≤ 4, založený na definici determinantu,
   • založený na Laplaceově větě
   a otestujte ho na příkladech.

3.3 Inverzní matice

Na množině čtvercových matic řádu n jsme zatím zavedli tyto operace:

- unární operace - komplexní sdružení, transponování, symetrizaci, antisymetrizaci, přiřazení opačné matice
- binární operace sčítání a násobení.

Přitom existence opačné matice k libovolné matici nám umožnila zavést operaci odčítání, jako inverzní operaci ke sčítání. Nyní se budeme zabývat otázkou, zda také k operaci násobení čtvercových matic má smysl hledat nějakou inverzní operaci.

Definice 3.11. Buď A čtvercová matice řádu n. Matice B se nazývá *inverzní matice* k matici A, jestliže

$$AB = BA = E. \tag{3.7}$$

Definice nám neříká nic o tom, *ke kterým maticím* inverzní matice existuje, ani *kolik* inverzních matic lze k dané matici nalézt. Uvedeme větu, která řeší otázky existence a jednoznačnosti inverzní matice.

Věta 3.12. *Nechť A je čtvercová matice řádu n nad číselným polem $\mathbb{P}$. K matici A existuje inverzní matice právě tehdy, když A je regulární. Inverzní matice k regulární matici A je určena jednoznačně.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že k matici A existuje inverzní matice B, tedy, že $AB = BA = E$. Pak $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B = 1$, odkud vyplývá, že $\det A \neq 0$, tedy, že A je regulární.

Obráceně, nechť A je regulární čtvercová matice. Existují tedy elementární matice $Q_1, \ldots, Q_k$, takové, že $A = Q_1 \ldots Q_k$. Označme Q_i^{-1} matici inverzní elementární úpravy k úpravě Q_i. Klademe

$$A^{-1} = Q_k^{-1} \ldots Q_1^{-1} .$$

Platí $AA^{-1} = Q_1 \ldots Q_k Q_k^{-1} \ldots Q_1^{-1} = E$ a podobně $A^{-1}A = E$. Podle definice je A^{-1} inverzní matice k matici A.

Zbývá dokázat jednoznačnost inverzní matice.

Nechť A je regulární matice, B čtvercová matice, pro niž platí $AB = BA = E$. K matici A existuje inverzní matice A^{-1} zkonstruovaná výše a platí

$$B = BE = BAA^{-1} = ABA^{-1} = EA^{-1} = A^{-1} .$$

Tím je důkaz ukončen. □

Inverzní matici k regulární matici A budeme označovat symbolem A^{-1}.

Uvedeme nyní základní vlastnosti inverzní matice.

Věta 3.13. (1) *Platí-li pro matice A, B vztah $AB = E$, pak také $BA = E$, obě matice jsou regulární, a $A = B^{-1}, B = A^{-1}$.*

(2) *Pro determinant inverzní matice k regulární matici A platí*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

(3) *Buď A regulární matice. Pak A^{-1} je regulární a platí*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(4) *Pro libovolné regulární matice A, B platí*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(5) *Je-li A regulární matice a B matice taková, že $AB = 0$, pak $B = 0$.*

(6) *Je-li A regulární matice a B matice taková, že $AB = A$ nebo $BA = A$, pak $B = E$.*

Důkaz. Dokážeme první tvrzení. Je-li $AB = E$, pak zřejmě $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1$, takže $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, což znamená, že A, B jsou regulární. Dále máme $BA = BEA = BABA$. Jelikož matice BA je regulární, existuje k ní matice inverzní. Vynásobíme-li tedy tuto rovnici maticí $(BA)^{-1}$ zleva, dostaneme $E = BA$. Z jednoznačnosti inverzní matice pak ihned vyplývá, že $B = A^{-1}$ a $A = B^{-1}$.

Tvrzení (2) a (3) vyplývají přímo z definice inverzní matice: Platí $AA^{-1} = E$, tedy také $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, odkud máme $\det A^{-1} = 1/\det A$. Jelikož $\det A \neq 0$, je také $\det A^{-1} \neq 0$. Určíme inverzní matici k matici A^{-1}: podle definice má být $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$, přičemž $(A^{-1})^{-1}$ je jediná matice, splňující tuto podmínku. Platí ovšem $A^{-1}A = E$, takže $(A^{-1})^{-1} = A$.[7]

Dokážeme tvrzení (4). Podle definice inverzní matice k matici AB platí $(AB)(AB)^{-1} = E$. Vynásobíme-li tuto rovnici postupně maticemi A^{-1}, B^{-1} zleva, dostaneme $B(AB)^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Poslední dvě tvrzení jsou evidentní: stačí uvedené rovnice násobit maticí A^{-1} zleva (resp. zprava dle kontextu). □

Označme A^{alg} matici, jejímiž prvky jsou algebraické doplňky prvků matice A, tedy podle již zavedeného označení, $A^{\mathrm{alg}} = (\mathcal{A}_{ij})$.

Věta 3.14. *Buď A regulární matice. Platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\mathrm{alg}})^T$$

Důkaz. Stačí ukázat, že $(A^{\mathrm{alg}})^T \cdot A = \det A \cdot E$ (což je diagonální matice, která má na diagonále čísla $\det A$).

Označme $(A^{\mathrm{alg}})^T = (b_{ij})$, $(A^{\mathrm{alg}})^T \cdot A = (c_{ij})$. Podle definice transponované matice a matice A^{alg} je

$$b_{ij} = \mathcal{A}_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

pro všechny hodnoty indexů i, j. Podle definince součinu matic nyní dostáváme

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{A}_{li} a_{lj}.$$

[7] Jiný důkaz: Vynásobíme-li rovnici $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$ maticí A zleva, dostaneme $(A^{-1})^{-1} = AE = A$.

Počítejme prvky matice $(A^{\mathrm{alg}})^T \cdot A$ stojící na diagonále: Pro (každé) pevné $i = j$ máme $c_{ii} = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{A}_{li} a_{li}$, což je rozvoj podle i-tého řádku matice A; aplikujeme-li Laplaceovu větu, dostaneme

$$c_{ii} = \det A\,, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ukážeme, že všechny ostatní prvky matice $(A^{\mathrm{alg}})^T \cdot A$ jsou rovny nule. Spočítáme tedy $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{A}_{li} a_{lj}$ pro $i \neq j$. Využijeme definici algebraického doplňku: pro libovolné pevné hodnoty indexů i, l platí

$$\mathcal{A}_{li} = (-1)^{l+i} \det A_{li} = (-1)^{l+i} \varepsilon^{k_1 \dots k_{l-1} k_{l+1} \dots k_n} a^1_{k_1} \dots a^{l-1}_{k_{l-1}} a^{l+1}_{k_{l+1}} \dots a^n_{k_n}\,,$$

kde $\{k_1, \dots, k_{l-1}, k_{l+1}, \dots, k_n\}$ je permutace množiny $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ (tedy neobsahující i). Pak

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^l_i a^l_j &= a^l_j (-1)^{l+i} \varepsilon^{k_1 \dots k_{l-1} k_{l+1} \dots k_n} a^1_{k_1} \dots a^{l-1}_{k_{l-1}} a^{l+1}_{k_{l+1}} \dots a^n_{k_n} \\
&= (-1)^{l+i} \varepsilon^{k_1 \dots k_{l-1} k_{l+1} \dots k_n} a^1_{k_1} \dots a^{l-1}_{k_{l-1}} a^l_j a^{l+1}_{k_{l+1}} \dots a^n_{k_n} \\
&= (-1)^{l+i+j} \varepsilon^{j k_1 \dots k_{l-1} k_{l+1} \dots k_n} a^1_{k_1} \dots a^{l-1}_{k_{l-1}} a^l_j a^{l+1}_{k_{l+1}} \dots a^n_{k_n} = 0,
\end{aligned}$$

neboť součet probíhá přes všechny prmutace množiny $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ *obsahující* j. Dosadíme-li tedy do výrazu pro c_{ij}, dostaneme pro $i \neq j$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{A}^l_i a^l_j = 0\,.$$

Celkově dostáváme

$$(A^{\mathrm{alg}})^T \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

tj.

$$\frac{1}{\det A} (A^{\mathrm{alg}})^T \cdot A = E\,.$$

Inverzní matice k matici A má tedy požadovaný tvar. □

Poznámka 3.15 (Metody výpočtu inverzní matice)**.** Na základě uvedených vět lze zformulovat praktické metody výpočtu inverzní matice k dané regulární matici.

• Víme, že matice A^{-1} je součinem elementárních matic, které obdržíme, když danou matici A převedeme *řádkovými* elementárními úpravami na matici jednotkovou. Přitom výsledná matice A^{-1} nezávisí na počtu těchto úprav, ani na jejich konkrétní volbě, tedy docílíme-li dvěma různými posloupnostmi řádkových elementárních úprav, aby $A \sim E$, pak obě tyto cesty poskytují stejnou matici A^{-1}. Při výpočtu inverzní matice pomocí Gaussovy eliminační metody tedy postupujeme takto: vedle dané matice A napíšeme jednotkovou matici E stejného řádu a řádkovými elementárními úpravami upravujeme současně obě matice s cílem převést matici A na matici jednotkovou. V okamžiku, kdy A přejde v E, přejde E v A^{-1}; tento postup zapisujeme ve tvaru

$$(A|E) \sim (Q_1 A | Q_1 E) \sim (Q_2 Q_1 A | Q_2 Q_1 E) \sim \dots \sim (E | A^{-1})\,.$$

Pokud tímto postupem dospějeme k matici $Q_1 \dots Q_k A$ ekvivalentní s A, která je diagonální a na diagonále má kromě jedniček alespoň jednu nulu, pak původní matice A byla singulární, tedy matice k ní inverzní neexistuje.

Inverzní matici lze obdržet analogickým postupem s využitím *pouze sloupcových* elementárnch úprav dané matice A.

• Další metodu výpočtu inverzní matice poskytuje věta 3.14: inverzní matici k A vypočteme dosazením do vzorce $A^{-1} = (1/\det A) \cdot (A^{\text{alg}})^T$. Tato metoda se z hlediska početní náročnosti využívá při „počítání na papíře“ zpravidla pouze pro matice řádu ≤ 4; všimněme si, že pro matice řádu 2 poskytuje výsledek okamžitě. Vhodná je také při počítání s maticemi, které obsahují parametry, nebo jejichž prvky jsou funkce, nebo při výpočtech pomocí počítače.

Příklad 3.16. Vypočteme inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úlohu vyřešíme metodou elementárních úprav i s použitím vzorce pro inverzní matici ve větě 3.14.

• Řešení metodou elementárních úprav:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 18 & 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

Hledaná inverzní matice je

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Provedeme zkoušku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Řešení podle vzorce z věty 3.14:

Spočítáme determinant zadané matice:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 - 8 - 4 - 8 - 4 = -27.$$

Spočítáme matici algebraických doplňků:

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \mathcal{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \mathcal{A}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$
$$\mathcal{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \mathcal{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \mathcal{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$
$$\mathcal{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad \mathcal{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad \mathcal{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Matice A^{alg} je symetrická, takže ${A^{\text{alg}}}^T = A^{\text{alg}}$. Inverzní matice k zadané matici má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrolní otázky a úkoly

• Definujte inverzní matici a dokažte její jednoznačnost.

• Ke kterým maticím existuje inverzní matice?

• Jestliže pro matici A platí $AA^T = E$, jak vypadá inverzní matice k matici A?

• Doplňte vzorce:

$$\begin{array}{rrrr} AA^{-1} = \qquad & (AB)^{-1} = \qquad & A^{-1} = \qquad & A^{\text{alg}} = \\ A^{-1}B^{-1} = \qquad & (A^T)^{-1} = \qquad & (A^{-1})^{-1} = \qquad & \det A^{-1} = \end{array}$$

• Je pravda, že inverzní matice k symetrické matici je symetrická matice a inverzní matice k antisymetrické matici je antisymetrická matice?

Cvičení

1. Vypočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Výpočet proveďte metodou elementárních úprav i pomocí matice algebraických doplňků. (U matic obsahujících parametry nezapomeňte na diskusi existence inverzní matice.)

2. Ověřte, že pro matici

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

platí $A^{-1} = A$. [8]

3. Řešte maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

[8] Matice po které platí $A = A^{-1}$, tj. $A^2 = E$ se nazývají *involutivní*.

4. Dokažte, že platí-li pro matici A vztah $AA^T = E$, pak je také $A^T A = E$.
5. Určete determinant matice algebraických doplňků A^{alg}.

   [Návod: $(A^{\mathrm{alg}})^T = (\det A) \cdot A^{-1}$, takže $\det A^{\mathrm{alg}} = \det (A^{\mathrm{alg}})^T = (\det A)^n \det A^{-1} = (\det A)^{n-1} \det E = (\det A)^{n-1}$.]

6. Napište si program na výpočet inverzní matice založený na použití vzorce $A^{-1} = (1/\det A) \cdot (A^{\mathrm{alg}})^T$ a otestujte ho na příkladech.

3.4 Metoda vroubení pro výpočet hodnosti matice

Závěrem této kapitoly uvedeme větu, která nám poskytne další metodu pro výpočet hodnosti matice.

Věta 3.17. *Hodnost nenulové matice typu $m \times n$ je rovna řádu maximálního nenulového minoru matice.*

Důkaz. Nenulová matice A typu $m \times n$ má aspoň jeden nenulový minor. Nechť tedy M je submatice matice A řádu k taková, že $\det M \neq 0$, a že všechny minory řádu $k+1$ jsou rovny nule. Jelikož hodnost matice A se nezmění při vzájemné výměně řádků a sloupců, lze předpokládat, že submatice M je tvořena prvními k řádky a prvními k sloupci matice A. Jelikož $\det M \neq 0$, je $\operatorname{rank} M = k$, odkud vyplývá, že prvních k řádků matice A je lineárně nezávislých, tj. $\operatorname{rank} A \geq k$. Nyní stačí dokázat, že libovolný i-tý řádek matice A, kde $i > k$, je lineární kombinací jejích prvních k řádků.

Zvolme $i > k$ pevně. Označme D_{ij} submatici matice A, která vznikne „ovroubením“ matice M i-tým řádkem a libovolným j-tým sloupcem matice A, $j > k$, tedy submatici, která vznikne z A vypuštěním všech posledních $n-k$ řádků a sloupců s výjimkou i-tého řádku a j-tého sloupce. Jelikož D_{ij} je řádu $k+1$, je podle předpokladu $\det D_{ij} = 0$, tj. matice D_{ij} je singulární. Z konstrukce této submatice ovšem vyplývá, že její poslední řádek (což je řádek tvaru $(a_{i1}, \ldots, a_{ik}, a_{ij})$) musí být lineární kombinací jejích prvních k řádků. Označíme-li koeficienty této lineární kombinace po řadě $b_1^{(j)}, b_2^{(j)} \ldots, b_k^{(j)}$, máme

$$
\begin{aligned}
a_{i1} &= b_1^{(j)} a_{11} + b_2^{(j)} a_{21} + \cdots + b_k^{(j)} a_{k1}\,,\\
&\vdots\\
a_{ik} &= b_1^{(j)} a_{1k} + b_2^{(j)} a_{2k} + \cdots + b_k^{(j)} a_{kk}\,,\\
a_{ij} &= b_1^{(j)} a_{1j} + b_2^{(j)} a_{2j} + \cdots + b_k^{(j)} a_{kj}\,.
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že tyto vztahy platí pro *každé* $j > k$, máme také

$$
\begin{aligned}
a_{i1} &= b_1^{(p)} a_{11} + b_2^{(p)} a_{21} + \cdots + b_k^{(p)} a_{k1}\,,\\
&\vdots\\
a_{ik} &= b_1^{(p)} a_{1k} + b_2^{(p)} a_{2k} + \cdots + b_k^{(p)} a_{kk}\,,\\
a_{ip} &= b_1^{(p)} a_{1p} + b_2^{(p)} a_{2p} + \cdots + b_k^{(p)} a_{kp}
\end{aligned}
$$

pro všechna $p > k$, $p \neq j$. Odtud

$$
\begin{aligned}
&(b_1^{(j)} - b_1^{(p)}) a_{11} + (b_2^{(j)} - b_2^{(p)}) a_{21} + \cdots + (b_k^{(j)} - b_k^{(p)}) a_{k1} = 0,\\
&\quad\vdots\\
&(b_1^{(j)} - b_1^{(p)}) a_{1k} + (b_2^{(j)} - b_2^{(p)}) a_{2k} + \cdots + (b_k^{(j)} - b_k^{(p)}) a_{kk} = 0.
\end{aligned}
$$

Z podmínky, že řádky $(a_{11},\dots,a_{1k}),(a_{21},\dots,a_{2k}),\dots,(a_{k1},\dots,a_{kk})$ jsou lineárně nezávislé ovšem vyplývá, že pro všechna $p>k$, $p\neq j$,

$$b_1^{(p)}=b_1^{(j)},\quad \dots,\quad b_k^{(p)}=b_k^{(j)}.$$

Označíme-li $b_l^{(p)}=b_l$, $p>k$, $l=1,\dots,k$, máme celkově

$$a_{il}=b_1a_{1l}+b_2a_{2l}+\cdots+b_ka_{kl}$$

pro *všechna* $l=1,\dots,k,\dots n$, což znamená, že i-tý řádek matice A je lineární kombinací jejích prvních k řádků.

