KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO

DIFERENCIÁLNÍ POČET

JIŘÍ KOBZA

VÝVOJ TOHOTO UČEBNÍHO TEXTU JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Olomouc 2007

Abstrakt

Tento text distančního vzdělávání je věnován diferenciálnímu počtu funkcí jedné proměnné. Po zavedení používané symboliky je ve druhé kapitole uveden obecný pojem funkce, jsou stručně připomenuty elementární funkce a jejich vlastnosti, zavedeny pojmy složené, prosté a inverzní funkce. Ve třetí kapitole je uveden pojem posloupnosti, její limity a metody výpočtu limit. Ve čtvrté kapitole se pak uvádějí a shrnují poznatky o limitě funkce, její spojitosti či nespojitosti v daném bodě a na intervalu. Pátá kapitola se zabývá derivací funkce, jejími vlastnostmi a metodami výpočtu. V šesté kapitole jsou formulovány základní věty diferenciálního počtu a jejich použití pro vyšetřování průběhu funkce. Sedmá kapitola je věnována diferenciálu funkce a Taylorovým rozvojům funkcí jako často používané aproximace funkcí. Osmá kapitola se zabývá dalšími vlastnostmi funkcí - jejich monotonností, konvexností či konkávností, vyšetřováním lokálních a globálních extrémů, asymptot grafů funkcí. V závěru je uveden doporučený postup při vyšetřování celkového průběhu funkcí.
Každá kapitola obsahuje jak propočítané příklady demonstrující její hlavní pojmy a výsledky, tak i příklady pro samostatné řešení. Ty mají ověřit pochopení studované problematiky. Stručné výsledky takových (zejména složitějších) úloh jsou uváděny v závěru kapitol.
Kromě ilustrativních příkladů je čtenář informován o možnostech realizace takových výpočtů a jejich grafického zobrazení v systémech Maple, Matlab, Mathematica (i případných nástrahách při jejich použití).

Cílová skupina

Text je primárně určen pro studenty distančního studia. Je vhodný též pro studenty interního studia informatiky.

Obsah

1 Množiny čísel, logické relace, symboly

Studijní cíle: Cílem této kapitoly je stručně si připomenout historický vývoj základních pojmů diferenciálního počtu, používané známé pojmy z výrokové logiky a teorie množin, v oboru reálných čísel pojmy interval a okolí bodu, horní a dolní mez (hranice, závora) množiny reálných čísel, suprema a infima uspořádané množiny.
Klíčová slova: operace s množinami, výrokové kvantifikátory, zobrazení, elementární funkce
Potřebný čas: 90 minut. $\triangle$

Z historie matematiky - diferenciálního a integrálního počtu.
Orientální matematika (praktické výpočty, geometrie, trigonometrie).
Řecko - Pythagoras, Euklides; Archimedes (287-212) - plochy, objemy (idea integrálu).
Evropa - do 15. století přebírá poznatky Orientu, Řecka (algebra, rovnice, geometrie).
Napier, Briggs (1614-24) - logaritmy, tabulky .
Od 17. století - rozvoj infinitesimálního počtu - základy, aplikace v geometrii, astronomii, fyzice, geodezii.
17. století: Cavalieri, Descartes, Fermat, Leibniz (1646-1716), Newton (1643 -1727), Bernoulliové, l'Hospital (první učebnice 1696).
18. -19. století: Euler (1707 - 1763), D'Alembert (1717-1783, pojem limity), Lagrange (1736-1813, spory o pojem limity), Gauss (1777-1855), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857, zpřesnění pojmů, aplikace),Bolzano (1781-1848, zapomenut), Riemann (1826-1866, integrál), Weierstrass (1815-1897, přesné formulace základních pojmů diferenciálního počtu).

Průvodce studiem

V tomto textu budeme používat základní poznatky ze středoškolské matematiky, algebry, teorie množin a výrokové logiky, se kterými se studenti seznámili v jiných předmětech a jsou uvedeny v učebnicích a učebních textech (např. [8-11]).

Budeme tedy v dalším předpokládat základní znalosti pojmů (viz např. [9,10,12])

- množina, operace s množinami, používané symboly pro sjednocení, průnik, rozdíl a kartézský součin množin ($a \in A, A = B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B$);
  uspořádaná množina, úplné (lineární) uspořádání množiny,
  její supremum, infimum; relace mezi množinami;
  výrokové kvantifikátory (všeobecný, existenční $\cdots \forall, \exists$),
  symboly konjunkce a disjunkce ($\vee, \wedge$), implikace a ekvivalence ($\Rightarrow, \Leftrightarrow$);
  zobrazení - jeho definiční obor, obor hodnot ($f, D(f), H(f), R(f)$);
  prosté zobrazení $A \to B$ (injekce), surjekce, bijekce ;

- čísla přirozená, celá, racionální, iracionální, reálná, komplexní a operace s nimi (s označením $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ pro množiny všech čísel přirozených, celých, racionálních, reálných, komplexních); číselné těleso;

- základní pojmy kombinatoriky (permutace, kombinace, variace, binomická věta);

- vektorový prostor, jeho podprostory a báze;

- v oboru reálných čísel pojmy : nevlastní body reálné osy ($-\infty, +\infty$), které doplňují množinu $\mathbb{R}$ na její uzávěr;

relace uspořádání ($a < b, a \leq b, a > b, a \geq b$) a pravidla pro počítání s nimi;
intervaly - otevřený (a, b), uzavřený $\langle a, b \rangle$ (příp. zleva, zprava), konečný, neohraničený (např. $(-\infty, a), < b, +\infty), (-\infty, +\infty)$);
ϵ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ - množina $O(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \epsilon\} = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ (a - střed, ϵ - poloměr okolí);
levé, pravé δ-okolí bodu $a \cdots$ intervaly $(a - \delta, a >, < a, a + \delta)$;
redukované ϵ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ - množina čísel $(a - \epsilon) \cup (a + \epsilon) = O(a) \setminus \{a\}$;
okolími nevlastních bodů $\pm\infty$ jsou intervaly $(-\infty, k), (k, +\infty),\ k \in R$;
horní a dolní mez (hranice) množiny reálných čísel, její největší a nejmenší prvek, hromadný bod, supremum a infimum;

- elementární funkce, jejich definiční obory, obory hodnot, grafy a vlastnosti (zopakujeme si je stručně v kap. 2.):
  mocniny ... $x^n, n \in \mathbb{N},\ x^m, m \in \mathbb{Z}$, polynomy $P_n(x)$; funkce $sign(x)$;
  goniometrické (trigonometrické) funkce ... $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$;
  exponenciální funkce ... $a^x, \exp(x) = e^x$, logaritmické funkce $\ln(x), log_a(x)$.

V textu použijeme postupně další symboly
$\square$ - označuje konec důkazu věty,
$\triangle$ - ukončuje v méně přehledných místech text o předchozím tématu;
symboly pro součty, součiny čísel a funkcí ... $\sum, \prod$,
symboly pro konvergenci, limitu $\cdots n \to \infty, x \to x_0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,
označení pro derivace funkce $\cdots f'(x_0), f'(x),\ df(x)/dx, f^{(n)}(x)$
pro maxima, minima, supremum a infimum funkcí $\cdots \max f(x), \min f(x), \sup, \inf$.
Pro sjednocení zápisu symbolů funkcí používáme v textu společný typ $f(x)$ pro funkci proměnné x i u elementárních funkcí jako $\sin(x), \exp(x)$. U exponenciály budeme používat obou způsobu zápisu - $e^x, \exp(x)$. U funkcí tangens, cotangens se ve výpočetních systémech (jako Matlab, Maple) a textovém editoru Latex používá různých symbolů jako $\tan(x), \cot(x)$, kterých také budeme používat.
Mnoho podrobně propočítaných příkladů k uváděným tématům najde čtenář v textech [1,2,3,5,6,8,11,12].

Shrnutí

V této úvodní kapitole jsme připomněli pojmy z výrokové logiky, algebry a středoškolské matematiky, kterých budeme dále používat speciálně v oblasti diferenciálního počtu. Uvedli jsme stručný přehled číselných oborů, intervalů reálných čísel, zavedli důležitý pojem okolí bodu na reálné ose.

Pojmy k zapamatování

- Symboly výrokové logiky, operace s množinami, pojem zobrazení mezi množinami, úplně (lineárně) uspořádaná množina.
- Číselné obory $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Jednotlivé druhy intervalů - otevřený, uzavřený, $\cdots$.
- Pojmy okolí bodu, hromadný bod, supremum, infimum.

Kontrolní otázky

1. *Popište číselné obory* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. *Charakterizujte jednotlivé druhy intervalů - otevřený, uzavřený, ...*
3. *Objasněte pojmy okolí bodu, hromadný bod, supremum, infimum.*

4. *Jakými vlastnostmi jsou definovány relace ekvivalentní, reflexivní, symetrická, tranzitivní ?*
5. *Popište vlastnosti, které má zobrazení prosté (injektivní), surjektivní, bijektivní*
6. *Popište struktury se dvěma operacemi (okruh, obor integrity, těleso).*
7. *Uveďte definice pojmů vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze a dimenze vektorového prostoru.*

Úkoly k textu

1. Uveďte příklady sjednocení, průniku, rozdílu, kartézského součinu množin.
2. Uveďte příklady uspořádaných, úplně uspořádaných množin.
3. Uveďte příklady zobrazení injektivních, surjektivních, bijektivních.
4. Popište nejmenší číselné těleso - těleso racionálních čísel !
5. Jaké axiomy splňují operace sčítání a násobení reálných čísel ?
6. Kolik bází má vektorový prostor $\mathbb{R}^3$? Uveďte příklady .

2 Funkce jedné reálné proměnné a jejich vlastnosti

Studijní cíle: Uvedeme definici funkce a jejího grafu, zopakujeme si vlastnosti elementárních funkcí. Prostudujeme další vlastnosti funkcí a pojmy složená,inverzní funkce.
Klíčová slova: funkce, graf funkce, složená funkce; funkce prostá, monotonní, inverzní
Potřebný čas: 240 minut.

2.1 Funkce a její graf

Průvodce studiem

V této kapitole uvedeme obecnou definici reálné funkce jedné proměnné, způsoby zadání funkčního předpisu, vyšetříme některé její případné specifické vlastnosti. Ze středních škol je nám známa celá řada tzv. *elementárních funkcí* - mocniny, trigonometrické, exponenciální a logaritmické funkce, jejich grafy a vlastnosti. Stručný přehled jejich definic, vlastností a grafů najdeme v řadě příruček a učebnic - zde si připomeneme stručně jen nejdůležitější z nich.

Definice obecné reálné funkce jedné proměnné používá pojmy *zobrazení, definiční obor funkce, obor funkčních hodnot*.

Definice 2.1. *Reálnou funkcí jedné proměnné* nazveme zobrazení jejího definičního oboru $I \in \mathbb{R}$ do oboru hodnot $J \in \mathbb{R}$, které každému $x \in I$ (*nezávisle proměnná*) přiřadí jediné $y \in J$ (*závisle proměnná*).
Grafem funkce $f : I \to J$ je množina bodů v rovině o souřadnicích $[x, f(x)], x \in I$.

definice funkce
graf funkce

Příklady funkcí (viz např. lit. [3,6,7,8,11,12]):
- cena jízdného v závislosti na vzdálenosti cíle, cena poštovného - dány tabulkami ;
- vzorec pro délku dráhy rovnoměrného pohybu s rychlostí v jako funkce času ($s = v.t$);
- formule pro délku nebo plochu kruhu o poloměru r ($l = 2\pi r, P = \pi r^2$);
- vzorce pro výpočet objemu tělesa s danou plochou základny v závislosti na výšce;
- formule pro popis harmonického pohybu $y = A\sin(\omega t + \alpha)$;
- formulace řady fyzikálních zákonů (pohybové zákony, zákony elektrodynamiky);
- všechny již zmíněné elementární funkce, známé z učebnic a jiných textů .