Z libovolnosti indexu $i>k$ vyplývá, že rank $A=k$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 3.18 (Důsledek)**.** *Nechť v matici A existuje nenulový minor M řádu k a všechny minory řádu $k+1$ vzniklé ovroubením minoru M postupně všemi zbývajícími řádky a všemi zbývajícími sloupci matice A jsou rovny* 0*. Pak* rank $A=k$.

Poznámka 3.19. Uvedená věta a její důsledek nám poskytují další *metodu výpočtu hodnosti matice*, která se nazývá *metoda vroubení*. Při výpočtu hodnosti nenulové matice touto metodou lze tedy postupovat takto: Nalezneme-li nenulový minor M řádu k, počítáme postupně minory řádu $k+1$, které vzniknou ovroubením minoru M. Zjistíme-li, že některý z nich je nenulový, pokračujeme analogicky dále. Jestliže všechny minory řádu $k+1$, které vzniknou ovroubením minoru M jsou nulové, je rank $A=k$.

Je zřejmé, že výpočet hodnosti matice metodou vroubení je vhodné „ručně“ provádět zpravidla pouze pro matice s malým počtem řádků a sloupců. Na druhé straně, tato metoda má charakter algoritmu, takže je vhodná pro naprogramování.

Příklad 3.20. Metodou vroubení vypočteme hodnost matice

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}.$$

Na první pohled je zřejmé, že hodnost této matice je větší než 1. Počítejme postupně minory řádu 2, které „ovrubují“ minor řádu 1 v levém horním rohu matice: Máme

$$\begin{vmatrix}2&-1\\4&-2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

takže nemusíme dále pokračovat a můžeme přejít k minorům třetího řádu, které „ovrubují“ minor řádu 2 v levém horním rohu:

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&-2&5\\2&-1&1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}2&-1&-2\\4&-2&1\\2&-1&8\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}2&-1&4\\4&-2&7\\2&-1&2\end{vmatrix}=0.$$

Jelikož jsou všechny tyto minory nulové, platí rank $A=2$.

Cvičení

1. Vypočtěte hodnost uvedených matic metodou vroubení i metodou elementárních úprav:

$$\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{pmatrix}.$$

2. Naprogramujte si výpočet hodnosti matice metodou vroubení a svůj program otestujte na příkladech.

4 Systémy lineárních rovnic

Studijní cíle: Na základní a střední škole jsme se naučili řešit lineární rovnice o jedné neznámé x tvaru $ax = b$, ale také systémy lineárních rovnic o dvou, případně třech neznámých, tj. rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2, \end{aligned}$$

případně

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned}$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{33}, b_1, \ldots, b_3$ jsou zadaná reálná čísla. Jistě jste si také všimli, že rovnice $ax = b, a \neq 0$ má jediné řešení $x = -b/a$, zatímco pro $a = 0, b \neq 0$ nemá řešení a pro $a = b = 0$ jsou řešením všechna reálná čísla. Podobně systém rovnic může mít jediné řešení nebo nekonečně mnoho řešení, nebo řešení nemusí vůbec existovat. Příkladem může být systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= 4, \end{aligned}$$

který má jediné řešení $(x, y) = (3, -1)$, systém

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + y - z &= 0, \end{aligned}$$

který má nekonečně mnoho řešení tvaru $(x, y, z) = (2t, 1 - 2t, 1), t \in \mathbb{R}$, nebo systém

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + 2y &= 2, \end{aligned}$$

který nemá žádné řešení. Přitom, čím je rovnic a neznámých více, tím je zpravidla složitější poznat, zda a kolik řešení existuje. Je tedy třeba zabývat se otázkou, čím se v obecnosti liší uvedené typy systémů, neboli jaká obecná kritéria určují existenci, případně počet řešení. Zároveň je také možno si všimnout, že například systémy rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= 4, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - y &= 13 \\ x - 5y &= 8 \end{aligned}$$

mají stejné řešení. Vzniká tedy problém, jak je charakterizována množina systémů lineárních rovnic, které mají předepsané řešení; jinak řečeno, jak poznat, zda dané dva různé systémy lineárních rovnic mají stejná řešení, aniž bychom museli tato řešení nejprve nalézt.
Systém lineárních rovnic může být tvořen libovolným (konečným) počtem rovnic a rovněž počet neznámých v něm vystupujících může být libovolný. V této kapitole se budeme zabývat obecnými systémy lineárních rovnic, tedy systémy o k rovnicích pro n neznámých. Budeme studovat, za jakých podmínek existuje řešení, i kolik řešení takový systém rovnic může mít. Vyšetříme rovněž strukturu množiny všech řešení systému lineárních rovnic, což nám umožní vytvářet další řešení daných rovnic pomocí již známých řešení. Uvedeme rovněž obecný postup hledání řešení libovolného systému lineárních rovnic, který je založen na Gaussově eliminační metodě. Tento postup je přehledný a vede snadno k cíli pro libovolný systém rovnic o libovolném počtu neznámých.

Klíčová slova: systém lineárních rovnic, matice systému, rozšířená matice systému, řešení, homogenní rovnice, nehomogenní rovnice, obecné řešení, partikulární řešení, Frobeniova věta, Cramerovo pravidlo, fundamentální systém řešení, homogenizovaný systém.

Potřebný čas: 280 minut.

4.1 Frobeniova věta

Definice 4.1. Systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ jsou čísla z pole $\mathbb{P}$, se nazývá *systém m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $a_{11}, \dots, a_{mn}$*, nad polem $\mathbb{P}$.

Uvedený systém lineárních rovnic zapisujeme stručně takto:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Zavedeme-li matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

můžeme systém rovnic (4.1) psát v *maticovém tvaru*

$$Ax = b.$$

Matice A se nazývá *matice systému* (2.1). Připíšeme-li k n sloupcům matice A ještě sloupec b, dostaneme matici typu $m \times (n+1)$, kterou nazýváme *rozšířenou maticí* systému (4.1) a zapisujeme ve tvaru

$$B = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že

$$\operatorname{rank} B = \begin{cases} \operatorname{rank} A, & \text{je-li sloupec } b \text{ lineární kombinací sloupců matice } A, \\ \operatorname{rank} A + 1 & \text{není-li sloupec } b \text{ lineární kombinací sloupců matice } A. \end{cases}$$

Řádky rozšířené matice jsou v bijektivní korespondenci s jednotlivými rovnicemi systému, je tedy zřejmé, jak bude definována lineární nezávislost (závislost) rovnic. Je také okamžitě vidět, že *v systému m lineárních rovnic je k rovnic lineárně nezávislých, právě tehdy, když*

$$\operatorname{rank}(A|b) = k.$$

Dále je zřejmý význam *řádkových ekvivalentních úprav* rozšířené matice $(A|b)$: daný systém rovnic se nahradí systémem, jehož rovnice jsou *lineárními kombinacemi* rovnic původních.

V maticovém zápisu je systém lineárních rovnic *maticovou rovnicí*. Proto, budeme-li mít na mysli maticový zápis systému lineárních rovnic, budeme někdy o systému $Ax = b$ hovořit jako o *rovnici*, o sloupcové matici x budeme hovořit jako o *neznámé* a o sloupcové matici b jako o *pravé straně* uvedené rovnice.

Definice 4.2. Systém lineárních rovnic se nazývá *nehomogenní*, jestliže $b \neq 0$, *homogenní*, je-li $b = 0$.

Řešením systému (4.1) rozumíme uspořádanou množinu čísel $x_0 = \{x_{01}, \ldots, x_{0n}\}$, takových, že po jejich dosazení do rovnic na místo neznámých jsou splněny všechny rovnice systému. Při použití maticového zápisu je řešením systému rovnic $Ax = b$ sloupcová matice x_0, pro kterou $Ax_0 = b$.

Na příkladech jme viděli, že rozdílné systémy lineárních rovnic mohou mít stejnou množinu řešení. Tutu skutečnost dále s výhodou využijeme při studiu vlastností rovnic a jejich řešení.

Definice 4.3. Uvažujme dva systémy lineárních rovnic $Ax = b$, $A'x = b'$. Řekneme, že tyto systémy jsou *ekvivalentní* a píšeme $Ax = b \sim A'x = b'$, jestliže množina všech řešení systému $Ax = b$ splývá s množinou všech řešení systému $A'x = b'$.

Uvedená definice je korektní, neboť relace $\sim$ je evidentně reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Všimněte si, že ekvivalentní systémy lineárních rovnic musí mít stejný počet neznámých $x_1, \ldots, x_n$, mohou se však lišit počtem rovnic.

Věta 4.4. *Ekvivalentními řádkovými úpravami rozšířené matice* $(A|b)$ *se nemění množina řešení systému lineárních rovnic* $Ax = b$.

Důkaz. Ukážeme, že jestliže matice $(A'|b')$ vznikla konečným počtem řádkových elementárních úprav z matice $(A|b)$, pak systémy $Ax = b$ a $A'x = b'$ jsou ekvivalentní.

Nechť tedy $Ax = b$, $A'x = b'$ jsou dva systémy rovnic takové, že matice $(A'|b')$ vznikne z matice $(A|b)$ konečným počtem řádkových elementárních úprav. Znamená to, že existuje regulární matice U taková, že $(A'|b') = U(A|b)$. Jelikož $U(A|b) = (UA|Ub)$, je systém rovnic $A'x = b'$ totožný se systémem $UAx = Ub$. Matice U je ovšem regulární, proto také systém rovnic $Ax = b$ je totožný se systémem $U^{-1}A'x = U^{-1}b'$. Odtud vyplývá, že x je řešením soustavy $A'x = b'$ právě tehdy, když je řešením soustavy $Ax = b$. Tedy $Ax = b \sim A'x = b'$. $\square$

Uvedeme větu, která poskytuje nutné a postačující podmínky pro existenci řešení systému lineárních rovnic. Svým významem se řadí k nejdůležitějším matematickým tvrzením.

Věta 4.5. (Frobeniova věta o existenci řešení systémů lineárních algebraických rovnic). *Systém m lineárních rovnic o n neznámých $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice systému A je rovna hodnosti matice rozšířené* $(A|b)$.

Důkaz. Nechť x_0 je řešení rovnice $Ax = b$, tedy nechť

$$\begin{aligned} a_{11}x_{01} + a_{12}x_{02} + \cdots + a_{1n}x_{0n} &= b_1 \\ a_{21}x_{01} + a_{22}x_{02} + \cdots + a_{2n}x_{0n} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_{01} + a_{m2}x_{02} + \cdots + a_{mn}x_{0n} &= b_m. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$x_{01}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_{02}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_{0n}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

což znamená, že sloupec b v matici $(A|b)$ je lineární kombinací sloupců matice A. Odtud $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A$.

Obráceně, nechť $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A = k$. Převedeme-li matici $(A|b)$ na schodovitý tvar řádkovými elementárními úpravami, obdržíme soustavu rovnic $A'x = b'$, ekvivalentní se soustavou $Ax = b$, která (vypustíme-li posledních $m - k$ rovnic tvaru 0 = 0) má tvar

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a'_{11}x_1 & + & \cdots & + & a'_{1,k-1}x_{k-1} & + & a'_{1k}x_k & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & a'_{k-1,k-1}x_{k-1} & + & a'_{k-1,k}x_k & + & \cdots & + & a'_{k-1,n}x_n & = & b'_{k-1} \\
 & & & & & & a'_{kk}x_k & + & \cdots & + & a'_{kn}x_n & = & b'_k.
\end{array}$$

V poslední rovnici je alespoň jeden z koeficientů $a'_{kk}, \dots, a'_{kn}$ nenulový; nechť $a'_{kp_1} \neq 0$ (tj. $p_1 \geq k$). Pak lze z této rovnice vyjádřit x_{p_1} pomocí $x_k, \dots, x_{p_1-1}, x_{p_1+1}, \dots, x_n$:

$$x_{p_1} = \frac{1}{a'_{kp_1}}(b'_k - a'_{kk}x_k - \cdots - a'_{kp_1-1}x_{p_1-1} - a'_{kp_1+1}x_{p_1+1} - a'_{kn}x_n).$$

V předposlední rovnici je alespoň jeden z koeficientů $a'_{k-1,k-1}, \dots, a'_{k-1,n}$ nenulový. Jelikož matice A' je ve schodovitém tvaru, máme $a'_{k-1,p_2} \neq 0$, kde $p_2 < p_1$. Můžeme tedy vyjádřit x_{p_2} pomocí $x_{k-1}, \dots, x_{p_2-1}, x_{p_2+1}, \dots, x_n$, a dosadíme-li za x_{p_1}, získáme x_{p_2} vyjádřené pomocí $x_{k-1}, \dots, x_{p_2-1}, x_{p_2+1}, \dots, x_{p_1-1}, x_{p_1+1}, \dots, x_n$. Takto lze postupovat až k první rovnici, z níž vyjádříme x_{p_k}, kde $p_k < p_{k-1} < \cdots < p_1$, pomocí $x_1, \dots, x_{p_k-1}, x_{p_k+1}, \dots, x_n$. Dosadíme-li za $x_{p_{k-1}}, x_{p_{k-2}}, \dots, x_{p_1}$, dostaneme x_{p_k} vyjádřené pomocí všech x_i s výjimkou $x_{p_1}, \dots, x_{p_{k-1}}$.

Celkově tak obdržíme hodnoty k neznámých $x_{p_k}, \dots, x_{p_2}, x_{p_1}$, vyjádřené pomocí neznámých x_i pro zbývající hodnoty indexu i z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Tato x_i, která lze volit zcela libovolně, tedy hrají roli *parametrů* - označme je po řadě $t_1, \dots, t_{n-k}$. Je zřejmé, že zvolíme-li za $t_1, \dots, t_{n-k}$ nějaká čísla z pole $\mathbb{P}$, a dosadíme-li tyto hodnoty do získaných výrazů pro $x_{p_k}, \dots, x_{p_2}, x_{p_1}$, dostaneme řešení systému $Ax = b$, tj. každá konkrétní volba parametrů dává jedno řešení uvažovaných rovnic. $\square$

Všimněte si, že pro existenci a počet řešení systému lineárních rovnic o n neznámých není podstatný počet rovnic, ale hodnost příslušných matic (počet *lineárně nezávislých* rovnic a jejich kompatibilita).

Definice 4.6. Řešení systému lineárních rovnic $Ax = b$ zapsané pomocí $n - k$ parametrů $t_1, \dots, t_{n-k}$, kde n je počet neznámých, k je počet lineárně nezávislých rovnic systému (tedy $k = \operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A$), a $(t_1, \dots, t_{n-k})$ probíhá množinu $\mathbb{P}^{n-k}$, nazýváme *obecné řešení*.

Obecné řešení x závislé na parametrech $t_1, \dots, t_{n-k}$ budeme označovat symbolem $x(t_1, \dots, t_{n-k})$. Obecné řešení představuje *množinu* řešení: zvolíme-li pevně hodnoty parametrů, dostaneme jedno z řešení daného systému rovnic; toto řešení se nazývá *partikulární řešení*. Budeme je zapisovat ve tvaru $x_P = x(c_1, \dots, c_{n-k})$, kde $c_1, \dots, c_{n-k}$ jsou pevně zvolená čísla z $\mathbb{P}$.

Množina řešení reprezentovaná obecným řešením je zřejmě *jednoprvková* právě tehdy, když $n - k = 0$, tj. když počet neznámých se rovná počtu lineárně nezávislých rovnic systému. V ostatních případech obecné řešení představuje nekonečně mnoho řešení.

Důkaz Frobeniovy věty poskytuje návod, jak najít (nějaké) obecné řešení systému lineárních rovnic. Zároveň však navozuje několik otázek:

- Tvar obecného řešení závisí na postupu, jakým bylo obecné řešení získáno. V jakém vztahu jsou množiny M', M'' řešení daného systému lineárních rovnic, které odpovídají dvěma obecným řešením?

- Existují ještě nějaká další řešení systému lineárních rovnic, která nejsou „zachycena“ obecným řešením?

- Jak najít *všechna* řešení systému lineárních rovnic?

Uvedeme nyní tvrzení, které nám poskytne odpověď na všechny tyto otázky.

Věta 4.7. *Buď $Ax = b$ systém lineárních rovnic o n neznámých, nechť* $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A = k$. *Nechť $x(t_1, \dots, t_{n-k})$ je obecné řešení tohoto systému lineárních rovnic. Pak pro každé x_0 takové, že $Ax_0 = b$, existují čísla $c_1, \dots, c_{n-k} \in \mathbb{P}$ taková, že pro $t_1 = c_1, \dots, t_{n-k} = c_{n-k}$ platí $x_0 = x(c_1, \dots, c_{n-k})$.*

Důkaz. Buď $x_0 = \{x_{01}, \dots, x_{0n}\}$ libovolné řešení systému lineárních rovnic $Ax = b$. Pak x_0 je také řešením systému $A'x = b'$, kde $(A'|b')$ je schodovitý tvar matice $(A|b)$. Najdeme obecné řešení $x(t_1, \dots, t_{n-k})$ daného systému lineárních rovnic: je to uspořádaná množina čísel $\{x_1, \dots, x_n\}$, kde pro jistá $j_1, \dots j_{n-k} = 1, 2, \dots, n$ je $x_{j_1} = t_1, \dots, x_{j_{n-k}} = t_{n-k}$, a taková, že pro všechna $t_1, \dots, t_{n-k} \in \mathbb{P}$ je

$$\begin{array}{ccccccc}
a'_{11}x_1 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 & & & & & \vdots & \\
a'_{k-1,k-1}x_{k-1} & + & \cdots & + & a'_{k-1,n}x_n & = & b'_{k-1} \\
a'_{kk}x_k & + & \cdots & + & a'_{kn}x_n & = & b'_k;
\end{array}$$

přitom z každé rovnice se vyjadřuje *právě jedno* x_i, $i \neq j_1, \dots j_{n-k}$, pomocí uvažovaných parametrů. Položme $t_1 = x_{0j_1}, \dots, t_{n-k} = x_{0j_{n-k}}$, a uvažujme partikulární řešení $x_P = x(x_{0j_1}, \dots, x_{0j_{n-k}})$. Pak pro každé $i \neq j_1, \dots j_{n-k}$ splňuje x_{Pi} partikulárního řešení x_P stejné rovnice jako x_{0i}, $i \neq j_1, \dots, j_{n-k}$, což znamená, že $x_0 = x_P(x_{0j_1}, \dots, x_{0j_{n-k}})$. Tím je důkaz ukončen. $\square$

Věta 4.8 (Důsledek)**.** *Buď $Ax = b$ systém lineárních rovnic, $x(t_1, \dots, t_{n-k})$ jeho obecné řešení. Označme M' množinu řešení určenou tímto obecným řešením a M množinu všech řešení daného systému lineárních rovnic. Pak platí $M' = M$.*

Poznámka 4.9. Důkaz Frobeniovy věty je konstruktivní, to znamená, že je-li zajištěna existence řešení systému lineárních rovnic, poskytuje také *metodu*, jak nalézt jeho obecné řešení. Základem tohoto postupu je Gaussova eliminační metoda, jíž převedeme rozšířenou matici systému na matici ve schodovitém tvaru; z tohoto ekvivalentního systému lze už snadno vhodnou volbou parametrů získat obecné řešení. Podle výše uvedené Věty reprezentuje toto obecné řešení *všechna* řešení uvažovaného systému lineárních rovnic.

Příklad 4.10. Najdeme obecné řešení systému nehomogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\
4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\
2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Napíšeme rozšířenou matici systému a převedeme ji řádkovými ekvivalentními úpravami na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 22 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice systému je stejná jako hodnost rozšířené matice, systém je tedy řešitelný; obecné řešení závisí na $4 - 2 = 2$ parametrech.

Obecné řešení najdeme ze schodovitého tvaru rozšířené matice: zadaný systém lineárních rovnic je ekvivalentní systému

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\
8x_3 + 11x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Zvolíme $x_4 = t$, pak $x_3 = -\frac{11}{8}t$; dosadíme do první rovnice a zvolíme $x_2 = s$, dostaneme

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 3s + \frac{55}{8}t - 7t) = \frac{1}{2}(3s - \frac{1}{8}t + 1).$$

Nalezli jsme obecné řešení $x(s,t)$ ve tvaru

$$x_1 = \frac{1}{2}(3s - \frac{1}{8}t + 1), \quad x_2 = s, \quad x_3 = -\frac{11}{8}t, \quad x_4 = t, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

tedy množina všech řešení daného systému lineárních rovnic je

$$M = \left\{ x = (\frac{3}{2}s - \frac{1}{16}t + \frac{1}{2},\ s,\ -\frac{11}{8}t,\ t) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Zvolíme-li konkrétní čísla za parametry s, t, dostaneme jedno partikuární řešení daných rovnic, tj. jeden prvek množiny M. Například pro $t = 0, s = 0$ je partikulárním řešením uspořádaná čtveřice $x = (1/2, 0, 0, 0)$, pro $t = 0, s = 1$ máme $x = (2, 1, 0, 0)$, pro $t = 8, s = 2$ dostáváme $x = (3, 2, -11, 8)$, atp.

Příklad 4.11. Budeme řešit systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Rozšířená matice je

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -46 & 22 & 38 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že rovnice nejsou kompatibilní: Hodnost matice systému je 2, rozšířená matice má hodnost 3, takže systém nemá žádné řešení (množina řešení je prázdná).

4.2 Cramerovské systémy

Systém lineárních rovnic $Ax = b$ se nazývá *cramerovský*, jestliže A je čtvercová regulární matice. Tedy cramerovský systém má stejný počet rovnic jako neznámých, přičemž tyto rovnice jsou kompatibilní a lineárně nezávislé. To ovšem znamená, že $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A$, a tedy podle Frobeniovy věty má každý cramerovský systém lineárních rovnic řešení. Navíc je zřejmé, že obecné řešení cramerovského systému rovnic je tvořeno jediným řešením: *každý cramerovský systém lineárních rovnic má jediné řešení.*

Všimněme si, cramerovský systém *homogenních* rovnic má jediné a to *nulové* řešení.

Nechť $Ax = b$ je cramerovský systém lineárních rovnic. Pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ označme A_i matici, která má sloupce $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ stejné jako matice A a i-tý sloupec je tvořen sloupcem b; tedy

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Věta 4.12 (Cramerovo pravidlo)**.** *Buď $Ax = b$ cramerovský systém lineárních rovnic. Pak jeho řešení má tvar $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, kde*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad 1 \le i \le n\,. \tag{4.2}$$

Důkaz. Je-li systém $Ax = b$ cramerovský, pak existuje k matici A (jednoznačně určená) inverzní matice A^{-1}. Tedy maticová rovnice $Ax = b$ má právě jedno řešení

$$x = A^{-1}b.$$

Vyjádříme-li tuto rovnost pomocí prvků příslušných matic, dostaneme vzorec (4.2), který jsme měli dokázat. Ověříme to:

Podle vzorce pro inverzní matici máme

$$x = \frac{1}{\det A}(A^{\mathrm{alg}})^T \cdot b,$$

kde A^{alg} je matice tvořená algebraickými doplňky k prvkům matice A. Označme $x = (x_i)$, $A = (a_{ij})$, $A^{\mathrm{alg}} = (\mathcal{A}_{ij})$, $A^{-1} = (c_{ij})$. Jelikož

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A}\mathcal{A}_{ji},$$

dostáváme

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_j = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}_{ji}b_j = \frac{1}{\det A}\det A_i,$$

neboť $\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}_{ji}b^j$ je Laplaceův rozvoj matice A_i podle jejího i-tého sloupce, tedy $\det A_i$. □

Poznámka 4.13. Cramerovský systém rovnic můžeme řešit buď Gaussovou eliminační metodou, nebo pomocí Cramerova pravidla. Cramerovo pravidlo přitom s výhodou aplikujeme zvláště v těch případech, když chceme výpočet *algoritmizovat*, nebo když je třeba řešit systém lineárních rovnic, jehož koeficienty či pravé strany závisí na *parametrech*, takže výpočet determinantů je snadnější, než aplikace Gaussovy eliminační metody.

Příklad 4.14. Cramerovým pravidlem vyřešíme systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4\\
4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6\\
8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12\\
3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6.
\end{aligned}$$

Nejprve ověříme, že rovnice jsou linárně nezávislé, a tedy že Cramerovo pravidlo lze použít:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -1 & 2\\ 8 & 5 & -3 & 4\\ 3 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 8 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 0\\ 8 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Nyní spočítáme determinanty matic A_1, A_2, A_3, A_4:

$$\det A_1 = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1\\ 6 & 3 & -1 & 2\\ 12 & 5 & -3 & 4\\ 6 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = 2,$$

$$\det A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1\\ 4 & 6 & -1 & 2\\ 8 & 12 & -3 & 4\\ 3 & 6 & -2 & 2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = 2,$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$\det A_4 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Odtud dostaneme, že dané rovnice mají jediné řešení

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 1, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 1, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = -1, \quad x_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = -1.$$

Úkol. Naprogramujte si Cramerovo pravidlo.

Kontrolní otázky a úkoly

• Definujte systém m lineárních rovnic o n neznámých, matici systému, rozšířenou matici systému, řešení, homogenní systém, nehomogenní systém. Co je maticový zápis systému lineárních rovnic?

• Definujte pojem „ekvivalentní systémy lineárních rovnic“.

• Jsou-li dány dva systémy lineárních rovnic, jak poznáte, zda jsou ekvivalentní?

• Může být homogenní systém lineárních rovnic ekvivalentní s nehomogenním?

• Může mít nehomogenní systém lineárních rovnic nulové řešení?

• Kdy má homogenní systém rovnic právě jedno řešení?

• Kdy má homogenní systém lineárních rovnic i nenulové řešení?

• Může se stát, že homogenní systém linárních rovnic nemá žádné řešení?

• Kdy má nehomogenní systém lineárních rovnic právě jedno řešení? Kdy má více než jedno řešení? Kdy nemá řešení?

• Zjistěte, zda pro homogenní systémy lineárních rovnic platí:

– množina řešení obsahuje s každým řešením x i řešení $-x$;

– jsou-li x_0, x_0' dvě řešení, pak $x_0 + x_0'$ je také řešení;

– jsou-li x_0, x_0' dvě řešení, pak $x_0 - x_0'$ je také řešení;

– je-li x řešení, pak také cx pro libovolné $c \in \mathbb{P}$ je řešení.

• Zjistěte, zda některá z výše uvedených tvrzení platí pro nehomogenní systémy lineárních rovnic.

• Je-li $Ax = b$ systém nehomogenních lineárních rovnic a jsou-li x_0, x_0' dvě jeho řešení, co platí pro $x_0 - x_0'$?

• Co je to obecné řešení systému lineárních rovnic, jak se najde a jaký je jeho význam? Čím je určen počet parametrů v obecném řešení? Co je to partikulární řešení a jak se najde?

• Vyslovte Frobeniovu větu.

• Víte, že systém lineárních rovnic má obecné řešení

$$x_1 = s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = -1 - 8s + 4t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1 + 2s - t.$$

– Zjistěte, zda $x = \{1, 2, -1, 0, 1\}$ je partikulární řešení těchto rovnic.

– Kolik nezávislých rovnic a o kolika neznámých má uvažovaný systém rovnic?

– Je uvažovaný systém lineárních rovnic homogenní nebo nehomogenní?

– Napište, alespoň jeden z ekvivalentních systémů linárních rovnic, které mají uvedené obecné řešení.

4.3 Homogenní systémy lineárních rovnic

Nyní se budeme podrobně zabývat homogenními systémy lineárních rovnic, tj. rovnicemi tvaru

$$Ax = 0.$$

Shrneme si nejprve vlastnosti těchto rovnic, které už známe, neboť plynou bezprostředně z Frobeniovy věty.

Věta 4.15. (Důsledky Frobeniovy věty.)

(1) *Každý homogenní systém lineárních rovnic je řešitelný.*

(2) *Množina řešení každého homogenního systému lineárních rovnic obsahuje nulové řešení.*

(3) *Homogenní systém n lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení právě tehdy, když matice systému je regulární.*

(4) *Homogenní systém n lineárních rovnic o n neznámých $Ax = 0$ má nenulové řešení právě tehdy, když* $\det A = 0$.

(5) *Má-li homogenní systém lineárních rovnic méně rovnic než neznámých, nutně existuje nenulové řešení.*

Nyní budeme studovat, *jaké vlastnosti má množina všech řešení homogenního systému lineárních rovnic*.

Snadno zjistíme, že platí následující tvrzení:

Věta 4.16. (Vlastnosti množiny řešení homogenních lineárních rovnic.)

(1) *Součet libovolných dvou řešení systému $Ax = 0$ je řešením tohoto systému rovnic.*

(2) *Pro každé $c \in \mathbb{P}$ je c-násobek řešení systému $Ax = 0$ řešením tohoto systému rovnic.*

(3) *Libovolná lineární kombinace řešení systému $Ax = 0$ je řešením tohoto systému rovnic.*

Důkaz. (1) Nechť x_0, x_0' jsou řešení systému lineárních rovnic $Ax = b$, tj. nechť

$$Ax_0 = 0, \quad Ax_0' = 0.$$

Pak $A(x_0 + x_0') = Ax_0 + Ax_0' = 0 + 0 = 0$, tedy $x_0 + x_0'$ je řešením systému $Ax = 0$.

(2) Je-li x_0 řešením systému $Ax = 0$, pak pro každé $c \in \mathbb{P}$ je také $A(cx_0) = c(Ax_0) = c \cdot 0 = 0$.

(3) Jde o jednoduchý důsledek předchozích dvou tvrzení. □

Kontrolní úkol.

• Projděte si znovu důkaz Frobeniovy věty a konstrukci obecného řešení pro případ homogenního systému lineárních rovnic. Všimněte si, že pro obecné řešení $x = x(t_1, \dots, t_{n-k}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ je každé x_i *lineární kombinací parametrů* $t_1, \dots, t_{n-k}$ (přitom $n-k$ z těchto x_i jsou přímo rovna parametrům: pro jisté indexy je $x_{i_1} = t_1, \dots, x_{i_{n-k}} = t_{n-k}$) .

Řešení systému lineárních rovnic o n-neznámých reprezentujeme jako sloupcové matice o n prvcích, pro které již máme zavedeny pojmy lineární závislosti a lineární nezávislosti. Podle této definice jsou řešení systému lineárních rovnic *lineárně závislá*, jestliže alespoň jedno z nich lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace ostatních. Znamená to, že matice, sestavená z těchto r sloupců, má hodnost menší než r. Odtud také vyplývá, že libovolných r řešení systému lineárních rovnic o n neznámých, kde $r > n$, je lineárně závislých. Podobně systém r řešení lineárních rovnic je *lineárně nezávislý*, jestliže matice, sestavená z těchto r sloupců, má hodnost r. Opět je zřejmé, že nutnou podmínkou lineární nezávislosti je podmínka $r \leq n$.

Nechť nyní $Ax = 0$ je homogenní systém lineárních rovnic o n neznámých, rank $A = k < n$. Nechť $x(t_1, \dots, t_{n-k})$ je *obecné řešení* tohoto systému rovnic. Položíme-li $t_1 = 1, t_2 = 0, \dots, t_{n-k} = 0$, dostaneme partikulární řešení $e_1 = x(1, 0, \dots, 0)$; podobně položíme-li $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 0, \dots, t_{n-k} = 0$, obdržíme další partikulární řešení $e_2 = x(0, 1, 0, \dots, 0)$. Postupně tímto způsobem můžeme získat $n-k$ partikulárních řešení $e_1, \dots, e_{n-k}$ daného systému lineárních rovnic, tvaru $e_l = x(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$, kde 1 stojí na l-té pozici, $1 \leq l \leq n-k$. Přímo z konstrukce těchto partikulárních řešení je zřejmé, že $e_1, \dots, e_{n-k}$ jsou lineárně nezávislá, a že obecné řešení $x(t_1, \dots, t_{n-k})$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x(t_1, \dots, t_{n-k}) = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_{n-k} e_{n-k}.$$

To ovšem znamená, že pro homogenní systém lineárních rovnic $Ax = 0$ jsme zkonstruovali jistý systém partikulárních řešení, která jsou *lineárně nezávislá* a platí, že *libovolné řešení* daného systému rovnic lze vyjádřit ve tvaru jejich lineární kombinace.

Všimněme si dále, že výše zkonstuovaný systém partikulárních řešení $e_1, \dots, e_{n-k}$ není jediný s těmito vlastnostmi. Rovněž např. systém $e'_l = x(1, 2, \dots, l, 0 \dots, 0), 1 \leq l \leq n-k$, je lineárně nezávislý a každé řešení rovnic $Ax = 0$ lze vyjádřit jako jeho lineární kombinaci. Dokonce každý systém $n-k$ partikulárních řešení vytvořený z obecného řešení $x(t_1, \dots, t_{n-k})$ tak, že za $(t_1, \dots, t_{n-k})$ vezmeme libovolný pevný systém lineárně nezávislých $(n-k)$-tic čísel z pole $\mathbb{P}$, bude mít požadované vlastnosti.

Vidíme, že *homogenní* systémy lineárních rovnic mají důležitou vlastnost: *množina řešení* je *plně určena* zadáním jistého *konečného* systému partikulárních řešení, přičemž počet prvků tohoto určujícího systému je roven *počtu parametrů*, pomocí nichž se vyjadřuje obecné řešení, tj. $(n-k)$.

Definice 4.17. Buď $Ax = 0$ homogenní systém lineárních rovnic o n neznámých, rank $A = k$. Systém $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$ jeho partikulárních řešení nazveme *fundamentální systém řešení*, jestliže

• $e_1, \dots, e_{n-k}$ jsou lineárně nezávislá,

• libovolné řešení systému lineárních rovnic $Ax = 0$ lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace partikulárních řešení $e_1, \dots, e_{n-k}$.

Shrneme-li poznatky tohoto odstavce, můžeme charakterizovat strukturu množiny řešení homogenního systému lineárních rovnic takto:

Věta 4.18 (O struktuře množiny řešení homogenního systému lineárních rovnic)**.** *Množina všech řešení homogenního systému lineárních rovnic je tvořena všemi lineárními kombinacemi nějakého jeho fundamentálního systému řešení; ten má $n-k$ prvků, kde n je počet neznámých a k je počet lineárně nezávislých rovnic.*

Příklad 4.19. Je-li dán systém prvků $\{e_1, \ldots, e_r\}$ množiny R^n, které jsou lineárně nezávislé (jako řádkové či sloupcové matice), *můžeme najít systém homogenních lineárních rovnic*, pro nějž je $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *fundamentální systém řešení.*

Víme, že takový systém rovnic není určen jednoznačně, řešením úlohy je nalezení jednoho z možných ekvivalentních systémů.