Poznámka 2.2. Obecný termín *zobrazení* bude mít pro nás nejčastěji formu funkčního předpisu, který nám umožní přiřadit každé hodnotě x odpovídající hodnotu y.
Definiční obor funkce je buď explicitně zadán společně s funkčním předpisem, nebo je implicitně určen množinou reálných (příp. komplexních) čísel, pro která jsou uvedené symboly definovány. U složitějších funkcí tak zpravidla začínáme vyšetřením jejich definičního oboru. Definiční obor se často označuje symboly $D(f), Dom(f)$, obor funkčních hodnot symboly $H(f), R(f), Im(f)$.
Funkční předpis může mít *explicitní tvar* $y = f(x)$, jak ho známe u elementárních funkcí; funkce $f(x)$ může mít ovšem také značně složitější předpis - jen je třeba, aby každé hodnotě $x \in I$ byla přiřazena jediná hodnota $y \in J$ - např. $y = \tan(x^2 + 1)$.
Tato funkce je už jednoduchým příkladem *složené funkce* s vnitřní funkcí a vnější funkcí (viz odst. 2.2).

předpis explicitní

Funkční předpis může mít také *implicitní tvar* $F(x, y) = 0$, který ale může obsahovat předpisy pro více funkcí, které je třeba oddělit (například známá rovnice

implicitní

kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ definuje dvě funkce - zobrazené horní a dolní půlkružnicí $y = \sqrt{r^2 - x^2},\ y = -\sqrt{r^2 - x^2}$). V takových případech se pak často používá tzv. *parametrického předpisu funkce*, který každou ze souřadnic definuje jako jistou explicitní funkci parametru (např. u kružnice se středem v počátku a poloměrem r rovnicemi $x = r\cos(t), y = r\sin(t)$, nebo u prostorové spirály $x = r\cos(t), y = r\sin(t), z = at$) - tedy každé hodnotě parametru $t \in \mathbb{R}$ přiřadí bod v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$ a umožňuje tak definovat různé rovinné a prostorové křivky. *parametrický*

V explicitním i implicitním tvaru funkčního předpisu se vyskytují známé algebraické operace mezi složkami funkce (lineární kombinace, násobení, dělení, mocniny, odmocniny a podobně).

Obor funkčních hodnot konkretní funkce je určen jejím definičním oborem a funkčním předpisem - jeho určení je jednou z úloh, kterými se budeme zabývat spolu s hledáním dalších vlastností různých funkcí. Názornou informaci o nich nám ukáže graf vyšetřované funkce, který můžeme získat např. pomocí počítače, nebo analýzou a ručním výpočtem.

Uvedená definice funkce se dá použít i pro funkce komplexní proměnné; nedá se však zde přímo použít uvedené definice grafu funkce (proč ?).

Cvičení

1. K nejjednodušším funkcím patří polynomy stupně n s funkčním předpisem

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

   s koeficienty polynomu $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0 \cdots n,\ a_n \neq 0$. Jejich funkční hodnoty se mohou efektivně počítat tzv. *Hornerovým algoritmem*, založeným na následující úpravě funkčního předpisu

$$P_n(x) = ((\cdots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots)x + a_1)x + a_0. \tag{2.2}$$

   Realizujte jej např. ve známé formě tabulky, nebo v programu počítače !
   Varianta Hornerova algoritmu se také používá pro dělení polynomu lineárním faktorem $x - c$ (při úpravě podílu polynomů, hledání nulových bodů - kořenů - polynomů) - viz např. [12]. Polynomy stupně nejvýš n tvoří lineární prostor. *polynomy*
2. Z algebry polynomů je známo, že každý polynom stupně n má (včetně násobnosti) právě n kořenů (obecně komplexních, při reálných koeficientech se komplexní kořeny vyskytují ve dvojicích komplexně sdružených kořenů). Polynom je pak možno rozložit na součin lineárních a kvadratických faktorů (viz např. [12]). Popište podrobněji takový rozklad !
3. Dva polynomy se sobě rovnají, mají-li stejné koeficienty u stejných mocnin $x^k,\ k = 0, 1, \cdots, n$. Na tom jsou založeny algoritmy pro násobení dvou polynomů, dělení polynomů $P_n(x)/P_m(x),\ n > m$, speciálně algoritmy pro dělení polynomu lineárním a kvadratickým polynomem (faktorem) při známém kořenu polynomu (nulovém bodu - číslu x, pro které je $P_n(x) = 0$) - viz např.[12]. Popište je podrobněji, ověřte na příkladech ! *dělení polynomů*
4. Ke každé dvojici polynomů $P_m(x), P_n(x), m > n$ existují polynomy $Q(x), R(x)$ (podíl, zbytek) takové, že platí $P_m(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)$, kde stupeň polynomu $R(x)$ je menší nebo roven n. Koeficienty polynomů $Q(x), R(x)$ dostaneme ze soustavy lineárních rovnic, vzniklé porovnáním koeficientů u polynomů na obou stranách uvedené rovnosti.

5. Při známém rozkladu polynomu $P_n(x)$ na reálné lineární a kvadratické faktory lze provést *rozklad podílu* $P_m(x)/P_n(x),\ n,m \in \mathbb{N}$ - *racionální lomené funkce - na parciální zlomky*, v jejichž jmenovatelích jsou jednotlivé faktory rozkladu a koeficienty polynomů v čitatelích dostaneme výpočtem ze soustavy rovnic, vzniklé z porovnání koeficientů u polynomů na levé a pravé straně takové rovnosti po vynásobení jmenovatelem. Například *parciální zlomky*

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{12(x-2)} - \frac{x+4}{12(x^2+2x+4)},$$

$$\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{(x+4)(x+1)}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{-3}{20}\frac{4x+1}{x^2+4} + \frac{1}{20}\frac{12x+23}{x^2+1}.$$

6. Pro uvedené i jiné operace s polynomy máme řadu funkcí implementovaných např. v počítačových programech Matlab, Maple, Mathematica. Prostudujte a vyzkoušejte jejich nabídku operací !
7. Uveďte definiční obory a obory hodnot elementárních funkcí , nakreslete jejich grafy. Vyzkoušejte si kreslení jejich grafů na počítači.
8. Uveďte příklady implicitně zadaných funkcí které se dají upravit na explicitní tvar, i příklady takových implicitních předpisů, které obsahují více funkcí.
9. Obecněji se setkáme s termínem *algebraické funkce* s funkčním předpisem $F(x,y) = 0$, kde $F(x,y)$ je polynomem v proměnných x, y (mezi ně patří např. mocniny, racionální lomené funkce).
10. V matematických textech se často setkáme s explicitně definovanou funkcí $y = sign(x),\ x \in \mathbb{R}$, definovanou hodnotami -1,0,1 pro $x \in (-\infty,0), 0, (0,\infty)$. Nakreslete její graf !
11. Uveďte definiční obory, obory funkčních hodnot a základní vlastnosti exponenciálních a logaritmických funkcí (např. identity pro $\exp(x_1+x_2),\ \ln(x_1\cdot x_2), ...$). Nakreslete jejich grafy.
12. Zopakujte si definice, definiční obory a grafy goniometrických funkcí, vztahy mezi nimi, jejich vlastnosti (viz např. [3,6,7,8,11,12], odst. 2.4.2). Zde uvedeme jen stručný přehled jejich základních vlastností a vztahů. *funkce exponenciální logaritmické goniometrické*

$$|\sin(x)| \le 1, \quad |\cos(x)| \le 1, \quad \sin^2(x) + cos^2(x) = 1;$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, x \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y),\ \cos(x\pm y) = \cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y);$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}),\ \cos(x)+\cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

Ukažte odvození těchto formulí !

2.2 Složená funkce (superpozice funkcí)

Průvodce studiem

Kromě základních funkcí s jednoduchým předpisem má většina funkcí tvar *složené funkce*, kde při výpočtu její hodnoty postupně vyčíslujeme funkční hodnoty jednodušších funkcí zadaných jednotlivými částmi funkčního předpisu.

Při výpočtu hodnot funkce $y = f(x) = x/\sqrt{4-x^2}$ postupně počítáme hodnoty $y_1 = 4 - x^2,\ y_2 = \sqrt{y_1},\ y = f(x) = x/y_2$ - je to jednoduchý příklad *složené funkce.* Z definičních oborů a oborů funkčních hodnot jejích jednotlivých složek dostaneme závěr, že definičním oborem této funkce je otevřený interval $I = (-2, 2)$, oborem funkčních hodnot interval $(-\infty, +\infty)$.

Cvičení

1. Najděte definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{25 - x^2}$, nakreslete její graf.
2. Jaký je definiční obor funkce $f(x) = \ln(\ln(x^2 - 1))$?

Definice 2.3. Základním tvarem složené funkce je funkce s předpisem $y = f(g(x))$ s "vnitřní funkcí" $g : x \in I \to g(x) \in I_1$ a " vnější funkcí" $f :\ g(x) \to y \in J$. Obecněji tedy např. *složená funkce* $y = f_3(f_2(f_1(x)))$ postupně zobrazuje ($J_i = H(f_i),\ i = 1, 2, 3$) *složená funkce*

$$x \in I \to y_1 = f_1(x) \in J_1 \to y_2 = f_2(y_1) \in J_2 \to y = f_3(y_2) \in J_3 = J. \tag{2.3}$$

Často se pro označení takové složené funkce potkáme s označením $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ a termínem *"superpozice funkcí"*.
Říkáme, že dvě funkce $f(x), g(x)$ (i při různých funkčních předpisech) *se rovnají*, mají-li stejný definiční obor I a platí $f(x) = g(x),\ \forall x \in I$.
Jestliže tato rovnost platí pro $D(g) = I_1 \subset I = D(f)$, pak se funkce $g(x)$ nazývá *restrikcí (zúžením) funkce* $f(x)$ z definičního oboru I na I_1 . △

Příklad 2.4. Příklady různých tvarů stejných funkcí, restrikce funkce.

Funkce s předpisy $f(x) = (x^4 - 1)/(x^2 + 1),\ g(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$ se rovnají.

Funkční předpis $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$ se dá *rozložit na parciální zlomky*
$g(x) = (\frac{1}{4})/(1 - x) + (\frac{1}{4})/(1 + x) + (\frac{1}{2})/(1 + x^2)$ (předpis stejné funkce).

Funkce $f(x) = \sin(2x),\quad g(x) = 2\sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ se také rovnají.

Funkce $g(x) = x,\ x \in \langle 0, 1\rangle$ je restrikcí funkce $f(x) = |x|,\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

Funkce $g(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)},\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ je restrikcí funkce $f(x) = \sin(x)$.

Cvičení

1. Příkladem složené funkce je také *racionální lomená funkce*, definovaná jako podíl dvou polynomů $P_n(x)/P_m(x)$. Pro tyto funkce jsou speciální algoritmy pro jejich dělení ($P_n(x)/P_m(x) = Q_{n-m}(x) + R(x)/P_m(x)$ při $n > m$) a *rozkladu na parciální zlomky* (při $n < m$) implementovány v prostředcích symbolic computing (Maple, Matlab, Mathematica) - procvičte si na příkladech (viz např. odst. 2.1, [6,8])! Jak vyšetříme definiční obor takových funkcí ? Kdy představují podíl $P_n(x)/P_m(x)$ a jeho rozklad dvě ekvivalentní funkce, kdy půjde o zúžení ?

2. Uveďte další příklady složených funkcí, jejich definičních oborů a oborů funkčních hodnot. S pomocí počítače vykreslete jejich grafy. Dostatečně jemnou sítí hodnot argumentu se zabrání "přehlédnutí" bodů, v nichž funkce není definována (případně nás počítač nějakým způsobem na nespojitost upozorní).

2.3 Vlastnosti funkcí

Průvodce studiem

Nyní zformulujeme definice dalších vlastností funkcí, které odpovídají názorným geometrickým vlastnostem jejich grafů.