Ze zadání je zřejmé, že budeme hledat systém *homogenních lineárních rovnic o n-neznámých* s reálnými koeficienty, který bude tvořen $n-r$ *lineárně nezávislými rovnicemi*, tedy systém rovnic tvaru

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-r,1}x_1 + \ldots a_{n-r,n}x_n = 0 \end{gathered}$$

takový, že matice systému $A = (a_{ij})$ má maximální hodnost. Je tedy třeba určit prvky matice A z podmínky, že každá ze zadaných n-tic $e_1, \ldots, e_r$ je řešením těchto rovnic, tedy že $Ae_1 = 0, \ldots$, $Ae_r = 0$. Dosadíme-li $e_1, \ldots, e_r$, dostaneme zřejmě systém $r(n-r)$ homogenních lineárních rovnic pro neznámé a_{ij}, $1 \leq i \leq n-r$, $1 \leq j \leq n$, který vyřešíme zpravidla Gaussovou eliminační metodou. Jak už bylo řečeno, stačí nám najít *jedno* vhodné nenulové řešení těchto rovnic, tedy jednu matici A, takovou, že rank $A = n - r$.

Ze zadání můžeme přímo určit *obecné řešení* (aniž bychom museli hledat nějaký odpovídající systém lineárních rovnic $Ax = 0$). Víme totiž, že obecné řešení je lineární kombinací fundamentálního systému řešení, takže

$$x(t_1, \ldots, t_r) = t_1e_1 + \cdots + t_re_r.$$

Jinými slovy, *množina řešení* systému rovnic $Ax = 0$ je podmnožina v $\mathbb{R}^n$, tvořená uspořádanými n-ticemi tvaru $t_1e_1 + \cdots + t_re_r$, kde $t_1, \ldots, t_r$ probíhají všechna reálná čísla.

Uvedený postup budeme ilustrovat na jednoduchém příkladě: Najdeme systém homogenních lineárních rovnic v R^3, jehož fundamentální systém řešení je

$$e_1 = (1, 2, 1), \quad e_2 = (1, 1, -1).$$

Jelikož $n = 3$, $r = 2$, hledáme *jednu* homogenní lineární rovnici

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

jejímž řešením jsou obě zadané uspořádané trojice e_1, e_2, takže platí

$$\begin{gathered} a + 2b + c = 0. \\ a + b - c = 0. \end{gathered}$$

Stačí nám najít jedno nenulové řešení těchto rovnic - vezměme třeba $a = 3, b = -2, c = 1$. Hledaná rovnice má pak tvar

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Množina všech řešení (obecné řešení), odpovídající zadanému fundamentálnímu systému řešení je tvořena všemi prvky množiny $\mathbb{R}^3$ tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = t_1e_1 + t_2e_2 = t_1(1, 2, 1) + t_2(1, 1, -1) = (t_1 + t_2, 2t_1 + t_2, t_1 - t_2), \ \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Jiný zápis téže množiny je např.

$$x_1 = s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = -3s + 2t, \quad s, t, \in \mathbb{R}.$$

4.4 Nehomogenní systémy lineárních rovnic

Definice 4.20. Nechť $Ax = b$ je nehomogenní systém lineárních rovnic (tj. $b \neq 0$). Pak homogenní systém rovnic $Ax = 0$ budeme nazývat *homogenizovaným systémem* příslušným nehomogennímu systému $Ax = b$.

Nejprve si připomeneme vlastnosti, které mají nehomogenní systémy lineárních rovnic díky platnosti Frobeniovy věty:

Věta 4.21. (Důsledky Frobeniovy věty)

(1) *Nehomogenní systém lineárních rovnic je řešitelný $\Leftrightarrow$ když hodnost rošířené matice tohoto systému je rovna hodnosti matice systému homogenizovaného.*

(2) *Nehomogenní systém lineárních rovnic má právě jedno řešení $\Leftrightarrow$ homogenizovaný systém má jediné (nulové) řešení.*

(3) *Nehomogenní systém lineárně nezávislých lineárních rovnic má právě jedno řešení $\Leftrightarrow$ matice homogenizovaného systému je čtvercová a regulární.*

(4) *Obecné řešení řešitelného nehomogenního systému lineárních rovnic o n neznámých závisí na $n - k$ parametrech, kde k je počet lineárně nezávislých rovnic systému (tj. k je hodnost rozšířené matice systému = hodnost matice homogenizovaného systému).*

(5) *Nehomogenní systém rovnic $Ax = b$, $b \neq 0$, nemá nulové řešení.*

Řešení nehomogenních rovnic už nelze generovat ze známých řešení tak jednoduše, jako tomu bylo u rovnic homogenních. Máme-li totiž dvě řešení x_0, x'_0 nehomogenního systému $Ax = b$, $b \neq 0$, pak $A(x_0 + x'_0) = Ax_0 + Ax'_0 = b + b = 2b \neq b$, takže *součet řešení nehomogenního systému rovnic není jeho řešením*. Podobně, je-li x_0 řešení, pak pro každé $c \in \mathbb{P}$ máme $A(cx_0) = cAx_0 = cb$, takže s výjimkou triviálního případu $c = 1$ *násobky řešení nehomogenního systému nejsou jeho řešením*. Pak ovšem ani lineární kombinace řešení nehomogenních rovnic nedávají řešení, takže například nemá smysl zavádět pojem „fundamentální systém řešení“ pro nehomogenní rovnice. Vidíme, že *množina řešení nehomogenního systému lineárních rovnic $Ax = b$, $b \neq 0$, má zcela jinou strukturu, než množina řešení homogenního systému rovnic*.

Věta 4.22 (O struktuře množiny řešení nehomogenního systému lineárních rovnic)**.** *Necht'$Ax = b$, $b \neq 0$, je řešitelný systém lineárních rovnic, x_P jeho libovolné pevně zvolené partikulární řešení. Pak ke každému řešení x systému $Ax = b$ existuje jediné řešení x_H homogenizovaného systému $Ax = 0$ takové, že*

$$x = x_P + x_H.$$

Obráceně, je-li x_H libovolné řešení homogenizovaného systému, pak $x = x_P + x_H$ je řešení systému $Ax = b$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že libovolné řešení x systému $Ax = b$ lze vyjádřit ve tvaru $x = x_P + x_H$, kde x_H je nějaké řešení homogenizovaného systému. Položme $x' = x - x_P$. Pak $Ax' = A(x - x_P) = Ax - Ax_P = b - b = 0$, tedy x' je řešení homogenizovaného systému. Stačí tedy vzít $x_H = x'$. Jednoznačnost x_H je evidentní.

Obráceně, je-li $Ax_H = 0$, pak zřejmě $Ax = A(x_P + x_H) = Ax_P + Ax_H = b + 0 = b$, což jsme chtěli ukázat. □

Věta 4.23. (Důsledek)

• *Obecné řešení řešitelného systému nehomogenních lineárních rovnic $Ax = b$ o hodnosti k je tvaru*

$$x(t_1, \ldots, t_{n-k}) = x_H(t_1, \ldots, t_{n-k}) + x_P,$$

kde $x_H(t_1, \dots, t_{n-k})$ je obecné řešení homogenizovaného systému $Ax = 0$ a x_P je libovolné, ale pevné partikulární řešení nehomogenního systému.

• *Každé řešení řešitelného systému nehomogenních lineárních rovnic $Ax = b$ o hodnosti k je tvaru*

$$x = t_1 e_1 + \dots t_{n-k} e_{n-k} + x_P, \quad t_1, \dots, t_{n-k} \in \mathbb{P}$$

kde $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$ je fundamentální systém řešení homogenizovaného systému $Ax = 0$ a x_P je libovolné, ale pevné partikulární řešení nehomogenního systému.

• *Množina všech řešení systému $Ax = b$ je*

$$M = \{x_H + x_P\},$$

kde x_H probíhá množinu všech řešení systému homogenizovaného a x_P je jedno řešení rovnic $Ax = b$.

Nepřehlédněme, že *rozdíl libovolných dvou řešení nehomogenního systému lineárních rovnic je řešením jeho homogenizovaného systému.*

Na základě uvedené věty lze *všechna* řešení nehomogenního systému $Ax = b$ určit tak, že nalezneme jedno jeho řešení x_P a vyřešíme homogenizovaný systém $Ax = 0$.

Příklad 4.24. Výše popsaným způsobem vyřešíme příklad, který jsme již dříve vyřešili Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Nejprve musíme najít („uhodnout“) nějaké řešení těchto rovnic, např. $x_P = (2, 1, 0, 0)$.

Nyní budeme řešit homogenizovaný systém

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Gaussovou eliminační metodou. Máme

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

takže obecné řešení závisí na $4 - 2 = 2$ parametrech; Zvolíme $x_4 = t$, pak $x_3 = -\frac{11}{8}t$; dosadíme do první rovnice a zvolíme $x_2 = s$, dostaneme

$$x_1 = \frac{1}{2}(3s + \frac{55}{8}t - 7t) = \frac{1}{2}(3s - \frac{1}{8}t).$$

Obecné řešení homogenizovaného systému je tedy

$$x_H(s, t) = \left(\frac{3}{2}s - \frac{1}{16}t,\ s,\ -\frac{11}{8}t,\ t\right), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tak obecné řešení zadaných nehomogenních rovnic ve tvaru

$$x = x_H(s, t) + x_P = \left(\frac{3}{2}s - \frac{1}{16}t + 2,\ s + 1,\ -\frac{11}{8}t, t\right), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení můžeme vyjádřit i ve tvaru $x = t_1e_1 + t_2e_2 + x_P$, kde $\{e_1, e_2\}$ je nějaký fundamentální systém řešení homogenizovaného systému. Vezmeme-li postupně $s = 2, t = 0$ a $s = 0, t = -16$, dostaneme

$$e_1 = (3, 2, 0, 0), \quad e_2 = (1, 0, 22, -16)$$

a tedy

$$x = t_1(3, 2, 0, 0) + t_2(1, 0, 22, -16) + x_P = (3t_1 + t_2 + 2,\ 2t_1 + 1,\ 22t_2,\ -16t_2),$$

kde t_1, t_2 probíhají množinu $\mathbb{R}$.

Příklad 4.25. Můžeme řešit i „inverzní úlohu“: najít systém lineárních rovnic, jehož množina řešení $M \subset \mathbb{R}^n$ je známá a je zadaná jako množina bodů (uspořádaných n-tic reálných čísel)

$$x = t_1e_1 + \cdots + t_re_r + x_P, \tag{4.3}$$

kde $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé (jako řádkové matice) a $x_P \in M$.

Je-li $x_P \neq 0$, pak příslušný systém lineárních rovnic (který, jak, víme, není určen jednoznačně) je nehomogenní a je tvořen $n-r$ lineárně nezávislými rovnicemi o n-neznámých. Má tedy tvar $Ax = b$, kde A je matice o $n - r$ řádcích a n sloupcích, přičemž rank $A = n - r$.

Je třeba najít matici A a matici b. Matici A najdeme z podmínky, že $e_1, \ldots, e_r$ je fundamentální systém řešení rovnic $Ax = 0$. Sloupcovou matici b pak dopočítáme s využitím podmínky, že x_P má splňovat rovnice $Ax = b$, tj. že pro ni platí $b = Ax_P$.

Uvedený postup budeme opět ilustrovat na příkladě: Najdeme systém nehomogenních lineárních rovnic v R^3, jehož množina řešení je

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = se_1 + te_2 + x_P,\ s, t, \in \mathbb{R}\},$$

kde

$$e_1 = (1, 2, 1), \quad e_2 = (1, 1, -1), \quad x_P = (3, 2, 1).$$

Jelikož $n = 3$, $r = 2$, hledáme *jednu* nehomogenní lineární rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b.$$

Nejprve najdeme příslušnou homogenizovanou rovnici. Její fundamentální systém řešení je $\{e_1, e_2\}$, takže platí

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0. \\ a_1 + a_2 - a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Stačí nám najít jedno nenulové řešení těchto rovnic - třeba $a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = 1$. Hledaná homogenizovaná rovnice má pak je

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

„Pravou stranu“ dopočteme z podmínky, že $x_P = (3, 2, 1)$ je řešením rovnice $3x_1 - 2x_2 + x_3 = b$, tedy $b = 9 - 4 + 1 = 6$.

Zadaná množina $M \subset \mathbb{R}^3$ je množina řešení nehomogenní lineární rovnice

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6.$$

Všimněte si ještě, že toto je *rovnice roviny* v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $(3, 2, 1)$.

Cvičení

1. Řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

2. Najděte obecné řešení a alespoň dvě různá partikulární řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7. \end{aligned}$$

3. Řešte systém lineárních rovnic v závislosti na parametru α:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \alpha. \end{aligned}$$

4. Řešte systém lineárních rovnic v závislosti na parametru β:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9 \\ \beta x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{aligned}$$

5. Zjistěte, zda daný systém rovnic lze řešit Cramerovým pravidlem a v kladném případě jej pomocí Cramerova pravidla vyřešte:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8. \end{aligned}$$

   Jaké řešení má příslušný homogenizovaný systém rovnic?

6. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 &= 17 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= 57 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7. \end{aligned}$$

   (a) Gaussovou eliminační metodou,
   (b) pomocí Cramerova pravidla.[9]

7. Určete obecné řešení a fundamentální systém řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

[9] Máte-li napsaný prográmek, použijte ho.

8. Řešte systém lineárních rovnic s neznámými x, y, z:

$$\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz &= -abc \\ 3bcx + 2acy - abz &= 4abc. \end{aligned}$$

9. *Inverzní matici* k dané čtvercové matici lze hledat přímo z definice, rozepíšeme-li definiční vztah $AA^{-1} = E$ pro prvky uvažovaných matic. Dostaneme tak zřejmě nehomogenní systém lineárních rovnic pro prvky neznámé matice A^{-1}. Kolik rovnic o kolika neznámých vznikne? Napište si jej explicitně. S využitím Frobeniovy věty diskutujte jeho řešitelnost a počet řešení a porovnejte výsledek se známými fakty o existenci a jednoznačnosti inverzní matice.
10. Metodou řešení systému lineárních rovnic popsanou v předchozím příkladě najděte inverzní matici k matici z Příkladu 3.16.
11. Napište systém lineárních rovnic, jehož množina řešení má tvar

   (a) $$M = \{x \in R^5 \mid x = t_1 e_1 + t_2 e_2,\ \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

   kde $e_1 = (1, 1, -1, -1, 2)$, $e_2 = (3, 1, 0, -2, 3, 0)$,

   (b) $$M = \{x \in R^4 \mid x = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + x_0,\ \ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\},$$

   kde $e_1 = (0, 1, 2, 3)$, $e_2 = (1, 0, -2, 3)$, $e_3 = (1, -1, 0, 1)$, $x_0 = (0, 1, 0, 1)$,
   (c) $M \subset R^3$ je množina prázdná,
   (d) $M \subset R^4$ je jednoprvková množina obsahující bod $(1, 1, 1, 1)$,
   (e) $M \subset R^5$ je jednoprvková množina obsahující počátek $(0, 0, 0, 0, 0)$.
   V příkladech (d), (e) vyberte systém rovnic, jehož matice A není diagonální.
12. Je dán systém lineárních rovnic tvaru

   $$Ax = \lambda x,$$

   kde A je čtvercová komplexní matice a λ je komplexní číslo. Určete podmínky, kdy má tento systém rovnic nenulové řešení.

   [Návod: Daný systém rovnic si zapište ve tvaru $(A - \lambda E)x = 0$. Co musí platit pro matici $A - \lambda E$?]

13. S využitím předchozího příkladu určete všechna čísla $\lambda \in \mathbb{C}$, pro která existují nenulová řešení systému rovnic

   $$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   Pro každé z nalezených čísel λ rovnice vyřešte a nalezněte nějaký fundamentální systém řešení.

5 Vektorové prostory

Studijní cíle: Dostáváme se ke klíčové matematické struktuře - vektorovým prostorům. S vektory a s příklady vektorových prostorů jsme se už setkávali dříve v matematice i ve fyzice - vzpomeňme třeba na známé fyzikální veličiny, jako je rychlost, zrychlení, síla, a další. Vektory jsou např. reálná čísla, uvažujeme-li je s operacemi sčítání a násobení, uspořádané dvojice reálných čísel s operacemi sčítání a násobení reálnými čísly, reálné funkce jedné reálné proměnné s operacemi sčítání a násobení funkcí čísly, nebo ze střední školy známé orientované úsečky v rovině, umístěné v počátku $\mathbb{R}^2$, které jste se naučili sčítat (doplněním na rovnoběžník) a násobit reálnými čísly. Vektorovým prostorem je také např. množina řešení systému homogenních lineárních rovnic, či množina matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matic čísly. V této kapitole se seznámíme se základními pojmy a příklady, které jsou pro pochopení vektorové struktury zásadní a musíme je perfektně zvládnout. Uvidíme také, že významným pomocníkem při výpočtech ve vektorových prostorech je maticový počet, který jsme se naučili ovládat v předchozích kapitolách.