Definice 2.5. Funkce $f(x) : I \to J$ se nazývá na intervalu I

- *rostoucí*, jestliže platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I$;
- *klesající*, jestliže platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I$;
- v případě neostrých nerovností mezi funkčními hodnotami jsou takto definovány *neklesající a nerostoucí funkce* ;
  všechny tyto funkce jsou označovány společným názvem *monotonní funkce*, u rostoucích a klesajících funkcí pak *ryze monotonní funkce*;
- *sudá funkce*, jestliže platí $f(-x) = f(x),\ \forall x \in I$ (pro interval I symetrický vzhledem k nule);
- *lichá funkce*, jestliže platí $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in I$ (I symetrický);
- *ohraničená funkce*, jestliže existují konstanty c, d (meze) takové, že platí $c \leq f(x) \leq d,\ \forall x \in I$;
- *zdola (shora) ohraničená funkce*, jestliže existuje jen jedna z takových konstant (tedy $c \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq d \quad \forall x \in I$);
- *periodická funkce*, jestliže existuje kladná konstanta p (*perioda*) taková, že platí $f(x+p) = f(x),\ \forall x \in I = (-\infty, +\infty)$ (nebo na intervalu délky $kp,\ k \in \mathbb{N}$).
- *prostá funkce*, jestliže platí
  $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$ △

vlastnosti funkcí

Z předchozích definic plynou jisté *vlastnosti grafů* takových funkcí v rovině (x, y):

- graf sudé funkce je symetrický vzhledem ose x;
- graf liché funkce je symetrický vzhledem k počátku;
- graf periodické funkce nabývá stejných hodnot v navazujících intervalech délky p (opakuje se - případně i s periodou kp - objasněte).

vlastnosti grafů

Dokažte platnost těchto tvrzení (viz např. [3,6,7,8,11])! △

Cvičení

1. Dokažte, že funkce rostoucí i klesající jsou prosté funkce.

2. Uveďte příklady funkcí uvedených typů, ověřte si tyto vlastnosti na jejich grafech.
3. Nakreslete graf funkce nazývané *celá část čísla x*, která je označována symbolem $f(x) = [x]$ a definována předpisem $n \leq x < n + 1 \Rightarrow y = [x] = n, n \in \mathbb{N}$.
4. Je funkce $y = \tan(x)$ rostoucí funkcí na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$?

2.4 Inverzní funkce

Průvodce studiem

Naší úlohou je nyní při známé funkční hodnotě y funkce $y = f(x)$ určit odpovídající hodnotu argumentu x (k obrazu najít jeho vzor - inverzní (obrácené) zobrazení, funkci). Definice funkce ale vyžaduje, aby každému argumentu odpovídala jediná funkční hodnota - proto lze inverzní funkci najít jen pro původní prostá zobrazení. U jednoduchých funkčních předpisů prosté funkce $y = f(x)$ můžeme dostat funkční předpis inverzní funkce výpočtem proměnné x jako funkce proměnné y. V obecnějších případech, kdy neumíme takovou rovnici explicitně vyřešit, se zavádí pro inverzní funkci někdy speciální označení - viz např. odst. 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3.

Definice 2.6. Inverzní funkce
Jestliže funkce $f : I \to J$ je prostá, pak funkci $f^{-1} : J \to I$, pro kterou platí $\{y = f(x)\} \Rightarrow \{f^{-1}(y) = x\}$ nazýváme *funkcí inverzní k funkci* f. $\triangle$

Z definice inverzní funkce f^{-1} plyne, že její graf je vzhledem ke grafu funkce $f(x)$ symetrický podle osy prvního a třetího kvadrantu. Na počítači jej můžeme nechat vykreslit pouhou záměnou spočítaných hodnot x, y v oborech $D(f), R(f)$ (graf $f(x)$ na papíře stačí také obrátit proti světlu na druhou stranu a s opačným pořadím os, abychom tak uviděli graf inverzní funkce). Z definic složené a inverzní funkce také plyne, že složením funkcí $f(f^{-1})$, $f^{-1}(f)$ dostaneme identické zobrazení $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$ (viz [3-11]).
Funkce f, f^{-1} jsou shodné (identické), když platí $f(f(x)) \equiv x$. Ukažte příklady !

2.4.1 Funkce inverzní k elementárním funkcím

Příklady

1. Funkce inverzní k lineárnímu polynomu $P_1(x) = ax + b,\ a \neq 0$
   je lineární polynom $f^{-1}(x) = (x - b)/a$.

2. K funkci $y = x^2 + 2x - 1$ je na intervalu $< -2, +\infty)$ inverzní funkcí $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2} - 1$, na intervalu $(-\infty, -2)$ je $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 2} - 1$.

3. K funkci $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ je inverzní funkce $y = 1 + \sqrt[3]{x + 3}$,
   funkce $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ není prostá a nemá inverzní funkci v oboru $\mathbb{R}$.

4. K obecnému polynomu stupně $n \geq 2$ zpravidla neexistuje inverzní funkce definovaná na celé reálné ose (důvod - viz grafy polynomů lichého a zejména sudého stupně).

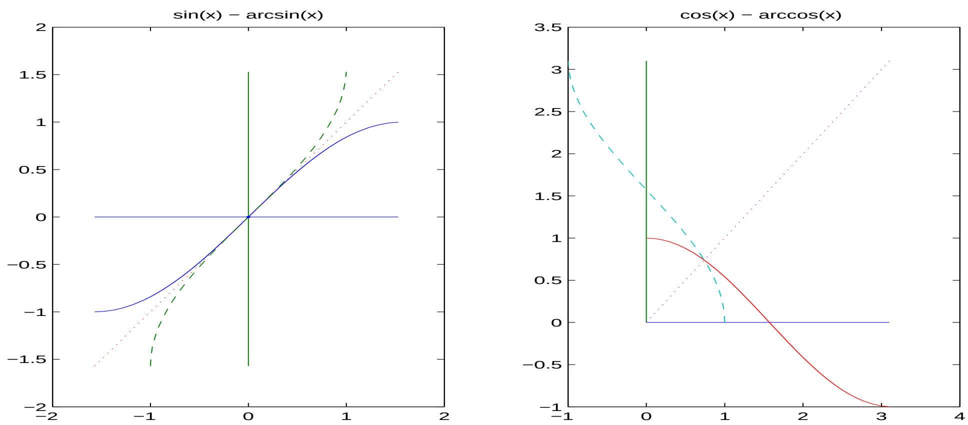
5. K funkci x^n je funkcí inverzní $x^{1/n}$.

6. K funkci $a^x, a > 0$ je inverzní funkcí $\log_a(x)$;
   speciálně k funkci e^x je inverzní funkcí "přirozený logaritmus" $\ln(x)$.

Uveďte definiční obory, obory funkčních hodnot pro uvedené dvojice funkcí f, f^{-1} a nakreslete jejich grafy.

2.4.2 Cyklometrické funkce - funkce inverzní ke goniometrickým funkcím

Funkce goniometrické (jiný používaný termín - trigonometrické funkce) $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$ patří do skupiny periodických funkcí. Při hledání funkcí inverzních k funkcím goniometrickým se musíme omezit na některý z intervalů jejich definičního oboru, ve kterém je taková funkce monotonní. Připomeňme si, že v matematické analýze a v algoritmech pro výpočet funkčních hodnot se jako argumentu goniometrických funkcí používá místo stupňové míry úhlu (úhel α) jeho oblouková míra x (vztah mezi nimi: $x = \alpha\pi/180$). Jako souhrné označení funkcí inverzních ke goniometrickým funkcím se používá termín *cyklometrické funkce*. Za definiční obor zúžené goniometrické funkce se pro konstrukci inverzní funkce zpravidla vybírá interval v okolí počátku.



obr. 1 a) $\sin(x) \leftrightarrow \arcsin(x)$, b) $\cos(x) \leftrightarrow \arccos(x)$

Ze známých vlastností goniometrických funkcí pak plynou následující závěry (s tradičním označením těchto inverzních funkcí, která zpravidla nepoužívají symbol f^{-1}).

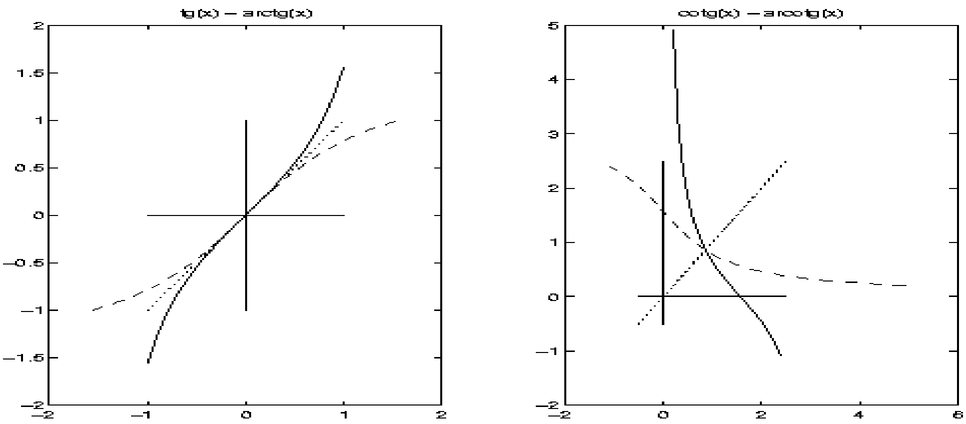
funkce arc $\cdots$

- K funkci $\sin(x),\ x \in I = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle,\ J = \langle -1, 1\rangle$ existuje inverzní funkce $\arcsin(x):\ x \in J \to I$; obě funkce jsou rostoucí, liché (obr. 1a).

- K funkci $\cos(x),\ x \in I = \langle 0, \pi\rangle,\ J = \langle -1, 1\rangle$ existuje inverzní funkce $\arccos(x) : x \in J \to I$; obě funkce jsou klesající (obr. 1b).

- K funkci $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x) :\ x \in I = (-\pi/2, \pi/2),\ J = (-\infty, \infty)$ existuje inverzní funkce $\arctan(x):\ x \in J \to I$;
  obě funkce jsou rostoucí, liché (obr. 2a).

- K funkci $\cot(x) = 1/\tan(x) : x \in I = (0, \pi) \to J = (-\infty, \infty)$ existuje inverzní funkce $arccot(x) : x \in J \to I$; obě funkce jsou klesající (obr. 2b).



obr. 2 a) $\tan(x) \leftrightarrow arctan(x)$, b) $cotg(x) \leftrightarrow arccotg(x)$

Úloha: Nakreslete grafy těchto inverzních funkcí s použitím grafů původní funkce, nebo s použitím implementací inverzních funkcí v prostředcích Matlab, Maple; setkáme se zde i s mírně odlišným označením *asin, acos, atan, acot, arctg, arccotg* a podobně. Například ale v Matlabu funkce $acot$ je funkcí inverzní k funkci $cot(x)$ (cotangens), ale pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ - tedy je to zcela jiná funkce než tradiční arccotangens !

2.4.3 Hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní

V literatuře (a v počítačových programech implementovány) najdeme také tyto funkce definované pomocí exponenciální funkce a označované jako *hyperbolické funkce* :

$$\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2, \quad \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2,$$

$$\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x), \quad \coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x).$$

Cvičení

1. Určete definiční obory a obory funkčních hodnot uvedených funkcí. Nakreslete jejich grafy, ukažte některé jejich vlastnosti (viz např. [12]).
2. Podle těchto výsledků určete definiční obory, obory funkčních hodnot a nakreslete grafy funkcí k nim inverzních, označovaných v literatuře a počítačových implementacích jako $arcsinh(x), arccosh(x), arctanh(x), arccoth(x)$, společným označením *hyperbolometrické funkce*. Uveďte některé jejich vlastnosti.

Poznámka 2.7. Grafem elementárních a většiny v praxi používaných funkcí je jistá křivka. Řada známých křivek popisujících pohyb bodu za různých podmínek (kružnice, spirály, cykloidy, kotálnice) není popsána explicitním předpisem v kartézských souřadnicích, ale předpisem v polárních nebo jiných souřadnicích. Často jsou také jednotlivé souřadnice $[x, y]$ křivky definovány pomocí dalšího parametru (*parametrické křivky*). To umožňuje vytvářet křivky v rovině, jejichž předpis v kartézských souřadnicích by byl složitý, nebo pro které jedné hodnotě proměnné x odpovídá více hodnot y. U prostorových křivek převažuje parametrické zadání jejich jednotlivých složek.

Příklad 2.8. V polárních souřadnicích ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ - úhel mezi vektorem $[x, y]$ a osou x v obloukové míře) jsou definovány např. křivky (viz např. [11])
- Archimedova (logaritmická) spirála předpisem $r = a \cdot \varphi,\ \varphi > 0, (r = a\exp(m\varphi))$;
- růžice funkčním předpisem $r = a \cdot \sin(k\varphi),\ k \in \mathbb{Z},\ \varphi > 0.$
Parametrickými rovnicemi pro souřadnice $[x(t), y(t)],\ t \in \mathbb{R}$ jsou definovány například
- cykloida : $x(t) = r(t - \sin(t)),\ y(t) = r(1 - \cos(t)),\ r > 0,$
- srdcovka: $x = r(t\cos(t) - \cos(2t)),\ y(t) = r(2\sin(t) - \sin(2t)),\ r > 0.$
Nakreslete s pomocí počítače jejich grafy ! Řadu dalších typů křivek (včetně prostorových) najdete např. v lit.[12].
V počítačové geometrii a grafice se hodně používá parametrických Bezierových křivek určených jejich tzv. *kontrolním polygonem.* Například polygonem s vrcholy $V_0, V_1, V_2;\ V_i = [x_i, y_i], i = 0, 1, 2$ je určena křivka $C(t) = [x(t), y(t)]$ předpisem
$C(t) = (1 - t)^2 V_0 + 2(t(1 - t)V_1 + t^2 V_2.$
Dále se tam setkáme s funkcemi, které se skládají z jednotlivých segmentů, které jsou polynomy stejného stupně (splajny).

Shrnutí

V této kapitole jsme uvedli obecnou definici reálné funkce jedné proměnné a jejího grafu (D 2.1), pojem složené funkce (D 2.3), charakterizovali jejich některé vlastnosti (D 2.5). Byla uvedena definice inverzní funkce (D 2.6), připomenuty funkce inverzní k elementárním funkcím, k funkcím trigonometrickým a hyperbolickým.

Pojmy k zapamatování

- Funkce a její graf. Polynomy, elementární funkce - jejich vlastnosti, grafy.
- Inverzní funkce - definice, vlastnosti, funkce inverzní k elementárním funkcím.
- Funkce cyklometrické a hyperbolometrické

Kontrolní otázky

1. *Jaké jsou hlavní vlastnosti polynomů ?*
2. *Vyjmenujte základní vlastnosti exponenciálních a logaritmických funkcí. Jaké jsou jejich vlastnosti a grafy při různých základech (* $a > 1, a = 1, 0 < a < 1$ *)?*
3. *Jaké jsou definiční obory, obory funkčních hodnot cyklometrických funkcí ?*
4. *Můžeme definovat funkce inverzní k trigonometrickým i na jiných intervalech (např. funkci inverzní k funkci kotangens na intervalu* $(-\pi/2, \pi/2)$*) ?*

Úkoly k textu

1. Jak najdeme definiční obor složené funkce ?

2. Kdy bude složená funkce $f(g(x))$ prostou funkcí ?

3. Je inverzní funkce prostou funkcí ?

4. Najděte funkce inverzní k funkcím $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$, $f(x) = \sin(2x + \pi/4)$.

5. Existuje funkce inverzní k funkci $f(x) = (1 + x^2)sgn(x),\ x \in (-\infty, \infty)$?

6. Existuje funkce inverzní k funkci $f(x) = 2x - x^2$ na některém intervalu ?

7. Ukažte, že platí $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$.

8. Najděte explicitní tvar parametricky zadané funkce $x = \arctan(t),\ y = arccotg(t),\ t \in (-\infty, \infty)$.

9. Ověřte, že níže uvedené parametrické rovnice
   a) $x = a + r\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b + r\frac{2t}{1+t^2},\ t \in (-\infty, \infty)$;
   b) $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1+t^2},\ t \in (-\infty, \infty)$;
   c) $x = t^2/2p, \quad y = t, \quad t \in (-\infty, \infty)$;
   d) $x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1-t^2},\ t \in (-1, 1) \cup (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   jsou rovnicemi kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly.

10. Za jakých podmínek splňuje parametrická křivka s předpisem $[x(t), y(t)]$ definici funkce $f(t) = y(x(t))$?

3 Posloupnosti reálných čísel

Studijní cíle: Prohloubit poznání pojmů posloupnosti a její limity, metod výpočtu limit, seznámit se s limitami některých důležitých posloupností.
Klíčová slova: posloupnost, limita posloupnosti; posloupnost ohraničená, vybraná, monotonní, konvergentní.
Potřebný čas: 250 minut.

Průvodce studiem

V této kapitole si prohloubíme znalosti o posloupnostech reálných čísel, které jsou funkcemi definovanými na množině nezáporných celých čísel (v rozšířeném pojetí i na množině všech celých čísel). Uvedeme způsoby jejich zadání (funkční předpis, rekurze), vlastnosti (monotonnost, ohraničenost). Uvedeme definici limity posloupnosti (pojem konvergentní posloupnosti) a způsoby jejího výpočtu. Podrobněji rozebereme několik důležitých posloupností a jejich limit, které doporučíme k zapamatování.

3.1 Posloupnosti - jejich definice a vlastnosti

Samotné slovo "posloupnost" napovídá, že jde o množinu prvků (členů posloupnosti) seřazených za sebou podle jistého pravidla. Ze středních škol jsou nám už známy posloupnosti aritmetické a geometrické. Tyto objekty byly studovány už v antickém období a s vývojem matematiky se postupně zobecňovalo a upřesňovalo jejich pojetí i odpovídající terminologie. Následující definice používá obecnější pojem "zobrazení", který znáte z předchozího učiva. *posloupnost*

Definice 3.1. *Posloupnost reálných čísel je zobrazení z množiny přirozených čísel (příp. celých nezáporných nebo celých čísel, jejich podmnožin) do množiny reálných čísel:* $n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Podobně jako funkci můžeme i posloupnost - označovanou symbolem $\{a_n\}$, nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - definovat jejím funkčním předpisem, který číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Takto jsou definovány např. posloupnosti s členy *explicitní předpis*

$$a_n = n^2,\ a_n = n^{1/n},\ a_n = (1 + 1/n)^n,\ a_n = (-1)^n(1 - 1/n).$$

Posloupnosti jsou také často definovány pomocí *rekurentních předpisů* mezi několika členy posloupnosti - takto jsou definovány známé posloupnosti *rekurze*
- aritmetická $a_{n+1} = a_n + d$, geometrická $a_{n+1} = qa_n$ (d - diference, q - kvocient);
- posloupnost pro iterační výpočet $\sqrt{b},\ b > 0$: $y_{n+1} = (y_n + b/y_n)/2$;
- nebo také "aritmeticko-geometrická posloupnost" $a_{n+1} = qa_n + d$.

Takové posloupnosti jsou pak jednoznačně určeny až konkretním zadáním jednoho z členů posloupnosti (např. a_1).
Složitějšími rekurentními předpisy jsou např.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_{n+3} - (n + 1)a_{n+2} + a_n^2 = \sqrt{n},$$

které definují rekurzivně číselnou posloupnost při zadání dvou, resp. tří po sobě jdoucích členů. Takovými rekurzemi (diferenčními rovnicemi) jsou popisovány různé modely ve finančnictví a ekonomii, celá řada výpočetních algoritmů v různých oblastech. Grafickým znázorněním bodů $[n, a_n]$ v rovině - grafem takové posloupnosti - dostaneme názornou představu o vlastnostech posloupnosti, analogických vlastnostem funkce z předchozí kapitoly. Jejich vlastnosti jsou určeny buď přímo explicitním předpisem pro n-tý člen posloupnosti, nebo koeficienty v rekurzi a volbou počátečních hodnot (z rekurze lze v jednodušších případech najít explicitní předpis pro posloupnost - např. s použitím funkce $rsolve$ v systémech Maple, Mathematica).

vlastnosti posloupností

Definice 3.2. *Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá*

- *rostoucí (neklesající)*, když platí $a_n < a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- *klesající (nerostoucí)*, když platí $a_n > a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- *monotonní*, je-li rostoucí nebo klesající (v případě ostrých nerovností *ryze monotonní*);
- *ohraničená (omezená)*, jestliže existují čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že platí $A \leq a_n \leq B$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- *zdola, shora ohraničená (omezená) posloupnost* v případech omezení jen s jednou z takových konstant A,B. $\triangle$

Příklady: s použitím předchozích definic pro posloupnosti s následujícími předpisy si ověřte jejich uvedené vlastnosti:

1. $a_n = (2n+1)/(n+4)$; $a_n = (1+1/n)^n$; $a_n = \sqrt{n} \cdots$ rostoucí posloupnosti;
2. $a_n = (1+1/n)^2$; $c > 0$, $a_n = (c)^{1/n}$; $a_n = (n)^{1/n} \cdots$ klesající posloupnosti;
3. $a_n = (-1)^n(1-1/n)^n$; $a_n = (1+1/n)^n$; $a_n = (-1)^n + 1/n$, $a_n = 2n.\sin(n\pi/2)/(n+1)$, $a_n = 3/(2n-7) \cdots$ ohraničené posloupnosti.

Ověřte si tyto výsledky také pomocí grafického zobrazení těchto posloupností !

Definice 3.3. Pro danou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ nazýváme posloupnost $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ *vybranou posloupností* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\triangle$

Příklady:

- Z množiny přirozených čísel můžeme vybrat posloupnosti sudých nebo lichých čísel, nebo násobků daného čísla, případně jeho mocnin.
- Z ohraničené posloupnosti s předpisem $a_n = (-1)^n(1+1/n)$ můžeme vybrat klesající posloupnost kladných čísel i rostoucí posloupnost záporných čísel (pro sudá, resp. lichá n).
- Z posloupnosti s předpisem $a_n = \sin(n\pi/2)$ můžeme vybrat tři posloupnosti s konstantními členy $-1, 0, 1$.
- Uveďte další příklady (viz např. lit.[1-8])!

3.2 Limita posloupnosti, konvergentní posloupnosti

Průvodce studiem

Limita je jedním ze základních pojmů matematické analýzy. Jako limitu posloupnosti si intuitivně představujeme číslo, ke kterému se členy posloupnosti s rostoucím indexem blíží se vzdáleností klesající k nule. S analýzou složitějších posloupností a rozšiřováním pojmu limity na další objekty byla vypracována následující definice limity posloupnosti a konvergentní posloupnosti reálných čísel.

Definice 3.4. (Definice limity posloupnosti)
Posloupnost $\{a_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ *má vlastní limitu* a *(konverguje k limitě* $a \in \mathbb{R}$*, je konvergentní), jestliže ke každému* $\epsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *platí* $|a_n - a| < \epsilon$ *.*
Používané způsoby zápisu jsou

definice limity posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{nebo} \quad a_n \to a \quad \text{pro } n \to \infty, \quad \text{nebo} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a. \tag{3.1}$$

Jestliže ke každému konečnému číslu $A > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > A$, pak říkáme že tato posloupnost má *nevlastní limitu* $+\infty$ (nebo *konverguje k* $+\infty$ - s označením $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) a podobně pro nevlastní limitu $a_n \to -\infty$.
Posloupnosti které nemají vlastní limitu se označují jako "*divergentní posloupnosti*", případně "*divergentní oscilující posloupnosti* ". △

S použitím složitější symboliky můžeme definici vlastní limity posloupnosti psát stručně takto [viz obr. 3 a)-c)] :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow \{\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow \; |a_n - a| < \epsilon\}. \tag{3.2}$$

Podobně můžeme v této definici také použít pojmu "okolí čísla a " (zformulujte takovou verzi !).
Analogicky můžeme definovat i limitu posloupnosti komplexních čísel (zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ - zformulujte !).