Klíčová slova: Komutativní grupa, vektorový prostor, komplexní vektorový prostor, reálný vektorový prostor, vektor, lineární kombinace vektorů, lineárně nezávislé vektory, lineárně závislé vektory, konečněrozměrný vektorový prostor, nekonečněrozměrný vektorový prostor, báze, množina generátorů, složky vektoru vzhledem k bázi, matice přechodu mezi bázemi, transformační vztahy pro složky vektoru.

Potřebný čas: 180 minut.

5.1 Komutativní grupy

Uvažujme množinu G s jednou binární operací $G \times G \to G$, kterou budeme označovat symbolem $+$. Řekneme, že G je *komutativní grupa*, jestliže operace $+$ je

- komutativní, tj. $u + v = v + u, \ \forall\, u, v, \in G$,
- asociativní, tj. $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall\, u, v, w \in G$,
- v množině G existuje jediný prvek, označovaný o, takový, že $u + \mathrm{o} = \mathrm{o} + u = u, \ \forall\, u \in G$,
- ke každému prvku $u \in G$ existuje jediný prvek v G, označovaný $-u$ takový, že $u + (-u) = -u + u = \mathrm{o}$.

Prvek $\mathrm{o} \in G$ se nazývá *nulový prvek*, *neutrální prvek*, nebo stručně *nula* grupy G.

Prvek $-u$ se nazývá *opačný prvek* k u.

Operace $+$ v komutativní grupě G se zpravidla nazývá *sčítání*.

V komutativní grupě máme vedle operace sčítání definovánu i inverzní operaci *odčítání* takto: klademe pro všechna $u, v \in V$

$$u - v = u + (-v).$$

Poznámka 5.1. Množina s jednou binární operací, která splňuje všechny podmínky z uvedené definice kromě komutativního zákona, se nazývá *grupa*. Komutativní grupy jsou tedy grupy, kde navíc platí komutativní zákon.

Příklady.

• Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ s operací sčítání je komutativní grupa.

• Množina reálných čísel s operací násobení není komutativní grupa. Násobení reálných čísel je komutativní a asociativní, podmínku neutrálního prvku splňuje číslo 1 (skutečně pro všechna

$u \in \mathbb{R}$ platí $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$), ale poslední podmínka z definice splněna není: k číslu 0 neexistuje $x \in \mathbb{R}$, pro které $0 \cdot x = x \cdot 0 = 1$.

• Množina $R - 0$ s operací násobení je komutativní grupa.

• Množina celých čísel s operací sčítání je komutativní grupa.

• Množina přirozených čísel s operací sčítání není komutativní grupa.

• Množina R^n s operací sčítání je komutativní grupa.

• Množina funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operací sčítání je komutativní grupa.

• Množina matic $m \times n$ s operací sčítání je komutativní grupa.

• Množina regulárních matic řádu n s operací násobení splňuje všechny podmínky z definice kromě komutativního zákona. Není to tedy komutativní grupa, ale je to grupa - nazývá se *obecná lineární grupa* řádu n a označuje se $GL_n(\mathbb{R})$ jde-li o reálné matice a $GL_n(\mathbb{C})$, jde -li o komplexní matice.

5.2 Vektorové prostory

Definice 5.2. Buď V množina, P číselné pole. Řekneme, že V je *vektorový prostor nad polem* $\mathbb{P}$, jestliže

- na množině V je dána binární operace $+$, vzhledem k níž je V komutativní grupa,
- je dáno zobrazení $\mathbb{P} \times V \to V$, které má tyto vlastnosti:
  $a(u+v) = au + av, \ \forall\, a \in \mathbb{P}, u, v \in V,$
  $(a+b)u = au + bu, \ \forall\, a, b \in \mathbb{P}, u \in V,$
  $(ab)u = a(bu), \ \forall\, a, b \in \mathbb{P}, u \in V,$
  $1u = u, \ \forall\, u \in V.$

Je-li V vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$, pak prvky množiny V se nazývají *vektory* a prvky pole $\mathbb{P}$ se nazývají *skaláry*. Nulový prvek $\mathrm{o} \in V$ se nazývá *nulový vektor*. O zobrazení $\mathbb{P} \times V \ni (a, u) \to au \in V$ hovoříme jako o *násobení vektoru skalárem*.

Vektorový prostor nad polem $\mathbb{C}$ se nazývá *komplexní vektorový prostor*, vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se nazývá *reálný vektorový prostor*.

Všimněte si, že vektorový prostor nikdy nemůže být prázdná množina - každý vektorový prostor obsahuje nulový vektor. Vektorový prostor, který je tvořen jediným vektorem (tedy nulovým vektorem), se nazývá *triviální*.

Definice 5.3. [10]

Nechť V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$. *Lineární kombinací vektorů* $u_1, \ldots, u_p \in V$ s *koeficienty* $c_1, \ldots, c_p$ nazýváme výraz

$$\sum_{i=1}^{p} c_i u_i = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_p u_p, \quad c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{P}.$$

Řekneme, že vektory $u_1, \ldots, u_p$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže podmínka

$$c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p = \mathrm{o}$$

je splněna jedině pro $c_1 = \cdots = c_p = 0$, (t.j. nulový vektor lze získat lineární kombinací daných vektorů jediným způsobem - s nulovými koeficienty).

Řekneme, že vektory $u_1, \ldots, u_p \in V$ jsou *lineárně závislé*, jestliže nejsou lineárně nezávislé.

[10] Uvedené definice porovnejte s dříve zavedenými pojmy lineárně nezávislých a závislých řádků či sloupců matice.

Definice *lineárně závislých* vektorů se dá zřejmě ekvivalentně přeformulovat takto: Existují čísla $c_1 \cdots c_p \in \mathbb{P}$, z nichž alespoň jedno je *různé od nuly*, tak, že

$$c_1u_1 + \cdots + c_ku_k + \cdots + c_pu_p = \mathrm{o}\,.$$

Je -li např. $c_k \neq 0$, lze ovšem psát

$$u_k = -\frac{1}{c_k}(c_1u_1 + \cdots + c_{k-1}u_{k-1} + c_{k+1}u_{k+1} + \cdots + c_pu_p),$$

což znamená, že k-tý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_p$. Můžeme tedy říkat, že *vektory jsou lineárně závislé, jestliže alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.*

Všimněte si, že

- systém vektorů obsahující *nulový* vektor je lineárně závislý,
- pro *jeden* vektor (tj. $p = 1$) se definice linární (ne)závislosti redukuje na tento tvar: jeden vektor je lineárně nezávislý právě když je nenulový; je lineárně závislý právě když je nulový,
- *dva* vektory $u, v \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže jeden z nich je nenulovým násobkem druhého (tj. $u = cv$ pro nějaké číslo $c \neq 0$); podobně
- dva vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže jsou oba nenulové a jeden z nich není násobkem druhého.

Definice 5.4. Řekneme, že vektorový prostor V má (konečnou) *dimenzi* n, jestliže v něm existuje n lineárně nezávislých vektorů, přičemž libovoných $n + 1$ vektorů je lineárně závislých. Píšeme $\dim V = n$, a každý systém n vektorů s uvedenou vlastností nazýváme *báze* vektorového prostoru V.

Vektorový prostor, který nemá konečnou dimenzi, se nazývá *nekonečněrozměrný* [11].

Ekvivalentně, *báze* vektorového prostoru V (konečné dimenze) je systém *lineárně nezávislých* vektorů z V takových, že *každý* vektor z V je jejich *lineární kombinací* (báze je tedy *maximální lineárně nezávislý systém* vektorů z V). To znamená, že je-li $\{e_1, \ldots, e_n\}$ báze V, pak libovolný vektor $u \in V$ se vyjadřuje ve tvaru

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

přičemž čísla $x_1, \ldots, x_n \in P$ jsou určena *jednoznačně*. Nazývají se *složky vektoru u vzhledem k bázi* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Jednoznačnost složek vektoru plyne přímo z definice báze; ukážeme to: Nechť pro vektor $u \in V$ máme

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = x'_1e_1 + x'_2e_2 + \cdots + x'_ne_n.$$

Pak ovšem

$$(x_1 - x'_1)e_1 + (x_2 - x'_2)e_2 + \cdots + (x_n - x'_n)e_n = \mathrm{o}\,.$$

Vektory $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jsou podle předpokladu lineárně nezávislé, což znamená, že všechny koeficienty v uvedené lineární kombinaci jsou nulové. Odtud $x'_1 = x_1, \ldots, x'_n = x_n$.

[11] V lineární algebře budeme pracovat výhradně s vektorovými prostory konečné dimenze. S nekonečněrozměrnými vektorvými prostory se čtenář setká např. ve funkcionální analýze.

Poznámka 5.5 (Význam báze v konečněrozměrném vektorovém prostoru)**.** Ačkoli množina V (pokud $V \neq \{o\}$) obsahuje *nekonečně mnoho* prvků, báze je *malá konečná množina* (obsahuje $n = \dim V$ prvků), přitom ale se z ní *celý vektorový prostor vytváří* (pomocí lineárních kombinací). Navíc, je-li ve V zvolena báze, je každý vektor již *jednoznačně reprezentován svými složkami*. Složky vektoru v n-rozměrném vektorovém prostoru ovšem představují *uspořádanou n-tici čísel* z pole $\mathbb{P}$, tedy prvek *číselné množiny* $\mathbb{P}^n$. Vektory z V tak můžeme „nahradit" uspořádanými n-ticemi, s nimiž je práce zpravidla jednodušší i názornější.

Někdy je výhodné ve vektorovém prostoru pracovat s jinou („větší") množinou, než je báze: Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *generující množina* nebo také *množina generátorů* vektorového prostoru V, jestliže každý vektor V se vyjadřuje ve tvaru nějaké lineární kombinace prvků z množiny M.

Z této definice vyplývá, že báze je množina generátorů tvořená *lineárně nezávislými* vektory (tedy je to *minimální* generující množina).

5.3 Příklady vektorových prostorů

Uvedeme několik příkladů reálných a komplexních vektorových prostorů modelovaných na číselných i nečíselných množinách. Čtenáři doporučujeme, aby v každém z těchto příkladů důsledně ověřil, že uvedená množina s uvažovanými operacemi skutečně splňuje všechny požadavky z definice vektorového prostoru.

Vektorový prostor $\mathbb{R}$

Jedná se o nejjednodušší příklad vektorového prostoru. Za V vezmeme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ s operací sčítání (přesvědčte se, že je to komutativní grupa), za $\mathbb{P}$ vezmeme pole reálných čísel (tj. množinu reálných čísel s operacemi sčítání a násobení) a za zobrazení $\mathbb{P} \times V \to V$ násobení reálných čísel. Vzniká tak vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$. Tento vektorový prostor má dimenzi 1, neboť celou množinu $\mathbb{R}$ lze dostat jako násobky jediného reálného čísla $c \neq 0$. Báze vektorového prostoru $\mathbb{R}$ je tedy tvořena jediným reálným číslem různým od 0. Nejčastěji za bázový vektor bereme číslo 1.

Složka (libovolného) vektoru vzhledem k bázi je v tomto případě jediné reálné číslo. Zvolíme-li za bázi číslo $c \neq 0$, pak vektor $x \in \mathbb{R}$ je reprezentován číslem $x/c \in \mathbb{R}$ (neboť zřejmě $x = (x/c) \cdot a$).

Všimněte si, že báze tvořená číslem 1 je „privilegovaná" tím, že složka vektoru $x \in \mathbb{R}$ v této bázi je přímo číslo x.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$

Jde o nejčastější a modelový příklad konečněrozměrného vektorového prostoru. Za V vezmeme množinu uspořádaných n-tic reálných čísel $\mathbb{R}^n$ s operací sčítání. Připomeňme si definici této operace: Je-li $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots y_n)$ definujeme $x + y \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Vzhledem k tomu, že jde „po složkách" o sčítání reálných čísel, je tato operace evidentně komutativní a asociativní; nulovým prvkem je n-tice $(0, \ldots, 0)$ a ke každému prvku $x \in \mathbb{R}^n$ existuje číslo opačné, je jím $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$. $\mathbb{R}^n$ s operací $+$ je tedy komutativní grupa.

Dále, za $\mathbb{P}$ vezmeme pole reálných čísel $\mathbb{R}$ a za zobrazení $\mathbb{P} \times V \to V$ násobení uspořádaných n-tic reálnými čísly, tj. zobrazení $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (c, x) \to cx \in \mathbb{R}^n$, definované vztahem

$$c(x_1 \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n).$$

Vzniká tak vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$. Určíme jeho dimenzi. K tomu je třeba najít nějakou minimální generující množinu (bázi). Všimněme si, že každý prvek $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ lze psát ve tvaru lineární kombinace

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, \ldots, 0, 1).$$

To znamená, že

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \cdots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1) \tag{5.1}$$

je množina generátorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ (takže jistě $\dim \mathbb{R}^n \leq n$). Ovšem vektory $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jsou lineárně nezávislé, neboť z podmínky

$$c_1(1, 0, \ldots, 0) + c_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + c_n(0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0)$$

plyne $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, tj. $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Celkově tedy vidíme, že (5.1) je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ - nazývá se *kanonická báze*. Odtud také plyne, že $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Za bázi $\mathbb{R}^n$ lze vzít i libovolnou jinou množinu n lineárně nezávislých prvků. Kanonická báze je ovšem opět „privilegovaná“ tím, že složky vektoru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ v této bázi jsou přímo čísla $x_1, \ldots, x_n$ (v uvedeném pořadí).

Komplexní vektorový prostor $\mathbb{C}$

Nyní za V vezmeme množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ s operací sčítání, což je komutativní grupa. Za $\mathbb{P}$ vezmeme pole komplexních čísel (tj. množinu komplexních čísel s operacemi sčítání a násobení) a za zobrazení $\mathbb{P} \times V \to V$ násobení komplexních čísel. Vzniká vektorový prostor nad polem $\mathbb{C}$. Jeho dimenze je rovna 1, neboť celou množinu $\mathbb{C}$ lze dostat jako násobky jediného komplexního čísla $z \neq 0$ komplexními čísly. Za bázi vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ lze tedy vzít jakékoliv komplexní číslo různé od 0. Nejčastěji za bázi volíme číslo 1.

Složka (libovolného) vektoru je v tomto případě jediné komplexní číslo. Zvolíme-li za bázi číslo $z \neq 0$, pak vektor $u \in \mathbb{C}$ je reprezentován komplexním číslem u/z. V „kanonické“ bázi tvořené číslem 1 je složka vektoru $u \in \mathbb{C}$ přímo číslo u.

Reálný vektorový prostor $\mathbb{C}$

Za V zvolíme opět množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ s operací sčítání, ovšem za $\mathbb{P}$ tentokrát vezmeme pole *reálných* čísel a za zobrazení $\mathbb{P} \times V \to V$ násobení komplexního čísla číslem reálným. Na množině $\mathbb{C}$ tak vzniká *vektorový prostor nad polem* $\mathbb{R}$. Určíme jeho dimenzi. Ihned vidíme, že dimenze je větší než jedna, neboť jedno komplexní číslo z nám pro vygenerování všech vektorů nestačí (množina $\{cz \mid c \in \mathbb{R}\}$ jistě neobsahuje všechna komplexní čísla). Na druhé straně ale libovolné komplexní číslo má tvar $z = a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla, takže $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, tj. z je lineární kombinací (s reálnými koeficienty) komplexních čísel $1, i$. Odtud přímo plyne, že vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ má dimenzi 2 a $\{1, i\}$ je jeho báze. V tomto vektorovém prostoru je tedy každé komplexní číslo (v libovolné bázi) reprezentováno *uspořádanou dvojicí reálných čísel*; v bázi $e_1 = 1, e_2 = i$ jsou složkami vektoru z přímo reálná a imaginární část čísla z.

Reálný vektorový prostor $\mathbb{C}^n$

Podobně jako výše lze i na množině $\mathbb{C}^n$ uspořádaných n-tic komplexních čísel modelovat reálný vektorový prostor. Zvolíme $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ a násobení vektoru skalárem definujeme jako násobení uspořádané n-tice komplexních čísel reálným číslem. Vzniká vektorotový prostor dimenze $2n$ nad polem $\mathbb{R}$. Za jeho bázi lze vzít např. lineárně nezávislou množinu tvořenou vektory

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \cdots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1), \tag{5.2}$$
$$e_{n+1} = (i, 0, \dots, 0), \quad e_{n+2} = (0, i, 0, \dots, 0), \quad \cdots, \quad e_{2n} = (0, \dots, 0, i). \tag{5.3}$$

Vektor $z = (a_1 + b_1 i, \dots, a_n + b_n i) \in \mathbb{C}^n$ má v této bázi $2n$ složek $(a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_n)$.

Vektorový prostor matic $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ nad polem $\mathbb{P}$

Množina všech matic typu $m \times n$ s koeficienty z pole $\mathbb{P}$ s operací sčítání matic je komutativní grupa (ověřte). Uvažujeme-li navíc „operaci" násobení matic čísly z pole $\mathbb{P}$, vzniká vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$. Dimenze tohoto vektorového prostoru je rovna mn, za bázi lze vzít libovolnou množinu mn lineárně nezávislých matic z množiny $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$. Nejjednodušší báze má tvar

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\dots$

$$e_{(m-1)n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

v ní je každá matice $A = (a_{ij})$ reprezentovaná přímo svými prvky, přesněji uspořádanou mn-ticí $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots a_{mn})$.