Příklad 3.5. S použitím definice ověřte platnost následujících tvrzení:

Posloupnost $a_n = 1/\sqrt{n}$ je konvergentní; geometrická posloupnost $a_n = q^n$ s kvocientem $|q| < 1$ je konvergentní, při $|q| > 1$ je divergentní.

Posloupnosti s předpisy $a_n = (-1)^n$, $a_n = (-1 + 1/n)^n$, $a_n = \sqrt{n}$, $a_n = n(-1)^n$, aritmetická posloupnost - jsou divergentní posloupnosti.

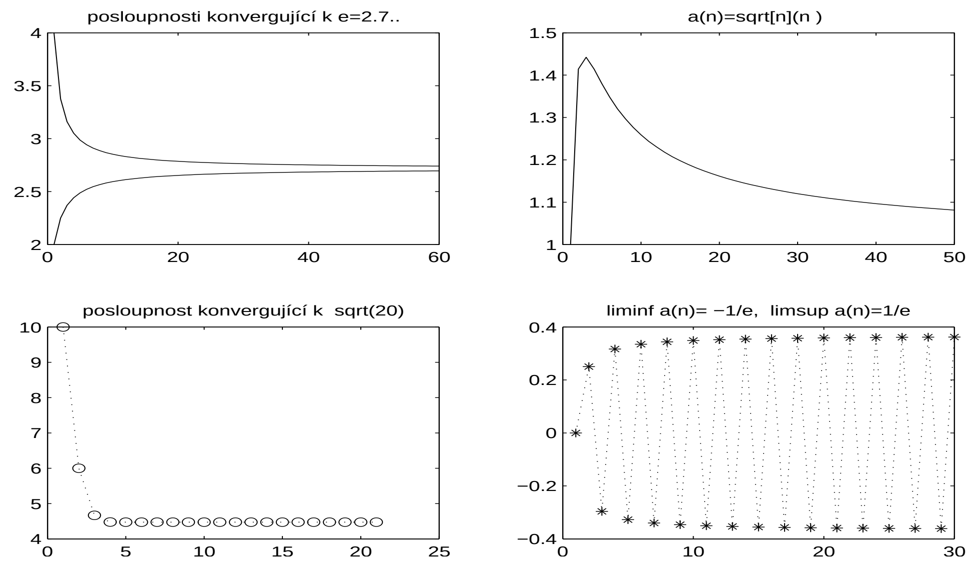
Věta 3.6. *Mezi posloupnostmi s jednotlivými uvedenými vlastnostmi (ohraničenost, konvergence, monotonnost) platí následující vztahy:*

vlastnosti konvergentních posloupností

- *Každá konvergentní posloupnost je omezená a má právě jednu limitu.*
- *Každá ohraničená a monotonní posloupnost je konvergentní.*
- *Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost (Bolzano - Weierstrass).*

Důkaz. Důkaz prvního tvrzení se provede sporem - kdyby existovaly různé limity, pak by v jejich disjunktních okolích ležely pro dostatečně velké n_0 všechny členy posloupnosti s indexy $n > n_0$.
Důkazy ostatních tvrzení najdete např. v lit. [3 - 8,11]) . □

Poznámka 3.7. Limity posloupností a také i vzájemně různé limity vybraných posloupnosti představují hromadné body (hodnoty) oboru jejich funkčních hodnot. Například posloupnosti $\{(-1)^n\},\ \{(-1+1/n)^n\},\ n \in \mathbb{N}$ mají hromadné body -1, 1 . Uveďte další příklady!



obr. 3 a), b), c) - konvergentní posloupnosti, d) - divergentní posloupnost

3.3 Operace s limitami posloupností

Při výpočtu limit často rozdělujeme složitější výrazy na jednodušší části. Pak používáme jednoduchá pravidla, zformulovaná v následující větě (viz [3-8,11]).

pravidla pro výpočet limit

Věta 3.8. *Jestliže pro členy dvou konvergentních posloupností platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

pak také platí

1.

$$\lim_{n\to\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a \cdot b; \quad \textit{při}\ \ b \neq 0 \quad \textit{je} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b};$$

3.

$$a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0 \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \leq b.$$

4. Jestliže pro posloupnost $\{c_n\}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ ("sevřená posloupnost") a pro limity a, b platí $a = b$, pak platí $a = \lim_{n\to\infty} c_n = b$.

Důkaz. Ukážeme stručně postup důkazu jen pro limitu součinu a podílu.
Obě konvergentní posloupnosti jsou ohraničené - tedy existuje konstanta $C > 0$ taková, že $|a_n| < C,\ |b| < C$ pro dostatečně velká n. Proto
$\forall \epsilon > 0\ \exists n_1, n_2 : \forall n \geq n_1\ \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon/(2C),\ \forall n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon/(2C).$
Pro $n > n_3 = max\{n_1, n_2\}$ pak platí
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < 2C \cdot \epsilon/(2C) = \epsilon.$
Pro limitu podílu našich konvergentních ohraničených posloupností s konstantami $0 < C_1 \leq |b_n| \leq C_2$ platí, že $\forall n > n_3$,

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}| \leq \frac{1}{bC_1}|a_n b - ab + ab - ab_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{bC_1}[|b||a_n - a| + |a||b_n - b|] = \frac{|a| + |b|}{|b|C_1}\epsilon = \epsilon_1.$$

Pro libovolné ϵ_1 je tedy odpovídající ϵ pro posloupnosti $\{a_n\},\ \{b_n\}$ možno najít ze vztahu $\epsilon = \epsilon_1 C_1/(|a|/|b| + 1)$.
Tím jsme podle definice limity dokázali druhé tvrzení věty.

□

Příklady

1. Po vyčíslení dostatečného počtu členů posloupnosti s předpisem $a_n = \sqrt[n]{n}$ můžeme vyslovit hypotézu, že její limitou je číslo jedna (viz obr. 3b). Podrobnější analýza a důkaz se dá provést takto: při označení

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,\ h_n \geq 0 \quad \text{platí} \quad n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n + \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2.$$

   Odtud plyne, že

$$h_n^2 \leq \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}(1 + h_n) = 1. \qquad (3.3)$$

2. Pro posloupnost $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty},\ n > n_0 \geq a > 1$ platí $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \quad (\to 1)$.
   Podobně pro $0 < a < 1$ a $c = 1/a > 1$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}(1/\sqrt[n]{c}) = 1. \quad \text{Tedy} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \forall a > 0. \qquad (3.4)$$

3. Pro $c > 0,\ k \in \mathbb{Z},\ d = \sqrt[n]{c},\ c \neq 1$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{c^k} - 1}{\sqrt[n]{c} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)(d^{k-1} + d^{k-2} + \cdots + d + 1)}{d-1} = k. \qquad (3.5)$$

4. Jestliže posloupnost zadaná rekurzí $y_{n+1} = [(m-1)y_n + a/y_n^{m-1}]/m$ při $a > 0$ konverguje k číslu b, pak $b = \sqrt[m]{a}$ (viz obr. 3c pro $n = 20, m = 2$).

5. Posloupnost s rekurentním předpisem $y_{n+2} = (y_n - y_{n+1})$ je speciálním případem *diferenční rovnice* (ty patří do širší oblasti tzv. funkcionálních rovnic v matematice a hledají explicitní předpis pro její řešení). Tato rekurence je splněna posloupnostmi s explicitním předpisem

$$y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad r_1 = (1 - \sqrt{5})/2,\ r_2 = (1 + \sqrt{5})/2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Množina takových posloupností obsahuje tedy jak posloupnosti ohraničené (při $c_1 = 0$), tak i posloupnosti neohraničené (v ostatních případech). Každá taková ohraničená posloupnost má za limitu nulu. Můžeme formulovat také inverzní problém - pro zadananou posloupnost hledat rekurzi, kterou její členy splňují. Např. posloupnost $a_n = 1/n$ splňuje rekurzi $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$ - dokažte !

6. Pro $c > 0$ a posloupnost definovanou prvním členem a rekurzí

$$a_1 = \sqrt{c},\ a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \qquad \text{je} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} + \sqrt{c}\sqrt{1 + \frac{1}{4c}}.$$

   Dokažte !
   (Návod - posloupnost má kladné členy, pro její limitu platí $a^2 - a - c = 0.$)

Poznámka 3.9. Pro posloupnosti definované na obecnějších oborech funkčních hodnot byl zaveden pojem *cauchyovská posloupnost* takto:
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je cauchyovská*, když platí

cauchyovská posloupnost

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \quad \forall\, n, m > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon. \tag{3.6}$$

V rámci našeho textu jsou pojmy "konvergentní posloupnost" a "cauchyovská posloupnost" ekvivalentní (podrobněji viz např.[7]). △

V následujících příkladech posloupností použijte pravidel z V 3.8 k vyšetření jejich konvergence.

Příklady výpočtů limit

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2 + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 1/n^2}{1 + 2/n} = 3;\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 10}{n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n + 10/n^3}{1 + 1/n^3} = 0.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0, 1, +\infty \quad \text{pro } |c| < 1,\ c = 1, |c| > 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = 0.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} [1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2]/n^3 = 4/3.$$

4. Pro posloupnost s členy $a_n = \sin(n\pi/2)/\ln(n)$ platí
   $|a_n| < 1/\ln(n) \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

5. Posloupnost $a_n = \frac{2n}{n+1}\sin(\frac{n\pi}{2})$ nemá limitu; má hromadné body $-2, 0, 2$.

6. Pro $|a| < 1,\ |b| < 1$ a posloupnost definovanou pomocí geometrických řad

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} a^j / \sum_{j=0}^{n} b^j \quad \text{platí} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1-b}{1-a}.$$

   Co platí pro tuto limitu při jiných hodnotách parametrů a, b ?

7. Pro výpočet následující limity použijeme nerovnost odvozenou z binomické formule : $3^n < 4n(n-1)(n-2)/3$; odtud plyne

$$0 < \frac{n^2}{3^n} < \frac{3n^2}{4n(n-1)(n-2)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0.$$

Příklad 3.10. Velmi známá konvergentní posloupnost racionálních čísel s iracionální limitou $e = 2,7182...$ *(Ludolfovo číslo)* má funkční předpis $a_n = (1+1/n)^n$. Uveďme stručně jednotlivé kroky důkazu konvergence této posloupnosti. *číslo* e

1. Tato posloupnost je zdola ohraničená (viz obr. 3a), neboť platí

$$2 \le (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots > 2 + \frac{n-1}{2n} \to 2.5.$$

2. Z Bernoulliho nerovnosti $(1+x)^n > 1 + nx \;\; \forall x > -1$ plyne, že

$$(1-\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

3. Tato posloupnost je monotonně rostoucí, neboť z 1.-2. plyne, že

$$(1+\frac{1}{n})^n > (1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}.$$

4. Tato posloupnost je shora ohraničená, neboť s použitím binomické formule a vzorce pro součet geometrické řady dokážeme, že

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) <$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

5. Protože naše posloupnost je ohraničená a monotonně rostoucí, je konvergentní.

Poznámka 3.11. Podobně můžeme dokázat, že posloupnost $a_n = (1+1/n)^{n+1}$ je klesající a má stejnou limitu e (viz obr. 3a). $\triangle$

Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (V 3.6) lze z každé ohraničené posloupnosti vybrat konvergentní posloupnost. Její limita je pak hromadným bodem množiny $\{a_n\}$. Jestliže pro různé vybrané posloupnosti dostaneme různé limity (hromadné body), pak největší (resp. nejmenší) z nich označujeme jako

$\limsup_{n\to\infty} a_n$, resp. $\liminf_{n\to\infty} a_n$ ...(*limes superior, inferior*).

Například oscilující posloupnost $a_n = \cos(n\pi/3)$, $n \in \mathbb{N}$ má hromadné body $\{-1, -1/2, 1/2, 1\}$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$. *lim sup* *lim inf*
Posloupnost $a_n = (-1)^n(1-1/n)^n$ je divergentní; vybrané posloupnosti jejích sudých nebo lichých členů konvergují k limitám (viz obr. 3d)

$$1/e = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad -1/e = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Z definice limity pak můžeme dokázat platnost následujícího tvrzení:

Věta 3.12. *Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu právě tehdy, když platí*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \qquad \triangle$$

Jinými zajímavými posloupnostmi s různými vlastnostmi a limitami jsou např. *zajímavé limity*

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

2. $$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

3. $$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

4. $$\lim_{n\to\infty} [\frac{2.4.6\cdots 2n}{1.3.5\cdots(2n-1)}]^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}. \quad \text{(Wallis)}$$

5. $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = a.$$

6. $$a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

7. $$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Jestliže při výpočtu limit nejsou splněny předpoklady uvedených pravidel, dostáváme tzv. *neurčité výrazy typu* $\infty - \infty,\ \infty/\infty,\ 0/0, 0\cdot\infty$, které mohou v limitě nabývat různých hodnot, nebo nemít limitu. Prostudujte příklady limit takových posloupností - např. $\quad a_n = n^p/n^q; \quad p,q \in \mathbb{R},\ p > q,\ (p \leq q);$ *neurčité výrazy*

$$c_n = n(\sqrt{a + 1/n} - \sqrt{a}) \quad (= n\frac{1/n}{\sqrt{a+1/n} + \sqrt{a}} \to \frac{1}{2\sqrt{a}});$$

(další vhodnou techniku jejich výpočtu - aplikaci l'Hospitalova pravidla - uvedeme v kap. 6.3)

Shrnutí

V této kapitole jsme si zopakovali pojem posloupnosti (D 3.1)jako zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. To může být zadáno funkčním předpisem, nebo rekurzí a počáteční podmínkou. Popsali jsme několik vlastností posloupností (D3.2) a definovali limitu posloupnosti (D 3.4). Operace používané pro výpočet limit jsou popsány ve (V 3.8). Seznámili jsme se s několika důležitými posloupnostmi a jejich limitami.

Pojmy k zapamatování

- Posloupnost a způsoby jejího zadání; ohraničené, monotonní, konvergentní posloupnosti.

- Limita posloupnosti, metody jejího výpočtu, hromadné body posloupnosti, vybrané posloupnosti a jejich limity.
- Limity posloupností $\{1/n\}, \{\sqrt[n]{n}\}, \{(1+1/n)^n\}$.

Kontrolní otázky

1. *Uveďte rozdíly mezi pojmy maximum, supremum, (minimum, infimum)!*
2. *Jaké jsou vztahy mezi pojmy hromadný bod posloupnosti, její limita, limes superior, limes inferior ?*
3. *Je monotonní posloupnost konvergentní ?*
4. *Jaký je rozdíl v definicích konvergentní a cauchyovské posloupnosti ?*

Úkoly k textu

1. Najděte hromadné body a limity posloupností
   a) $a_n = 1 + n\sin(n\pi/2)$, $\quad b)\ a_n = (-1)^n(3 + 10/n)$.
2. Pro které hodnoty parametrů a, b, c, d jsou posloupnosti
   $y_n = (an + b)/(n - 1);\ z_n = (an + b)/(cn + d)$ konvergentní, monotonní ?
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (1/a_n) = 0;$ dokažte.
4. Najděte limity posloupností $\{\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}\}, \quad \{(1 + 1/(2n))^n\}, \quad n(\sqrt{n^2+1} - 1)$.
5. S pomocí počítače si ověřte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{n=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1},\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0,\ c > 0.$$

Řešení

1. a) $-\infty, 0, +\infty;$ $\qquad$ b) $3, -3$.
2. $\{y_n\} \to a\ \forall a, b, \in \mathbb{R};$ klesající pro $a, b > 0;$
   $\{z_n\} \to a/c$ pro $c \neq 0$, rostoucí pro $ad > bc, c > 0$.
3. $|a_n| > C > 0 \Rightarrow |1/a_n - 0| = |1/a_n| < 1/C,\ C \to +\infty$.
4. a) $3;$ $\qquad b)\ \sqrt{e};$ $\qquad c)\ 1/2$.

4 Limita a spojitost funkce

Studijní cíle: V této kapitole přeneseme techniky studia diskretních objektů na studium jevů spojitých. Použijeme znalosti limity posloupnosti k definici limity funkce v hromadných vlastních a nevlastních bodech definičního oboru. Uvedeme pak ekvivalentní definici limity funkce v bodě pomocí pojmů ϵ, δ -okolí. K praktickému výpočtu limit složitějších funkcí použijeme pravidel pro operace s limitami. Pomocí pojmu limity funkce v bodě se pak definuje spojitost funkce v bodě a na intervalu. Uvedeme v přehledu základní vlastnosti spojitých funkcí a operace zachovávající spojitost. Ukážeme si postup při vyšetřování spojitosti funkce, příklady spojitých i nespojitých funkcí.
Klíčová slova: hromadný bod, (ryzí) okolí bodu, limita funkce, jednostranná limita; spojitost a nespojitost funkce v bodě, stejnoměrná spojitost funkce na intervalu.
Potřebný čas: 300 minut.

Průvodce studiem

Limita funkce patří k základním pojmům matematické analýzy. Vystihuje lokální chování funkce v okolí jistého bodu, v němž ani její funkční hodnota nemusí být definována. Pochopení a použití tohoto termínu nám umožní přesněji popsat vlastnosti i formálně jednoduchých funkcí v okolí bodů, kde funkční předpis nedefinuje funkční hodnotu, nebo ji stanoví odlišně od ostatních bodů, nebo kde dochází v okolí takového bodu k obtížně kontrolovatelným rychlým změnám funkčních hodnot.

V této kapitole budeme opět často používat pro body na osách x, y v rovině pojmy *okolí, pravé a levé okolí, ryzí okolí, hromadný bod; u funkcí - definiční obor a obor funkčních hodnot, jejich vlastnosti* (viz. kap.1,2, [2-3,6-8]). Použijeme je k zavedení pojmů *limita funkce, spojitá funkce* a ke studiu vlastností spojitých funkcí.

4.1 Limita funkce - definice

Intuice nám napovídá, že funkce má limitu L v bodě x_0, jestliže při $x \to x_0$ pro posloupnost hodnot této funkce platí $f(x) \to L$. Příklady nám však ukáží, že taková formulace vyžaduje upřesnění (různé vybrané posloupnosti funkčních hodnot mohou konvergovat k různým limitám). Proto pojem limity funkce v bodě zavedeme nejprve pomocí definice, která zpřesňuje toto intuitivní pojetí s pomocí nám známého pojmu limity posloupnosti (Heine).

Definice 4.1. Funkce $f(x)$ má v hromadném bodě x_0 svého definičního oboru $D(f)$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže *pro každou posloupnost bodů* $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, $\{x_n\} \to x_0$ *posloupnost funkčních hodnot* $\{f(x_n)\}$ *konverguje k číslu* L . Používaný symbolický způsob zápisu je △

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \quad \text{nebo} \quad f(x) \to L \quad \text{pro } x \to x_0. \tag{4.1}$$

Heine

Při vyšetřování limit funkcí je vzhledem k obtížné kontrole splnění předpokladů této definice (.. pro každou posloupnost ..) často vhodnější jiná, ekvivalentní formulace definice limity funkce (Cauchy).

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Definice 4.2. Funkce $f(x)$ má v hromadném bodě $x_0 \in D(f)$ limitu L, když ke každému ϵ-okolí bodu L existuje ryzí δ-okolí bodu x_0 takové, že platí

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon. \tag{4.2}$$

Cauchy

V symbolickém zápisu tato definice má tvar (viz obr. 4a)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0\; \exists \delta > 0 \quad \text{takové, že}$$

$$\forall x \neq x_0 : \; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L)| < \epsilon. \tag{4.3}$$

Když si připomeneme, jak je definováno okolí nevlastních bodů reálné osy ($+\infty, -\infty$), a konvergence posloupnosti k nim, pak poznáme, že v obou těchto definicích jsou zahrnuty i případy označované jako
- *vlastní limita L funkce v nevlastním bodě:* $x \to \pm\infty,\; L \in \mathbb{R}$;
- *nevlastní limita ve vlastním bodě* x_0 : $x \to x_0, L = \pm\infty$;
- *nevlastní limita v nevlastním bodě:* $x \to \pm\infty,\; L = \pm\infty$

(s možností obou znamének +,- u symbolů ∞).

nevlastní limity

Pokud v definici použijeme jen levé či pravé okolí bodu x_0, pak dostaneme definici pro *limitu funkce $f(x)$ v bodě x_0 zleva, zprava*. Pro ně se používá symbolů $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, nebo také $f(x_0^-), f(x_0^+)$ $\triangle$

limita zleva zprava

U většiny jednoduchých funkcí poznáme přímo z funkčního předpisu a příslušného grafu, ve kterých bodech dochází k problémům při určování limity (i když je třeba jisté opatrnosti - například mít dostatečně hustou síť bodů pro kreslení grafu).

Příklad 4.3. Graf funkce $f(x) = 1/(1+x)$ nám napovídá, že platí

$$a) \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{1+x} = -\infty, \quad b) \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{1+x} = +\infty,$$

$$c) \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}, \quad d) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = 0.$$

Jednoduchým výpočtem si ověříme, že nerovnost

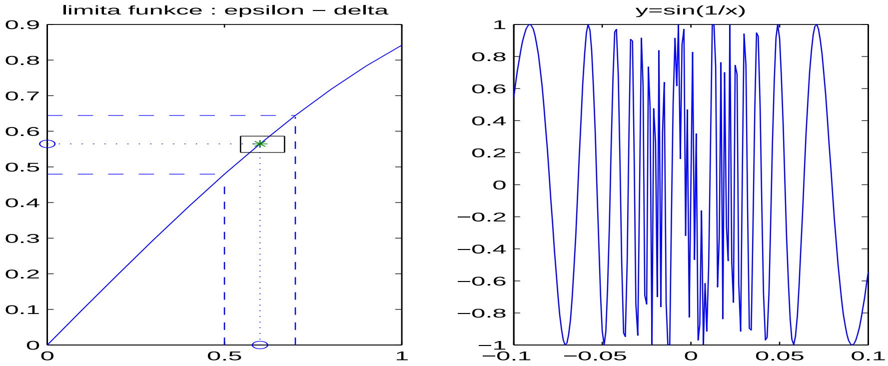
$$|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}| < \epsilon \quad \text{je splněna pro} \quad |1 - x| < 2\epsilon = \delta, \quad \text{(případ c))}$$

nerovnosti $1/(1+x) < \epsilon$, $1/(1+x) > C$ jsou splněny pro $x > 1/\epsilon - 1$, $x < 1/C - 1$ (případy d), b)).
Tím jsme si podle definice limity ověřili uvedené výsledky (doplňte případ a)!).

Příklad 4.4. Funkce $f(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$ není definována v bodě $x = -1$.
Po ekvivalentní úpravě funkčního přepisu na $f(x) = x - 1,\; x \neq -1$ je zřejmé, že $\lim_{x \to -1} f(x) = -2$. (Dokažte pomocí definice !)

Příklad 4.5. Funkce $f(x) = \sin(1/x)$ je definována pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; bod $x_0 = 0$ je ale hromadným bodem defičního oboru a můžeme proto v něm hledat limitu. Jak nám ale napoví graf této funkce (obr. 4b), v každém jeho δ-okolí jsou hodnoty $1/x$ zobrazeny do okolí nevlastních bodů $+\infty, -\infty$, kde hodnoty složené funkce $\sin(1/x)$ vyplní celý interval $[-1, 1]$ a nevejdou se tak do dostatečně malého ϵ-okolí jakékoliv jediné hodnoty L z tohoto intervalu. Proto tato funkce nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.
Podobně z grafu funkce $\sin(x)$ vidíme, že tato funkce nemá limitu v nevlastním bodě $x = +\infty$. (Dokažte pomocí definice !)