Vektorový prostor polynomů

Vedle výše uvedeného vektorového prostoru matic je dalším příkladem nečíselného vektorového prostoru vektorový protor polynomů, který nyní zavedeme.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{5.4}$$

se nazývá (reálný) *polynom n-tého stupně*. Čísla $a_n, \dots a_0 \in \mathbb{R}$ se nazývají *koeficienty* polynomu f. Polynom stupně 3 se také nazývá *kubický*, stupně 2 *kvadratický*, stupně 1 *lineární* a stupně 0 *konstantní*.

Označme $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ množinu reálných polynomů stupně $\le n$. Na této množině je definována operace sčítání (jde o zúžení standardní operace sčítání funkcí). Připomeňme si pro jistotu definici: pro polynomy $f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

je $f+g$ polynom definovaný vztahem

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad \forall\, x\in\mathbb{R},$$

tedy $f+g$ má tvar

$$\begin{aligned}&(f+g)(x)\\ &\quad=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+a_0+b_0.\end{aligned}$$

Množina $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ s operací sčítání je komutativní grupa: komutativita a asociativita sčítání je zřejmá, nulový prvek grupy je nulový polynom (konstantní funkce rovná nule) a opačný prvek k polynomu f s koeficienty $a_n,\ldots,a_0$ je polynom $-f$ s koeficienty $-a_n,\ldots,-a_0$.

Dále uvažujme násobení polynomů reálnými čísly, tj. zobrazení $\mathbb{R}\times\mathcal{P}_n(\mathbb{R})\ni(c,f)\to cf\in\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definované vztahem

$$(cf)(x)=c\cdot f(x),\quad \forall\, x\in R.$$

Polynom cf má tedy koeficienty $ca_n,\ldots,ca_0$.

Takto vzniká vektorový prostor $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ nad polem $\mathbb{R}$. Tento vektorový prostor je konečněrozměrný, za jeho bázi můžeme vzít např. systém polynomů $\{1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n\}$. Skutečně, libovolný polynom z $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ se vyjadřuje ve tvaru lineární kombinace tohoto systému polynomů s koeficienty, kterými jsou přímo koeficienty daného polynomu. Tedy v uvažované bázi má polynom (5.4) složky $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$. odtud také inned plyne, že

$$\dim\mathcal{P}_n(\mathbb{R})=n+1.$$

Vektorový prostor reálných funkcí

Nakonec uvažujme množinu $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ všech reálných funkcí jedné reálné proměnné s operací sčítání funkcí (připomeňte si, že funkce $f+g\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ je definována vztahem $(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, tedy jako „sčítání bod po bodu“). $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ s operací sčítání je komutativní grupa (dokažte). (Reálný) vektorový prostor vznikne, uvažujeme-li navíc zobrazení $\mathbb{R}\times\mathcal{F}(\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $(c,f)\to cf$, kde $(cf)(x)=c\cdot f(x)$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$ (násobení funkce reálným číslem).

Tento vektorový prostor je *nekonečněrozměrný*. Ukážeme to: Kdyby pro nějaké číslo n byl systém funkcí $\{f_1,\ldots f_n\}$ bází tohoto vektorového prostoru, musela by pro každou funkci $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ existovat n-tice reálných čísel $c_1,\ldots c_n$ takových, že $f=c_1f_1+c_2f_2+\ldots c_nf_n$. Máme tedy pro každé $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots c_nf_n(x).$$

Uvažujme funkci $g\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, pro kterou platí $g(x)=f(x)$ pro všechna $x\neq 0$, a $g(0)\neq f(0)$. Pak zřejmě $g(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots c_nf_n(x)$ v každém bodě $x\neq 0$ a $g(0)\neq c_1f_1(0)+c_2f_2(0)+\ldots c_nf_n(0)$. To ale znamená, že $g\neq c_1f_1+c_2f_2+\ldots c_nf_n$. Našli jsme tedy funkci, která není lineární kombinací vektorů $f_1,\ldots,f_n$, tj. množina $\{f_1,\ldots f_n\}$ negeneruje vektorový prostor $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Jelikož přirozené číslo n může být libovolně velké, nemá uvažovaný vektorový prostor konečnou dimenzi.

5.4 Transformační vztahy pro složky vektoru

Víme již, že zvolíme-li v n-rozměrném vektorovém prostoru bázi, je každý vektor jednoznačně určen pomocí uspořádané n-tice čísel (složek vektoru vzhledem ke zvolené bázi). Zároveň je zřejmé, že volba jiné báze znamená, že *tentýž vektor* bude reprezentovám *jinou* uspořádanou n-ticí(!).

V tomto odstavci vyjasníme, jaký je vztah mezi reprezentacemi téhož vektoru v různých bázích vektorového prostoru a najdeme *transformační vztahy pro složky vektoru* vzhledem k různým bázím.

Nechť tedy V je n-rozměrný vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$ a $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ jsou dvě jeho různé báze. Pak ovšem každý z vektorů $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ má jednoznačné vyjádření v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ \bar{e}_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ &\cdots \\ \bar{e}_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{5.5}$$

jinak řečeno, známe složky všech vektorů „pruhované báze" vzhledem k „nepruhované bázi". Učiníme dohodu, že tato čísla uspořádáme do matice (složky vektoru e_i budou zapsány v i-tém *sloupci* této matice).

Definice 5.6. Matice $A = (a_{ij})$, jejíž sloupce tvoří složky vektorů báze $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$, se nazývá *matice přechodu* od báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ k bázi $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$.

Nechť nyní $u \in V$ je libovolný vektor. Vektor u má vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ složky $x_1, \ldots, x_n$ a vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ má složky $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Platí tedy

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k \bar{e}_k.$$

Dosadíme-li za vektory $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ jejich vyjádření (5.5), dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i,k=1}^{n} \bar{x}_k a_{ik} e_i,$$

tedy,

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k a_{ik} - x_i \Big) e_i = \mathrm{o}\,.$$

Jelikož vektory $e_1, \ldots e_n$ jsou podle předpokladu lineárně nezávislé, jsou všechny koeficienty v této lineární kombinaci rovny nule; tedy platí

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{x}_k, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{5.6}$$

Vzorec (5.6) umožňuje vypočítat složky $x_1, \ldots, x_n$ vektoru u vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$, jsou-li známy jeho složky $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n\}$. Je to tedy hledaný transformační vztah.

Všimněte si, že vzorec (5.6) se dá přehledněji napsat *v maticovém tvaru*: zavedeme-li sloupcové matice, tvořené složkami vektoru u vzhledem k zadaným bázím, jedná se o maticovou rovnost, na jejíž pravé straně vystupuje součin matic, a to matice přechodu $A = (a_{ij})$ a sloupce představujícího složky vektoru u v „pruhované" bázi. Konkrétně, v maticovém tvaru má transformační vzorec (5.6) tvar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Z definice matice přechodu je zřejmé, že je to matice *regulární*. Skutečně, jelikož vektory $\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n$ jsou lineárně nezávislé, jsou sloupce matice A (tvořené složkami vektorů $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$) lineárně nezávislé. A je tedy čtvercová matice maximální hodnosti, tj. je regulární (jiný důkaz regularity matice přechodu uvádíme níže).

Je zřejmé, že zadání dvou bází vektorového prostoru V umožňuje zkonstruovat matici přechodu od báze od báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ k bázi $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ (kterou jsme výše označili $A = (a_{ij})$) a také matici přechodu od báze $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$, označíme ji $B = (b_{ij})$. Jistě tušíme, jaký je vztah mezi těmito maticemi:

Věta 5.7. *Matice přechodu od báze od báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ k bázi $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ a matice přechodu od báze $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ jsou navzájem inverzní.*

Důkaz. Napišme si, jak jsou obě matice definovány: Máme $A = (a_{ij})$, kde čísla a_{ij}, $1 \le i, j \le n$, jsou určena vztahem (5.5) a $B = (b_{ij})$, kde b_{ij}, $1 \le i, j \le n$, splňují podmínky

$$\begin{aligned} e_1 &= b_{11}\bar{e}_1 + b_{21}\bar{e}_2 + \cdots + b_{n1}\bar{e}_n, \\ e_2 &= b_{12}\bar{e}_1 + b_{22}\bar{e}_2 + \cdots + b_{n2}\bar{e}_n, \\ &\dots \\ e_n &= b_{1n}\bar{e}_1 + b_{2n}\bar{e}_2 + \cdots + b_{nn}\bar{e}_n. \end{aligned}$$

Platí tedy pro všechna j

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\bar{e}_k = \sum_{i,k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}e_i \quad \Rightarrow \quad \Big(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} - \delta_{ij}\Big)e_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij}.$$

V maticovém tvaru tato rovnost ovšem zní $AB = E$, což znamená, že obě matice jsou regulární a $B = A^{-1}$. $\square$

Na základě právě dokázané věty můžeme ihned napsat též *inverzní transformační vztah*, tedy vzorec, z něhož vypočteme složky vektorů vzhledem k „pruhované“ bázi, známe-li jejich složky v bázi „nepruhované“: podle (5.7) máme

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Poznámka 5.8 (Konvence)**.** Viděli jsme, že pro počítání se složkami vektorů lze s výhodou využít maticový počet. Při označení, které v tomto textu používáme, se složky vektorů vzhledem k dané bázi zapisují do *sloupců*. *Budeme proto i nadále* vždy, když to bude vhodné, *používat pro složky vektoru reprezentaci pomocí sloupce matice*.

Tato reprezentace má mj. výhodu, že nám umožní snadno rozlišit vektor a jeho složky i v případě, kdy uvažovaným vektorovým prostorem je $\mathbb{P}^n$. Zde vektor x je uspořádaná n-tice čísel $(x_1, \dots, x_n)$, přičemž složky $c_1, \dots, c_n$ vektoru $(x_1, \dots, x_n)$ vzhledem k nějaké bázi budeme zapisovat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

nebo také (abychom šetřili místem) $(c_1, \dots, c_n)^T$.

Kontrolní otázky.

• V třírozměrném vektorovém prostoru jsou dány vektory x, u, v, w. Lze říci, jestli jsou lineárně závislé nebo nezávislé? Proč?

• Uveďte příklad polynomu, který je (netriviální) lineární kombinací polynomů

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1, \quad g(x) = x^2 - 5x + 3, \quad h(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

• Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory

$$u = e_1 + e_2 + e_3, \quad v = e_1 + e_2 + e_4, \quad w = e_2 + e_3 + e_4,$$

víte-li, že vektory e_1, e_2, e_3, e_4 jsou lineárně nezávislé.

• Jak se změní složky vektoru x, když prohodíme i-tý a j-tý bázový vektor (tj. místo báze $\{e_1, \dots, e_i, \dots, e_j \dots, e_n\}$ vezmeme bázi $\{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i \dots, e_n\}$?

• Jaké složky má vektor e_i, $1 \le i \le n$, vzhledem k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$?

• V n-rozměrném vektorovém prostoru jsou dány lineárně nezávislé vektory x, y. Lze vybrat bázi tak, aby vektor x měl složky $(1, 0, \dots, 0)^T$ a vektor y měl složky $(0, \dots, 0, 1)^T$?

Příklad 5.9. Ve čtyřrozměrném vektorovém prostoru V je dána báze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a vektory f_1, f_2, f_3, f_4, které mají vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tyto složky:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Ekvivalentně můžeme zadat vektory f_1, f_2, f_3, f_4 jako lineární kombinace báze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tj. ve tvaru

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = 2e_3 + 3e_4, \quad f_4 = e_2 + 2e_3 - e_4.$$

• Dokážeme, že vektory f_1, f_2, f_3, f_4 jsou lineárně nezávislé.

Můžeme postupovat různými způsoby:

(a) Definici lineární nezávislosti vektorů aplikujeme přímo na vektory f_1, f_2, f_3, f_4: Nechť

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = \mathrm{o}\,. \tag{5.8}$$

To znamená, že

$$\begin{gathered} c_1(e_1 + e_2) + c_2(e_1 - e_2) + c_3(2e_3 + 3e_4) + c_4(e_2 + 2e_3 - e_4) = \mathrm{o}, \\ (c_1 + c_2)e_1 + (c_1 - c_2 + c_4)e_2 + (2c_3 + 2c_4)e_3 + (3c_3 - c_4)e_4 = \mathrm{o}\,. \end{gathered}$$

Jelikož vektory e_1, e_2, e_3, e_4 jsou lineárně nezávislé, jsou všechny koeficienty v této lineární kombinaci rovny nule, tedy

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 - c_2 + c_4 = 0, \quad 2c_3 + 2c_4 = 0, \quad 3c_3 - c_4 = 0.$$

Toto je systém 4 homogenních lineárních rovnic o 4 neznámých, jehož matice je

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Víme, že uvedený systém lineárních rovnic má jediné, a to nulové řešení, právě když matice A je regulární. Je ovšem

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

což je evidentně regulární matice. Odtud plyne, že podmínka (5.8) je splněna jedině pro $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, tj. vektory f_1, f_2, f_3, f_4 jsou lineárně nezávislé.

Všimněte si, že matice A je vytvořena tak, že v jejím i-tém sloupci jsou přímo složky vektoru f_i, $i = 1, 2, 3, 4$ vzhledem ke zvolené bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Provádíme-li tedy s maticí A *sloupcové* elementární úpravy, znamená to, že při každém kroku dostáváme systém vektorů, které jsou *lineární kombinací* vektorů f_1, f_2, f_3, f_4; jejich složky vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ jsou sloupce příslušné ekvivalentní matice.

(b) Využijeme skutečnosti, že vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru nad $\mathbb{P}$ jsou *lineárně nezávislé právě tehdy, když jejich složky* (vzhledem k libovolné bázi) *jsou lineárně nezávislé* jako sloupcové matice, nebo ekvivalentně, jako vektory z $\mathbb{P}^n$. Napíšeme si tedy složky zadaných vektorů do matice a zkoumáme její hodnost.

V našem případě dostaneme buď výše uvedenou matici A nebo matici A^T, která je regulární, takže zadané vektory jsou lineárně nezávislé.

Jelikož vektory f_1, f_2, f_3, f_4 jsou lineárně nezávislé a jejich počet je roven dimenzi daného vektorového prostoru V, tvoří tyto vektory *bázi* V.

• S využitím již provedených výpočtů můžeme ihned napsat i jiné báze vektorového prostoru V. Při úpravách matice A jsme našli např. bázi tvořenou vektory $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, kde $b_1 = f_1$, $b_2 = e_2$, $b_3 = f_3$ a $b_4 = e_4$.

Úkol: Napište si složky vektorů b_1, b_2, b_3, b_4 vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a také jejich složky vzhledem k bázi $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

[Návod: Ve druhém případě stačí využít sloupcové elementární úpravy s maticí A, odkud okamžitě plyne, že $b_2 = (f_1 - f_2)/2$. Podobně vyjádřete b_4.]

• Ve V nyní uvažujme báze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Najdeme příslušné *matice přechodu*.

Ze zadání je možné okamžitě napsat matici přechodu od báze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ k bázi $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Dostaneme výše uvedenou matici A. Víme, že matice přechodu od báze $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ je matice A^{-1}. Lze ji nalézt přímo výpočtem inverzní matice k matici A. Můžeme však postupovat i tak, že najdeme vyjádření vektorů $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ jako lineární kombinace vektorů $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Vztahy

$$e_1 + e_2 = f_1, \quad e_1 - e_2 = f_2, \quad 2e_3 + 3e_4 = f_3, \quad e_2 + 2e_3 - e_4 = f_4$$

je tedy teba řešit jako systém nehomogenních lineárních rovnic pro neznámé e_1, e_2, e_3, e_4. Víme, že existuje jediné řešení (matice systému je čtvercová a regulární). Snadným výpočtem najdeme

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2, \\
e_2 &= \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2, \\
e_3 &= -\frac{3}{16} f_1 + \frac{3}{16} f_2 + \frac{1}{8} f_3 + \frac{3}{8} f_4, \\
e_4 &= \frac{1}{8} f_1 - \frac{1}{8} f_2 + \frac{1}{4} f_3 - \frac{1}{4} f_4,
\end{aligned}$$

takže matice přechodu od báze $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ je

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 8 & -3 & 2 \\ 8 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

• Nakonec ještě procvičíme transformaci složek vektoru. Uvažujme ve V báze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Nechť vektor x má vzhledem k bázi $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ složky

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme jeho složky vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(a) Můžeme použít vzorec pro transformaci složek vektoru. Máme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Můžeme ale zvolit i přímý výpočet: potřebujeme vyjádřit vektor x ve tvaru lineární kombinace vektorů $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Podle zadání je

$$\begin{aligned} x &= 3f_1 + 2f_3 - f_4 = 3(e_1 + e_2) + 2(2e_3 + 3e_4) - (e_2 + 2e_3 - e_4) \\ &= 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 7e_4, \end{aligned}$$

takže složky vektoru x vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ jsou

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Cvičení

1. Opakování: Definujte všechny pojmy uvedené v Klíčových slovech.
2. Uveďte příklady vektorových prostorů.
3. Zjistěte, zda vektory

$$(2, 1, 3 - 1), \quad (7, 4, 3, -3), \quad (1, 1, -6, 0), \quad (5, 7, 7, 8)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

4. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ najděte všechny báze, v nichž má vektor $(1, 0)$ složky

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. Ve vektorovém prostoru reálných matic 2×2 jsou dány vektory

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Zjistěte, zda jsou vektory A_1, A_2, A_3 lineárně nezávislé.
• Napište složky každého z vektorů A_1, A_2, A_3
(a) v bázi, tvořené vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) v bázi, tvořené vektory

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(c) v bázi, tvořené vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Dokažte, že vektory

$$e_1 = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad e_2 = 2x^3 + 3x^2 - 1,$$
$$e_3 = x^3 + 2x^2 + x + 4, \quad e_4 = x^3 + 3x^2 - x$$

tvoří bázi vektorového prostoru polynomů stupně ≤ 3 s reálnými koeficienty.
Určete složky vektorů

$$f = 7x^3 + 14x^2 - x + 2, \quad g = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

(a) v bázi $\{1, x, x^2, x^3\}$,
(b) v bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Najděte matici přechodu od báze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ k bázi $\{1, x, x^2, x^3\}$.