$\sin(1/x)$



obr. 4 a) - definice limity funkce, b) - příklad neexistence limity

Příklad 4.6. Funkce $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0$
má v nevlastním bodě $x = +\infty$ nevlastní limitu: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
protože pro každé číslo $A > 0$ a všechna čísla $x > A^2$ je $\sqrt{x} > A$.
Funkce $f(x) = 1/(x^2-1)$ má v nevlastním bodě $x = +\infty$ vlastní limitu rovnu nule, neboť $\forall\epsilon > 0$ je $1/(x^2-1) < \epsilon$, $\forall x > \sqrt{1+1/\epsilon}$ (okolí nevlastního bodu $x_0 = +\infty$). Jaké jsou její limity pro $x \to 1,\ x \to -1$?

Příklad 4.7. Funkce $\sin(x)/x,\ \tan(x)/x$ nejsou přímo definovány v hromadném bodě $x = 0$ svých definičních oborů. Přesto můžeme přímo z jejich geometrické definice (s úhlem v obloukové míře - nakreslete si obrázek !) odhadnout, že obě tyto funkce mají v tomto bodě stejnou limitu rovnou jedné. Dokázat to přímo z definice je o něco obtížnější (ověřte si) a provedeme to později s použitím dalších pravidel (viz odst. 4.11, 6.3).
Z obou definic limity funkce ovšem snadno ukážeme, že " Diracova funkce " $\delta(x)$ definovaná jedničkou pro racionální a nulou pro iracionální reálná čísla nemá limitu v žádném bodě reálné osy.

Poznámka 4.8. Zdůrazněme, že v Cauchyho definici limity je pořadí symbolů $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\cdots$, které nelze obrátit beze ztráty smyslu této definice. Jak jsme ukázali v předchozím, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje, ale

$$\forall\,\delta > 0\ \exists\epsilon > 0 \quad \text{takové, že pro} \quad |x| < \delta \quad \text{je}\ |\sin(1/x)| < \epsilon\ (= 2, \cdots).$$

Podobně to platí i pro limitu posloupnosti (uveďte příklad !). $\triangle$

Z definice limity funkce v bodě lze poměrně snadno dokázat následující tvrzení.

Věta 4.9. Vlastnosti limit funkce

1. *Každá funkce má v libovolném bodě nejvýš jednu limitu.*
2. *Má-li funkce v bodě x_0 vlastní limitu, pak existuje jeho ryzí okolí takové, že tato funkce je na něm ohraničená.*
3. *Funkce má ve vlastním bodě x_0 limitu (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když v něm má limitu zleva i limitu zprava a obě tyto limity jsou si rovny.*
4. *Jestliže platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1 < L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, pak existuje takové ryzí okolí bodu x_0, v němž platí $f(x) < g(x)$.* $\triangle$

Proveďte si jejich důkaz (viz např. [3-8])!

4.2 Pravidla pro počítání s limitami funkcí

Počítat limity složitějších funkcí jen s použitím definice limity by mohlo být složité. Proto byla odvozena pravidla, jak je možno počítat limity složitějších funkcí pomocí limit jednotlivých částí funkčního předpisu. Výsledná pravidla jsou podobná pravidlům, která platí pro výpočet limit posloupností.

Věta 4.10.
Jestliže existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1, \; \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2,$ *pak platí :*

1.
$$\lim_{x \to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 L_1 + c_2 L_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\textit{pokud } L_2 \neq 0).$$

3. *Jestliže existuje ryzí okolí bodu* x_0*, v němž platí* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *sevření*

$$\textit{a platí} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x), \quad \textit{pak také} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

4. *Pro limitu složené funkce* $F(x) = f(g(x)), \; g : I \to J_1, \; f : J_1 \to J, \; x_0 \in I$ *platí:*

$$\textit{jestliže} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = a, \; \lim_{y \to a} f(y) = L,$$

a existuje ryzí okolí bodu x_0 *takové, že v něm* $g(x) \neq a$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L.$

5. *Jestliže* $L_1 = 0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v některém okolí bodu* x_0,

$$\textit{pak} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0. \qquad \triangle$$

Třetí tvrzení se někdy také označuje jako " věta o sevření".

Důkaz. Postup při důkazu těchto tvrzení si ukážeme na limitě součinu dvou funkcí a za předpokladu $L_1 L_2 \neq 0$ (zvažte ostatní případy !).
Funkce $f(x), g(x)$ jsou v dostatečně malých ryzích okolích bodu x_0 ohraničené a proto existují konstanty C_1, C_2 takové, že platí $|f(x)| \leq C_1, \; |g(x)| \leq C_2$. Z definice limit L_1, L_2 plyne, že pro každá $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ existují taková ryzí δ_1, δ_2 -okolí bodu x_0, že platí $|f(x) - L_1| < \epsilon_1, \; |g(x) - L_2| < \epsilon_2$.
V jejich průniku platí $|f(x)g(x) - L_1 L_2| =$

$$= |f(x)g(x) - L_1 g(x) + L_1 g(x) - L_1 L_2| = |((f(x) - L_1)g(x) + (g(x) - L_2)L_1| \leq$$

$$\leq |g(x)||f(x) - L_1| + |L_1||g(x) - L_2| \leq C_2 \epsilon_1 + |L_1| \epsilon_2.$$

Ke splnění podmínky $|f(x)g(x) - L_1 L_2| < \epsilon$ tedy stačí vzít u funkcí $f(x), g(x)$ taková okolí bodu x_0, která odpovídají na ose x ryzím okolím limit L_1, L_2 s hodnotami $\epsilon_1 \leq \epsilon/(2C_1), \; \epsilon_2 \leq \epsilon/(2|L_1|)$. $\square$

Cvičení

1. Proveďte důkaz tvrzení 1,5 z (V 4.10) o limitě lineární kombinace dvou funkcí !

2. Proč je v předpokladech o limitě složené funkce ta další podmínka ?

Na několika dalších příkladech si ukážeme použití uvedených pravidel pro výpočet limit složitějších funkcí.

Příklad 4.11.

1. Funkce $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ není svým předpisem definována v bodě $x = 0$.
   Je sudou funkcí, její graf je souměrný vzhledem k počátku a proto stačí hledat její limitu zprava v tomto bodě. Z geometrické definice trigonometrických funkcí je zřejmé, že např. v jeho ryzím pravém 1-okolí platí

   $$\sin(x) < x < \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

   Protože z geometrické interpretace funkce $\cos(x)$ a Heineho definice limity je zřejmé, že $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, pak z "věty o sevření" a sudosti funkce plyne, že platí (obr. 5a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1. \tag{4.4}$$

2. Se znalostí této limity, trigonometrických identit a s použitím uvedených pravidel pak snadno najdeme následující limity

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1,$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} (\frac{\sin(x/2)}{x/2})^2 = \frac{1}{2},$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3. Funkce $\sin(1/x)$ je v ryzím okolí počátku ohraničená. Proto podle posledního pravidla z (V 4.10) je $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin(1/x) = 0$. Podobný výsledek dostaneme pro funkci $x \cdot \cos(1/x)$ - viz obr. 5b).

4. Pomocí pravidla o výpočtu limity složené funkce je

   $$\lim_{x\to 0} \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \lim_{y\to 1} \ln(y) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)} = 1, \ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\arctan(x)} = 0.$$

5. Při výpočtu limity posloupnosti $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e = 2,718\cdots$ jsme ukázali, že tato rostoucí a jiná klesající posloupnost $a_n = (1+1/(n-1))^n$ konvergují ke konstantě e. Pro $x \in (1/(n+1), 1/n]$ pak platí

   $$1 + \frac{1}{n+1} < e^x < 1 + \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}.$$

   Limitním přechodem pro $x \to 0$ a použitím "věty o sevření" tak dokážeme, že

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1, \ \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e, \ \lim_{x\to\infty} (1+k/x)^x = e^k \tag{4.5}$$

   a podobně vypočítáme limity těchto funkcí pro $x \to 0^-$, $x \to -\infty$.

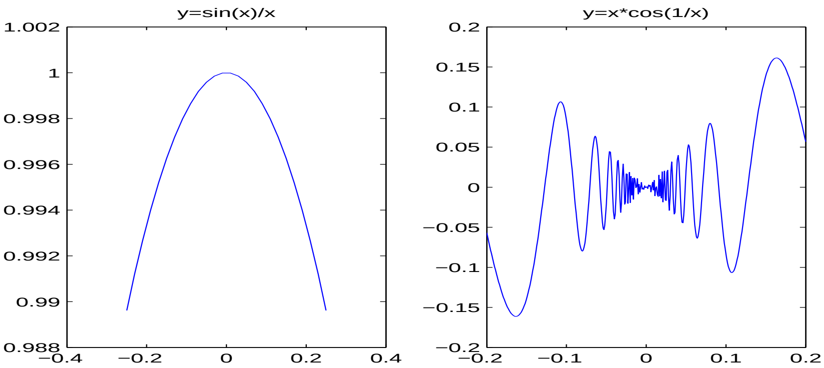
Cvičení

Vyšetřete existenci a hodnoty následujících limit (příp. limit zleva, zprava):

1. $\lim\limits_{x\to -1/2} \frac{4x^2-1}{2x+1}$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2-2x+1}{3x^2+x-4})^2$; $\quad \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-5x+2}{3x-1}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^8+5}}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3}+x)$; $\quad \lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^4-1})$; $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\tan(3x)}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sin^3(x)}{x^2}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} (\ln(x))^{1/x}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0} x\cdot e^{-1/x}$; $\quad \lim\limits_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{|x+2|}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0}[\sin(x)+\cos(x)]^{1/x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} [\sin(1/x)+\cos(1/x)]^x$.

Řešení

1. -2; $\quad 1/9$; $\quad 3/2$;
2. $+\infty$; $\quad 0$; $\quad 0$;
3. 0; $\quad 1/2$; $\quad 1/2$;
4. $2/3$; $\quad 1$; $\quad 0$; $\quad 1/2$.
5. 1; $\quad 1$; $\quad 0\,(zprava)$; $\quad \mp 2$; $\quad 1$.
6. $1/m$; $\quad e$; $\quad e$.



obr. 5 $\quad$ a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, $\qquad b)$ $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos(1/x) = 0$

4.3 Spojitost funkce

Průvodce studiem

Spojitost funkce je dalším základním pojmem matematické analýzy, který upřesňuje intuitivní představu funkce, jejíž graf "se nepřetrhává" a nemá takové oscilace jako funkce $\sin(1/x)$ v okolí počátku. Používá pojmu *limita funkce* a proto také můžeme zvolit několi jeho formulací a také definovat spojitost funkce v daném bodě zleva, zprava.