7. Zjistěte, pro která čísla α se vektor $b = (7, -2, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ vyjadřuje jako lineární kombinace vektorů $(2, 3, 5)$, $(3, 7, 8)$, $(1, -6, 1)$.

8. Určete dimenzi vektorového prostoru $\mathbb{C}^2$ nad polem $\mathbb{R}$ a nalezněte alespoň dvě jeho různé báze. Určete složky vektoru $(2 + i, 1 - i)$ vzhledem ke každé z těchto bází. Určete obě matice přechodu mezi těmito bázemi.
Řešte stejnou úlohu pro případ vektorového prostoru $\mathbb{C}^2$ nad polem komplexních čísel.

6 Podprostory vektorových prostorů

Studijní cíle: Druhou kapitolu o vektorových prostorech věnujeme vektorovým podprostorům. Víme již, že vektory ve vektorovém prostoru můžeme sčítat a násobit čísly. Zvolíme-li si ve vektorovém prostoru V nad polem $\mathbb{P}$ podmnožinu, pak také samozřejmě její prvky umíme sčítat a násobit čísly z pole $\mathbb{P}$. Některé podmnožiny ovšem „nedědí“ vektorovou strukturu z V - nejsou vzhledem k uvažovanému sčítání a násobení čísly z pole $\mathbb{P}$ vektorovými prostory. Podíváme-li se podrobněji, co je vlastně příčinou této „komplikace“, zjistíme, že pro některé prvky z dané množiny výsledek jejich sčítání nebo násobení nějakým skalárem *neleží* v uvažované množině (tedy nějaké vektory v množině „chybí“). Jinak řečeno, operace sčítání vektorů a násobení vektorů čísly se na takovou podmnožinu z V neindukují a vektorová struktura na ní nevzniká. Příkladem takové množiny je třeba přímka $y = 1$ v $\mathbb{R}^2$: pro bod $(x, 1)$ na této přímce je $2(x, 1) = (2x, 2)$ což je bod, který na této přímce neleží. Naopak přímka $y = 2x$ obsahuje se všemi svými body i jejich součty a násobky libovolným reálným číslem a snadno se přesvědčíme, že má všechny vlastnosti vektorového prostoru - je *vektorovým podprostorem* v $\mathbb{R}^2$. Zároveň docházíme k pojmu *lineárního obalu množiny*, jako nejmenšího vektorového podprostoru, ve kterém je uvažovaná množina obsažena. Budeme také studovat průnik a sjednocení vektorových podprostorů a uvidíme, že sjednocením podprostorů nemusí být vektorový podprostor. Proto budeme definovat *součet* vektorových podprostorů jako lineární obal jejich sjednocení. Odvodíme také důležitý vztah mezi dimenzemi průniku a součtu vektorových podprostorů.

Klíčová slova: Podprostor vektorového prostoru, Steinitzova věta, lineární obal množiny, paramerické rovnice vektorového podprostoru, obcné rovnice vektorového podprostoru, průnik vektorových podprostorů, součet vektorových podprostorů, přímý součet vektorových podprostorů, Věta o dimenzích součtu a průniku vektorových podprostorů, rozklad vektoru.

Potřebný čas: 180 minut.

6.1 Vektorové podprostory, Steinitzova věta

Uvažujme vektorový prostor V nad polem $\mathbb{P}$, $\dim V = n$. Je-li W podmnožina ve vektorovém prostoru V, lze její prvky sčítat a násobit čísly z pole $\mathbb{P}$. Přitom součet dvou prvků z množiny W může, ale nemusí ležet v množině W, a podobně násobek vektoru z množiny W nemusí ležet ve W. Ve vektorových prostorech budou mít velký význam podmnožiny, které jsou vzhledem ke sčítání svých prvků a k násobení svých prvků (všemi) čísly z pole $\mathbb{P}$ *uzavřené*, tedy sčítání a násobení skalárem z $\mathbb{P}$, definované ve V, *indukují sčítání a násobení skalárem z pole* $\mathbb{P}$ *v množině* W. Uvidíme totiž, že takové podmnožiny přirozeně „dědí“ vektorovou strukturu z V, tj. samy jsou též vektorovými prostory nad polem $\mathbb{P}$.

Nejprve pojem vektorového podprostoru přesně zavedeme:

Definice 6.1. Podmnožina $W \subset V$ se nazývá *podprostor vektorového prostoru* V, jestliže je sama vektorovým prostorem vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektorů čísly z pole $\mathbb{P}$, definovaným ve V.

Nepřehlédněte, že tato definice především požaduje, aby zúžení operace sčítání vektorů na podmnožinu W bylo operací na W, a aby zúžení zobrazení $\mathbb{P} \times V \to V$ bylo zobrazením $\mathbb{P} \times W \to W$.[12] Je snadné ukázat, že tyto podmínky jsou i postačující:

Věta 6.2. *Neprázdná podmnožina $W \subset V$ je podprostor vektorového prostoru V právě tehdy, když splňuje tyto dvě podmínky:*

- *pro libovolné vektory $u, v \in W$ platí $u + v \in W$,*

[12] obecně jsou to pouze zobrazení $W \times W \to V$ a $\mathbb{P} \times W \to V$

- *pro libovolný vektor $u \in W$ a libovolné číslo $c \in \mathbb{P}$ platí $cu \in W$.*

Důkaz. Nutnost uvedených podmínek je zřejmá. Ukážeme, že jejich splnění stačí k tomu, aby W byl vektorový prostor nad $\mathbb{P}$. První podmínka říká, že sčítání ve V indukuje operaci sčítání v podmnožině W. Tato operace je komutativní a asociativní, neboť vzniká jako zúžení komutativní a asociativní operace na V. Dále díky druhé podmínce nulový vektor $\mathrm{o} \in V$ leží v podmnožině W: pro libovolný vektor $u \in W$ totiž také $0u = \mathrm{o} \in W$. Ze stejného důvodu množina W obsahuje také opačné vektory ke všem svým prvkům (pro $u \in W$ je také $-1u = -u \in W$). Tím je ukázáno, že W s indukovanou operací sčítání je komutativní grupa. Podle druhé podmínky se také násobení vektoru skalárem ve V indukuje na podmnožinu W. Zbývající podmínky z definice vektorového prostoru jsou již splněny automaticky. $\square$

Všimněte si, že k tomu, aby $W \subset V$ byl vektorový podprostor ve V je nutné, aby množina W obsahovala *nulový vektor* a *opačné vektory* ke všem svým prvkům. (Tyto podmínky ale nestačí, jak ukazuje příklad podmnožiny v R^2 tvaru $S^1 \cup (0,0)$ (sjednocení jednotkové kružnice se středem v počátku a počátku)).

Dále si všimněte, že každý vektorový prostor V dimenze n má tyto podprostory:

- jediný podprostor dimenze nula: je jím triviální podprostor $W = \{\mathrm{o}\}$;
- podprostory dimenze 1: každý z nich je generovaný jediným nenulovým vektorem, tj. jsou to podmnožiny ve V tvaru $W = \{cu \mid c \in \mathbb{P}\}$, kde $u \in V$ je libovolný pevně zvolený vektor;
- podprostory dimenze 2: jsou generovány (libovolnou pevně zvolenou) dvojicí lineárně nezávislých vektorů z V;

  ...

- podprostory dimenze $n-1$: jsou generovány systémem $n-1$ lineárně nezávislých vektorů z V;
- jediný podprostor dimenze n: $W = V$ (tj. je to celý vektorový prostor V).

Příklad 6.3. *Množina řešení systému homogenních lineárních rovnic je vektorový podprostor.* Přesněji, systém k lineárně nezávislých homogenních rovnic o n neznámých definuje $(n-k)$-rozměrný vektorový podprostor W v n-rozměrném vektorovém prostoru - tímto podprostorem je množina řešení tohoto systému rovnic. Víme totiž, že součet libovolných dvou řešení a každý násobek libovolného řešení je opět řešením takového systému rovnic. *Fundamentální systém řešení je* evidentně *báze prodprostoru W.*

Nakonec uvedeme důležitou praktickou větu:

Věta 6.4 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť W je vektorový podprostor n-rozměrného vektorového prostoru V. Pak libovolnou bázi podprostoru W lze doplnit na bázi vektorového prostoru V.*

Důkaz. Označme $k = \dim W$ a zvolme bázi $\{f_1, \dots f_k\}$ podprostoru W. Buď $\{e_1, \dots, e_n\}$ nějaká báze vektorového prostoru V. Ukážeme, že vektory $f_1, \dots f_k$ lze doplnit na bázi V vhodnými vektory z množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ (tedy, že některé z vektorů báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ lze „vyměnit“ za vektory $f_1, \dots f_k$). Zřejmě systém vektorů $f_1, e_1, \dots, e_n$ je lineárně závislý a platí $f_1 = \sum a_i e_i$, kde alespoň jedno z čísel $a_1, \dots, a_n$ je různé od nuly; nechť je to číslo a_{i_1}. Pak ale vektor e_{i_1} je lineární kombinací vektorů $f_1, e_1, \dots e_{i_1-1}, e_{i_1+1}, \dots e_n$, a ty jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi V. Uvažujme dále systém $f_1, f_2, e_1, \dots e_{i_1-1}, e_{i_1+1}, \dots e_n$. Jelikož f_1, f_2 jsou nezávislé, platí $f_2 = \beta_1 f_1 + \sum_{j \neq i_1} b_j e_j$, kde alespoň jedno z čísel b_j je různé od nuly. Nechť $b_{i_2} \neq 0$. Pak ovšem e_{i_2} je lineární kombinací vektorů f_1, f_2 a všech e_j, kde $j \neq i_1, i_2$; tyto vektory jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi V.Takto pokračujeme dále, až dostaneme bázi V tvořenou vektory $f_1, \dots, f_k$ a $n-k$ z vektorů $e_1, \dots, e_n$. $\square$

6.2 Lineární obal

Definice 6.5. Nechť $M \subset V$ je podmnožina ve vektorovém prostoru V nad polem $\mathbb{P}$. *Lineárním obalem* množiny M rozumíme množinu všech lineárních kombinací prvků množiny M.

Lineární obal množiny M označujeme $[[M]]$.

Věta 6.6. *Lineární obal množiny $M \subset V$ je vektorový podprostor ve V.*

Důkaz. Stačí ukázat, že součet libovolných dvou vektorů z $[[M]]$ a násobek libovolného vektoru z $[[M]]$ libovolným číslem z $\mathbb{P}$ leží v $[[M]]$.

Pro libovolné dva vektory $u, v \in [[M]]$ máme podle definice lineárního obalu $u = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$ a $v = b_1y_1 + \cdots + b_ly_l$, kde $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots y_l$ jsou nějaké prvky množiny M a $a_1, \ldots a_k, b_1, \ldots, b_l$ jsou nějaká čísla z pole $\mathbb{P}$. Vektor $u+v$ je tedy také lineární kombinací prvků množiny M, což znamená, že leží v $[[M]]$. Podobně, je-li $u \in [[M]]$, pak $u = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$, kde $x_1, \ldots, x_k \in M$ a $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{P}$, takže $cu = (ca_1)x_1 + \cdots + (ca_k)x_k \in [[M]]$. □

Všimněte si, že

- Konečněrozměrný vektorový prostor je lineárním obalem své (libovolné) báze.
- $[[M]] = V$ právě když M je množina generátorů vektorového prostoru V.

6.3 Parametrické a obecné rovnice podprostoru

Shrneme-li své dosavadní poznatky o vektorových podprostorech, můžeme zodpovědět důležitou praktickou otázku - *jak zadat podprostor* ve vektorovém prostoru:

- *Podprostor jako lineární obal množiny*:

  Přímočarý způsob jak zadat vektorový podprostor plyne z definice lineárního obalu: stačí zvolit ve vektorovém prostoru V nějakou podmnožinu M a vzít její lineární obal (vytvoříme tak vektorový podprostor W „natažený na množinu M“); M je tedy generující množina vektorového prostoru W. Ke zjištění dimenze podprostoru W je ovšem třeba najít nějakou jeho bázi (zřejmě ji stačí vybrat z generující množiny M).

- *Zadání podprostoru pomocí báze, parametrické rovnice podprostoru*:

  k-rozměrný podporostor W ve vektorovém prostoru V je určen zadáním k-tice lineárně nezávislých vektorů $u_1, \ldots, u_k$ ve V. Pak $W = [[u_1, \ldots, u_k]]$ a $\{u_1, \ldots, u_k\}$ je jeho báze, tedy W je množina vektorů tvaru

  $$x = t_1u_1 + \cdots + t_ku_k, \quad t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{P}. \tag{6.1}$$

  Vztah (6.1) se často nazývá *parametická rovice podprostoru W*. Koeficienty $t_1, \ldots t_k$ (složky vektoru x vzhledem k bázi $\{u_1 \ldots u_k\}$) pak hrají roli *parametrů*, které probíhají množinu $\mathbb{P}$.

  Je-li prostor V konečněrozměrný ($\dim V = n$) a $\{e_1, \ldots e_n\}$ je jeho báze, pak vektory $x, u_1, \ldots, u_k$ lze vyjádřit pomocí jejich složek vzhledem k této bázi; rovnice (6.1) pak má tvar

  $$\sum_{i=1}^{n} x_ie_i = t_1(\sum_{i=1}^{n} u_{i1}e_i) + \cdots + t_k(\sum_{i=1}^{n} u_{ik}e_i), \tag{6.2}$$

  odkud vyplývá, že pro koeficienty lineární kombinace vektorů $e_1, \ldots e_n$ platí

  $$\begin{array}{rcl} x_1 & = & u_{11}t_1 + \cdots + u_{1k}t_k \\ x_2 & = & u_{21}t_1 + \cdots + u_{2k}t_k \\ & \vdots & \\ x_n & = & u_{n1}t_1 + \cdots + u_{nk}t_k \end{array} \tag{6.3}$$

tedy pro $i = 1, 2, \ldots, n$ je *i-tá složka* vektoru x vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots e_n\}$ lineární kombinací (s koeficienty $t_1, \ldots, t_n$) *i-tých složek* vektorů $u_1, \ldots, u_k$. Tyto vztahy (které představují reprezentaci parametrické rovnice (6.1) vzhledem k bázi vektorového prostoru V) rovněž nazýváme *parametrické rovnice podprostoru* W.

Nepřehlédněte, že (je-li $\dim V = n$), vektor $x \in W$ se vyjadřuje vzhledem k bázi prostoru V jako uspořádaná n-tice, zatímco vzhledem k bázi W se *tentýž* vektor vyjadřuje jako uspořádaná k-tice $(t_1, \ldots, t_k)$.

- *Zadání podprostoru pomocí systému lineárních rovnic, obecné rovnice podprostoru*:

  Víme již, že množina řešení systému homogenních lineárních rovnic má strukturu vektorového prostoru. Tato vlastnost nám umožňuje zadávat podprostory vektorových prostorů jako řešení vhodných systémů homogenních lineárních rovnic.

  Uvažujme n-rozměrný vektorový prostor V, nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je jeho báze; označme $x_1, \ldots, x_n$ složky vektoru $u \in V$ v této bázi a připomeňme si, že je budeme zapisovat jako sloupcovou matici.

  Uvažujme systém $(n-k)$-lineárně nezávislých homogenních lineárních rovnic tvaru

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

  kde A je matice typu $(n-k) \times n$ o hodnosti $n-k$. *Množina W všech vektorů z V, jejichž složky $x_1, \ldots, x_n$ splňují tento systém rovnic, je k-rozměrný vektorový podprostor ve V.* Skutečně, množina řešení daného systému rovnic je tvořena všemi lineárními kombinacemi fundamentálního systému řešení, který má k prvků. Z konstrukce je zřejmé, že vektory $f_1, \ldots f_k \in V$, jejichž složky vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jsou sloupcové matice tvořící fundamentální sytém řešení, leží v podprostoru W a jsou jeho bázovými vektory.

  Obráceně, je-li W k-rozměrný vektorový podprostor ve V, lze snadno najít systém homogenních lineárních rovnic, jejichž řešením je podprostor W, přesněji, řešeními jsou právě složky vektorů z W vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Hledaný systém rovnic má fundamentální systém řešení o k prvcích, musí být tedy tvořen $n-k$ lineárně nezávislými rovnicemi pro n neznámých. Hledáme tedy rovnice tvaru $Ax = 0$, kde A je matice typu $(n-k) \times n$ o hodnosti $n-k$ a x je sloupcová matice o n řádcích. Matici A určíme z podmínky, že tomuto systému rovnic vyhovují složky všech vektorů *báze* vektorového prostoru W. Nalezené rovnice se nazývají *obecné rovnice podprostoru* W.

  Všimněte si, že obecné rovnice podprostoru nejsou určeny jednoznačně: skutečně, jsou-li $Ax = 0$ rovnice W, pak také libovolné rovnice s nimi ekvivalentní (tj. $A'x = 0$, kde A' je matice řádkově ekvivalentní s A) jsou obecné rovnice podprostoru W (vzpomeňte si, že ekvivalentní systémy rovnic mají stejnou množinu řešení).

Příklad 6.7. (Speciální případy podprostorů.)

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$.

• Podprostor, který má parametrickou rovnici

$$x = tu, \quad t \in \mathbb{R},$$

je jednorozměrný; je to *přímka*, generovaná vektorem u. Obecné rovnice této přímky představují systém $n-1$ homogenních lineárních rovnic, jejichž obecné řešení je $x(t) = tu$.

• Podprostor, který má parametrickou rovnici

$$x = su + tv, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

kde u, v jsou lineárně nezávislé vektory z V, je dvourozměrný; je to *rovina*, generovaná vektory u, v. Obecné rovnice této roviny představují systém $n-2$ homogenních lineárních rovnic, jejichž obecné řešení je $x(s,t) = su + tv$, vektory u, v tvoří fundamentální systém řešení.

• $(n-1)$-rozměrný vektorový podprostor, má parametrickou rovnici

$$x = t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots + t_{n-1} u_{n-1}, \quad t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R},$$

kde $u_1, \ldots, u_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Nazývá se *nadrovina* generovaná vektory $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Obecné rovnice nadroviny jsou tvořeny jedinou homogenní lineární rovnicí tvaru

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n = 0,$$

kde koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ se určí z podmínky, že $u_1, \ldots, u_{n-1}$ je fundamentální systém řešení.

6.4 Průnik a součet vektorových podprostorů

Uvažujme dva vektorové podprostory W_1, W_2 ve vektorovém prostoru V. Množiny W_1, W_2 jsou podmnožiny množiny V, lze tedy uvažovat jejich průnik a sjednocení. Vzniká otázka, zda podmnožiny $W_1 \cap W_2$ a $W_1 \cup W_2$ jsou *vektorové podprostory* ve V.

Uvažujme nejprve množinu $W_1 \cap W_2 \subset V$. Všimněte si, že tato množina je vždy neprázdná - jistě obsahuje vždy alespoň nulový vektor. Snadno také ukážeme, že tato množina „dědí" vektorovou strukturu z V:

Věta 6.8. *Průnik vektorových podprostorů $W_1, W_2 \subset V$ je vektorový podprostor ve V.*

Důkaz. Stačí dokázat uzavřenost množiny $W_1 \cap W_2$ vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Uvažujme dva libovolné vektory $u, v \in W_1 \cap W_2$. Platí $u, v \in W_1$ a W_1 je vektorový podprostor ve V, proto také $u + v \in W_1$. Jelikož ovšem též $u, v \in W_2$ a W_2 je vektorový podprostor ve V, platí zároveň $u + v \in W_2$. Odtud $u + v \in W_1 \cap W_2$. Podobně, je-li $u \in W_1 \cap W_2$, pak pro každé $c \in \mathbb{P}$ je $cu \in W_1 \wedge cu \in W_2$, tj, $cu \in W_1 \cap W_2$. □

Naproti tomu, není těžké na příkladech ukázat, že *sjednocení vektorových podprostorů nemusí být vektorový podprostor*. Jeden takový příklad uvedeme: Uvažujme v R^2 dva jednorozměrné podprostory, W_1 generovaný vektorem $(1,0)$ („osa x") a W_2 generovaný vektorem $(0,1)$ („osa y"). Pak množina $W_1 \cup W_2$ je množina všech vektorů $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ a $(0, y)$, $y \in R$. Tato množina evidentně není uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů, neboť např. $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$.

Sjednocení vektorových prostorů tedy z hlediska teorie vektorových prostorů není zajímavé. Na druhé straně ale víme, že pomocí množiny lze vektorový podprostor snadno generovat: stačí vzít její *lineární obal*. Jinak řečeno víme, že, *jsou-li W_1, W_2 vektorové podprostory ve V, pak $[[W_1 \cup W_2]]$ je vektorový pdprostor ve V*. Můžeme tedy zavést následující pojem:

Definice 6.9. Klademe

$$W_1 + W_2 = [[W_1 \cup W_2]]$$

a tento vektorový podprostor nazýváme *součet vektorových podprostorů W_1, W_2*.

Jinak lze říci, že *součet vektorových podprostorů je nejmenší vektorový prostor obsahující množinu $W_2 \cup W_2$*.

Nyní prostudujeme strukturu vektorového prostoru $W_1 + W_2$ podrobněji.

Věta 6.10. *Platí*

$$W_1 + W_2 = \{u \in V \,|\, u = w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Důkaz. Je zřejmé, že vektory, které mají tvar w_1+w_2, kde $w_1 \in W_1$ a $w_2 \in W_2$ leží v lineárním obalu množiny $W_1 \cup W_2$, tedy ve $W_1 + W_2$. Obráceně, nechť $u \in W_1 + W_2$ je libovolný vektor. Pak existují vektory $x_1, \dots, x_p \in W_1$ a $y_1, \dots, y_q \in W_2$ a čísla $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ tak, že $u = a_1x_1 + \cdots + a_px_p + b_1y_1 + \cdots + b_qy_q$. Položme $w_1 = a_1x_1 + \cdots + a_px_p$, $w_2 = b_1y_1 + \cdots + b_qy_q$. Zřejmě $w_1 \in W_1$ a $w_2 \in W_2$ a platí $u = w_1 + w_2$. □

Nyní blíže vyšetříme *dimenze* průniku a součtu vektorových prostorů.

Z definice *součtu* vektorových prostorů okamžitě vyplývá, že je-li $\{e_1, \dots e_k\}$ báze vektorového prostoru W_1 a $\{f_1, \dots, f_l\}$ je báze W_2, pak sjednocení těchto množin, tj. $\{e_1, \dots e_k, f_1, \dots, f_l\}$ je *množina generátorů* vektorového prostoru $W_1 + W_2$. Tyto generátory mohou, ale nemusí být lineárně nezávislé, je tedy jistě $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim W_1 + \dim W_2$. Přesný vztah mezi dimenzemi uvádí následující věta:

Věta 6.11 (Věta o dimenzích). *Nechť W_1, W_2 jsou vektorové podprostory n-rozměrného vektorového prostoru V. Platí*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Důkaz. Označme $\dim W_1 = k$, $\dim W_2 = l$, $\dim(W_1 \cap W_2) = r$. Nechť $\{e_1, \dots, e_r\}$ je báze $W_1 \cap W_2$. Jelikož $W_1 \cap W_2 \subset W_1$, lze ji podle Steinitzovy věty doplnit na bázi vektorového prostoru W_1, označme ji $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{k-r}\}$. Ze stejných důvodů lze množinu $\{e_1, \dots, e_r\}$ doplnit na bázi $\{e_1, \dots, e_r, g_1, \dots, g_{l-r}\}$ vektorového prostoru W_2. Pak ovšem $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{k-r}, g_1, \dots, g_{l-r}\}$ je množina generátorů součtu $W_1 + W_2$. Ukážeme, že vektory $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{k-r}, g_1, \dots, g_{l-r}$ jsou lineárně nezávislé.

Předpokládejme tedy, že

$$a_1e_1 + \cdots + a_re_r + b_1f_1 + \cdots + b_{k-r}f_{k-r} + c_1g_1 + \cdots + c_{l-r}g_{l-r} = \mathrm{o},$$

a napišme si tento vztah ve tvaru

$$a_1e_1 + \cdots + a_re_r = -(b_1f_1 + \cdots + b_{k-r}f_{k-r} + c_1g_1 + \cdots + c_{l-r}g_{l-r}).$$

Podle konstrukce báze $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{k-r}\}$ prostoru W_1 žádný z vektorů $f_1, \dots, f_{k-r}$ neleží v průniku $W_1 \cap W_2$ (jinak by totiž tento vektor musel být lineární kombinací vektorů $e_1, \dots, e_r$ v rozporu se skutečností, že $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{k-r}$ jsou lineárně nezávislé). Podobně ani žádný z vektorů $g_1, \dots, g_{l-r}$ neleží ve $W_1 \cap W_2$. To ovšem znamená, že vektor na pravé straně může být lineární kombinací vektorů $e_1, \dots, e_r$ jedině tehdy, je-li nulový. Máme tak

$$\begin{aligned} a_1e_1 + \cdots + a_re_r &= \mathrm{o} \\ b_1f_1 + \cdots + b_{k-r}f_{k-r} + c_1g_1 + \cdots + c_{l-r}g_{l-r} &= \mathrm{o}\,. \end{aligned}$$

Z první rovnosti okamžitě plyne $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Kdyby vektory ve druhé rovnosti byly lineárně závislé, musel by některý z nich být lineární kombinací ostatních. Pak by ovšem pro nějaký index i byl vektor f_i (který leží ve W_1) lineární kombinací vektorů $g_1, \dots g_{l-r}$ (které leží ve W_2), což by znamenalo, že $f_i \in W_1 \cap W_2$. To je ale spor s předpokladem, že žádný z vektorů $f_1, \dots, f_{k-r}$ v průniku neleží. Vektory $f_1, \dots, f_{k-r}, g_1, \dots, g_{l-r}$ jsou tedy lineárně nezávislé, tj. $b_1 = \cdots = b_{k-r} = c_1 = \dots c_{l-r} = 0$. Shrneme-li výsledek, vidíme, že $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{k-r}, g_1, \dots, g_{l-r}\}$ je báze součtu $W_1 + W_2$. Pak ovšem platí $\dim(W_1 + W_2) = r + k - r + l - r = k + l - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$, což jsme chtěli dokázat. □

Zajímavá situace nastává, když W_1, W_2 jsou vektorové podprostory V, pro které platí

$$W_1 + W_2 = V.$$

Pak podle Věty o dimenzích máme

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Ihned vidíme, že významný bude speciální případ, kdy průnikem daných podprostorů je triviální podprostor. Podívejme se na tento případ podrobněji:

Definice 6.12. Řekneme, že vektorový prostor V je *přímým součtem* svých podprostorů W_1, W_2, jestliže

- je jejich součtem (tj. platí $W_1 + W_2 = V$) a
- $W_1 \cap W_2 = \{\mathrm{o}\}$.

Přímý součet podprostorů W_1, W_2 označujeme $W_1 \oplus W_2$.

Je zřejmé, že v případě přímého součtu je $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$. Přímý součet má ale ještě další fundamentální vlastnost:

Věta 6.13 (Věta o rozkladu vektoru)**.** *Nechť $V = W_1 \oplus W_2$. Pak každý vektor $u \in V$ se jednoznačně vyjadřuje ve tvaru $u = v_1 + v_2$, kde $v_1 \in W_1$ a $v_2 \in W_2$.*

Víme, že vždy, když $V = W_1 + W_2$, pak každý vektor z V lze rozložit na součet dvou vektorů, z nichž jeden leží ve W_1 a druhý ve W_2. V této větě je ovšem důležitá *jednoznačnost* tohoto rozkladu. Jinak řečeno, je-li V *přímým součtem* svých podprostorů W_1, W_2 pak ke každému vektoru $u \in V$ existuje *jediný* vektor $v_1 \in W_1$ a *jediný* vektor $v_2 \in W_2$ takový, že $u = v_1 + v_2$. Vektor v_1 se nazývá *projekce vektoru u na podprostor* W_1 a podobně vektor v_2 se nazývá *projekce vektoru u na podprostor* W_2. Všimněte si, že tuto situaci lze interpretovat také tak, že máme *zobrazení* $P_{W_1} : V \to W_1$, přiřazující každému vektoru z V jeho projekci na podprostor W_1; toto zobrazení se nazývá *projektor na podprostor* W_1. Zároveň vzniká *zobrazení* $P_{W_2} : V \to W_2$, přiřazující každému vektoru z V jeho projekci na podprostor W_2; nazýváme je *projektor na podprostor* W_2.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat jednoznačnost rozkladu. Nechť tedy $v_1, \bar{v}_1 \in W_1$ a $v_2, \bar{v}_2 \in W_2$ jsou vektory takové, že $u = v_1 + v_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Pak ovšem $v_1 - \bar{v}_1 = \bar{v}_2 - v_2$, kde na levé straně je vektor z W_1 a na pravé straně stojí vektor z W_2. To znamená, že oba vektory $v_1 - \bar{v}_1$ i $\bar{v}_2 - v_2$ leží v průniku $W_1 \cap W_2$. Jelikož ale průnik obsahuje jediný, a to nulový vektor, máme $v_1 - \bar{v}_1 = \bar{v}_2 - v_2 = \mathrm{o}$, tj. $\bar{v}_1 = v_1, \bar{v}_2 = v_2$. □

Příklad 6.14. Z definice *průniku* vektorových prostorů ihned vidíme, že je-li W_1 řešením systému $n-l$ nezávislých lineárních rovnic $A_1x = 0$ a W_2 je řešením systému $n-p$ nezávislých lineárních rovnic $A_2x = 0$, pak $W_1 \cap W_2$ je řešením obou těchto systémů rovnic současně, tj. je určen systémem (ne nutně lineárně nezávislých) homogenních lineárních rovnic s maticí A typu $(n - l + n - p) \times n$, která je tvořena submaticemi A_1 a A_2. Tato matice má hodnost $\leq 2n - l - p$, což znamená, že $\dim(W_1 \cap W_2) \geq l + p - n = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim V$.

Cvičení

1. Opakování: Definujte pojmy uvedené v Klíčových slovech. Vyslovte Steinitzovu větu a Větu o dimenzích.
2. Určete dimenzi a bázi vektorových podprostorů

$$W_1 = [[(1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)]], \quad W_2 = [[(2,3,-1),(1,2,2,),(1,1,-3)]],$$

napište jejich parametické a obecné rovnice.

3. Najděte parametické a obecné rovnice vektorového podprostoru

$$L = [[(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8)]].$$

4. Určete parametrické rovnice vektorového podprostoru, který má obecné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= 0. \end{aligned}$$

5. Určete dimenzi a bázi vektorového podprostoru, který je dán systémem lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$$

6. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažujte vektory

$$v_1 = (2, 0, -1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1, -1), \quad v_3 = (-1, 0, 2, 1)$$

a vektorový podprostor $W = [[v_1, v_2, v_3]]$.
• Určete dimenzi podprostoru W.
• Napište parametrické rovnice podprostoru W.
• Napište obecné rovnice podprostoru W.
• Zjistěte, zda vektor $u = (1, -1, -2, 1)$ leží ve W a v kladném případě určete jeho složky vzhledem k bázi $\{v_1, v_2, v_3\}$.

7. Najděte bázi součtu a průniku vektorových podprostorů

$$W_1 = [[(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 3, 3)]], \quad W_2 = [[(2, 3, -1), (1, 2, 2,), (1, 1, -3)]].$$

8. Ve vektorovém prostoru polynomů s reálnými koeficienty stupně ≤ 3 uvažujme podprostory

$$L_1 = [[f_1, f_2, f_3]], \quad L_2 = [[g_1, g_2, g_3]],$$

kde

$$\begin{aligned} f_1 &= x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad f_2 = x^3 + x^2 - x - 1, \quad f_3 = x^3 + 3x^2 + 3x, \\ g_1 &= 2x^3 + 3x^2 - x - 2, \quad g_2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1, \quad g_3 = x^3 + x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

• Najděte bázi podprostoru $L_1 + L_2$ a určete jeho parametrické rovnice.
• Určete obecné rovnice podprostoru L_1 i L_2.
• Určete $\dim(L_1 \cap L_2)$.
• Napište obecné rovnice podprostoru $L_1 \cap L_2$ a najděte nějakou jeho bázi.

9. Ve vektorovém prostoru reálných matic řádu 2 uvažujte podprostor W generovaný maticemi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

leží ve W a v kladném případě určete jeho složky vzhledem k bázi $\{A_1, A_2\}$.

10. V nekonečněrozměrném vektorovém prostoru $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uveďte příklad vektorového podprostoru dimenze n. [13]
Dále ve vektorovém prostoru $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ uvažujte podprostor $L = [[\sin^2 x, \cos^2 x]]$. Určete dimenzi a napište parametrické rovnice podprostoru L. Zjistěte, zda konstantní funkce $f(x) = 1$ leží v podprostoru L; pokud ano, najděte její složky vzhledem k zadané bázi.

[13] [Návod: Vzpomeňte na vektorový prostor polynomů.]

Reference

[1] Bican, L., *Lineární algebra.* SNTL, Praha, 1979.

[2] Bican, L., *Lineární algebra a geometrie.* Academia, Praha, 2004.

[3] Halmos, P.R., *Linear Algebra Problem Book.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] Hort, D., Rachůnek, J., *Algebra 1.* VUP, Olomouc, 2003.

[5] Jukl, M., *Lineární algebra.* Univerzita Palackého, Olomouc, 2006.

[6] Krupka, D., Musilová, J., *Lineární a multilineární algebra.* SPN, Praha, 1989.

[7] Kuroš, A.G., *Kurz vyšší algebry.* Nauka, Moskva, 1968 (Rusky).

[8] Proskurjakov, I.V., *Sbírka úloh z lineární algebry.* Nauka, Moskva, 1978 (Rusky).