Definice 4.12. Funkce $f(x)$ se nazývá *spojitá v bodě* $a \in D(f) \subset \mathbb{R}$,

$$\text{jestliže platí} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funkce se nazývá *spojitá v bodě* a *zleva (zprava)*, jestliže stejné vlastnosti mají limity zleva (zprava).
S pomocí ϵ, δ- symboliky můžeme definici spojitosti funkce $f(x)$ v bodě a zformulovat takto (viz obr. 4a):
Funkce $f(x)$ *je spojitá v hromadném bodě* $a \in D(f)$, *když*

$\epsilon \to \delta$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \ \text{ takové, že } \ \forall x: \ |x - a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{4.6}$$

Poznámka 4.13. V této definici je implicitně obsaženo že
- bod $a \in D(f)$, je jeho hromadným bodem;
- existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a tato limita je rovna funkční hodnotě $f(a)$;
- analogicky definujeme v hromadném bodě jednostranné limity ;
- funkce spojitá v bodě je v něm spojitá zleva i zprava. $\triangle$

spojitost funkce v bodě

Z pravidel o operacích s limitami pak plynou následující tvrzení o spojitosti složitějších funkcí (viz např. [3-8,11]).

operace se spojitými funkcemi

Věta 4.14. *Jsou-li funkce* $f(x), g(x)$ *spojité v bodě* $x = a$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *pak také funkce*

1. $c_1 f(x) + c_2 g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ *(při* $g(a) \neq 0$*) jsou spojité v tomto bodě;*

2. *jestliže* $g(a) = b$, $f(x)$ *je spojitá v bodě* b, *pak složená funkce* $f(g(x))$ *je spojitá v bodě* $x = a$. $\triangle$

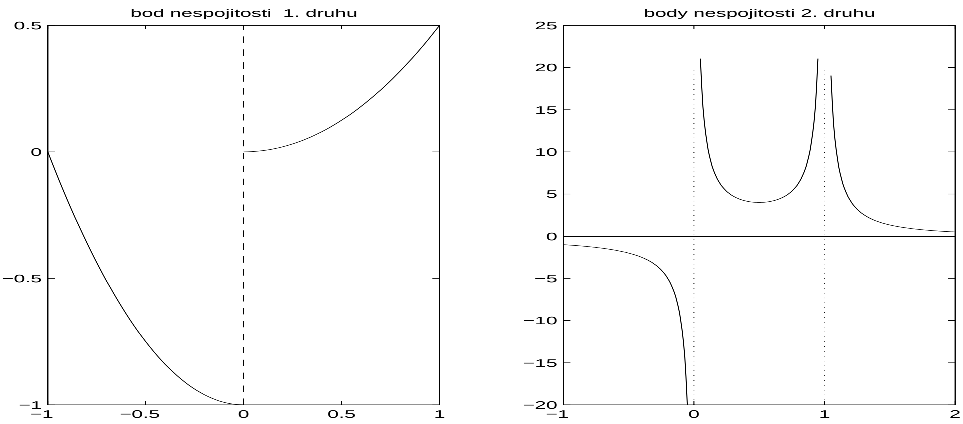
Příklad 4.15.

1. Funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v každém bodě $x = a \in \mathbb{R}$. Vzhledem k její sudosti lze důkaz provést např. pro $x = a > 0$ s pomocí ϵ, δ -okolí takto:
   $|(a + \delta)^2 - a^2| = \delta|2a + \delta| < \epsilon$ pro $\delta < \epsilon/(2a + \delta) < \epsilon/(2a)$.

2. Funkce $sign(x)$ (viz odst.2.1) není spojitá v bodě $x = 0$ - limity zleva i zprava existují, jsou ale různé (rovny $-1, 1$) a různé od $sign(0) = 0$.

3. Funkce $\sin(1/x)$ není spojitá v bodě $x = 0$ (není v něm definována, nemá v něm limitu).

4. Pro funkci definovanou pro všechna reálná čísla předpisem
   $f(x) = x^2$ pro $x = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ jinak
   lze dokázat její spojitost v hromadném bodě $x = 0$ - např. pomocí Heineho definice (proveďte !).



obr. 6 a), b) - body nespojitosti 1. a 2. druhu

4.4 Body nespojitosti

Na předchozích příkladech jsme ukázali některé typy bodů nespojitosti funkce. Obecněji se zavádějí následující pojmy bodů odstranitelné nespojitosti, bodů nespojitosti prvního a druhého druhu v hromadných bodech definičního oboru funkce.

Definice 4.16. Hromadný bod $x_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}$ v němž funkce není spojitá se nazývá

- *bodem odstranitelné nespojitosti,* jestliže v něm existují obě jednostranné limity a ty se rovnají, t.j. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = c = \lim\limits_{x \to x_0^+}, \; c \neq f(x_0)$.
  Dodefinováním funkční hodnoty v tomto bodě společnou hodnotou limity dostaneme funkci spojitou v tomto bodě;
- *bodem nespojitosti 1. druhu,* když obě jednostrané limity jsou konečné, ale různé (obr. 6 a - pro jejich rozdíl se používá termín *skok funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0);
- *bodem nespojitosti 2. druhu,* když alespoň jedna z jednostranných limit je nevlastní (obr. 6b). △

Příkladem bodu odstranitelné nespojitosti pro funkci $f(x) = (x^2-1)/(x^3-1)$ je $x_0 = 1$ - limity zleva i zprava jsou rovny 2/3. Definiční obor funkce $f(x) = x \cdot sin(1/x)$ můžeme rozšířit nulou, když tomuto bodu přiřadíme hodnotu společné limity rovné nule; podobně funkci $\sin(x)/x$ můžeme doplnit v bodě $x = 0$ hodnotou jedna.

Pro funkci $sign(x)$ s oborem funkčních hodnot {-1, 0 ,1} je bod $x_0 = 0$ bodem nespojitosti 1. druhu (limity zleva i zprava jsou různé, konečné - skok roven dvěma). Stejný skok má v tomto bodě funkce $\sin(x)/|x|$.

Pro funkce $f(x) = 1/x, \; g(x) = 1/x^2$ je bod $x_0 = 0$ bodem nespojitosti 2. druhu (nevlastní limity zleva, zprava).

Funkce $f(x) = \sin(1/x)$ není v bodě $x_0 = 0$ spojitá, protože v něm nemá žádnou jednostrannou limitu; tento bod nespojitosti nepatří do žádné z uvedených skupin.

V systému Maple je možno k vyšetření spojitosti funkce použít příkazů $iscont, discont$.

4.5 Funkce spojité na intervalu

Pomocí již známého pojmu spojitosti funkce v bodě přejdeme nyní zcela přirozenou cestou k definici funkce spojité na intervalu .

Definice 4.17. *Funkce je spojitá na intervalu I, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě , u uzavřených intervalů navíc spojitá zleva a zprava v jeho krajních bodech. Funkce je na intervalu po částech spojitá, když v něm má jen konečný počet bodů nespojitosti, a to jen prvního druhu .* $\triangle$
Používané označení příslušnosti ke třídě spojitých funkcí na intervalu I je $f \in C(I)$.

Z této definice a vět o limitě a spojitosti plyne, že (viz např. [1-8,11])
- lineární kombinace a součin spojitých funkcí je na společné části jejich intervalů spojitosti spojitou funkcí;
- podíl spojitých funkcí $f(x)/g(x)$ je spojitou funkcí tam, kde $g(x) \neq 0$,
- složená funkce dvou funkcí ($f \circ g, I \to I_1 \to J$) spojitých na intervalech I, I_1 je také spojitou funkcí na intervalu I . $\triangle$
Z uvedených tvrzení plyne také následující vlastnost funkcí inverzních.

Věta 4.18. *Jestliže funkce f je ryze monotonní a spojitá funkce na intervalu $I \subset D(f)$, pak funkce k ní inverzní je spojitá a ryze monotonní na intervalu $H(f(I))$.* $\triangle$

Ze spojitosti a ryzí monotonnosti funkcí $\tan(x), \cot(x), a^x (a \neq 1)$ tak plyne spojitost a monotonnost funkcí $\arctan(x), arccotg(x), \log_a(x)$.

Příklady spojitých funkcí
Elementární funkce patří k těm, kde již většinou známe jejich intervaly spojitosti a body nespojitosti.

Funkce $\sin(x), \cos(x), e^x, a^x (a > 0)$, polynomy - jsou příkladem funkcí spojitých na celé reálné ose.

Funkce $\tan(x), \cot(x)$ jsou spojité ve všech bodech svých definičních oborů. Ostatní body reálné osy (liché, sudé násobky $\pi/2$) jsou body nespojitosti 2. druhu (prověřte !).

Racionální lomené funkce $P_n(x)/Q_m(x)$ jsou spojité v bodech, kde $Q_m(x) \neq 0$.

Zajímavým příkladem je funkce $f(x) = (1 + x^2) sign(x)$, která má bod nespojitosti 1. druhu $x = 0$ (ověřte !); funkce k ní inverzní je funkcí spojitou na svém definičním oboru $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (s nulou jako izolovaným bodem).

Funkce spojité na uzavřeném intervalu mají některé další důležité vlastnosti, které nemusí mít funkce spojité na otevřeném intervalu a které jsou zformulovány v následujících větách ([3-8]).

vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu

Věta 4.19. (Weierstrass)
Jestliže je funkce spojitá na uzavřeném intervalu I,

1. *pak je na něm ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty ;*
2. $\forall \epsilon > 0 \; \exists \{n \in \mathbb{N}$, *polynom* $P_n(x)\}$*takové, že* $|f(x) - P_n(x)| < \epsilon, \; \forall x \in I.$

Důkaz. Platnost prvního tvrzení této věty je založena na tom, že neohraničenost spojité funkce by umožnila konstrukci konvergentní posloupnosti argumentů s neohraničenou posloupností funkčních hodnot - což je v rozporu s definicí spojitosti (ohraničenost

v okolí bodu spojitosti). Pak se dokáže existence bodů, v nichž funkce nabývá suprema, resp. infima množiny funkčních hodnot na tomto intervalu (podrobněji viz. např.[7]).
Druhá část je známou větou o stejnoměrné aproximaci spojité funkce polynomem (s mnoha důkazy různých typů v teorii aproximací).
Geometrickou představu o první části této věty nám ukazuje obr. 7b. □

Příkladem funkcí spojitých na otevřených intervalech, které tam ale nenabývají svých největších a nejmenších hodnot, jsou monotonní funkce -
např. funkce $1/x,\ x \in (0, \infty);\ \tan(x),\ x \in (-\pi/2, \pi/2);\ \ln(x),\ x \in (0, \infty)$.

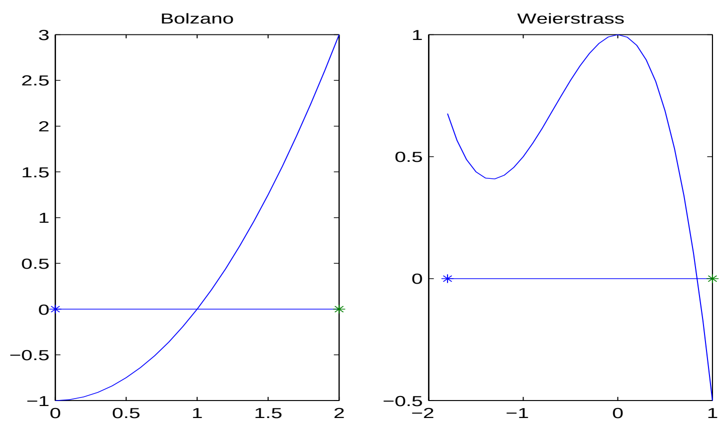
Věta 4.20. **(Bolzano)** *Jestliže je funkce spojitá na uzavřeném intervalu I, pak na něm nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou - tedy obor funkčních hodnot $H(f(I))$ je také uzavřeným intervalem nebo jedinou hodnotou.*

Ryze monotonní funkce zobrazuje otevřený interval na otevřený interval. △

Důsledkem této věty je také následující důležitá vlastnost (Bolzano - obr.7a):

Je-li $f \in C[a, b]$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$,
pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(\xi) = 0$. △

Důsledku Bolzanovy věty se používá k odhadu intervalů, ve kterých leží reálné nulové body spojité funkce a v nejjednodušších numerických metodách pro řešení nelineárních rovnic (konstrukcí posloupnosti zužujících se intervalů $[a_k, b_k]$ s vlastností $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$ - *metoda půlení intervalu.*)



obr. 7 a), b) - ilustrace věty Bolzanovy a Weierstrassovy

Poznámka 4.21. V Cauchyově definici spojitosti funkce v bodě pomocí ϵ, δ - okolí je třeba si uvědomit, že konkretně zvolenému ϵ-okolí funkční hodnoty $f(x)$ mohou v různých bodech definičního oboru odpovídat různě velká δ-okolí argumentu x. Přirozeně vzniká otázka, zda existují funkce, kde lze najít odpovídající hodnotu δ společnou pro všechny hodnoty argumentu buď v celém definičním oboru, nebo alespoň v jeho části. V souvislosti s tímto problémem byl definován pojem *stejnoměrná spojitost*:

stejnoměrná spojitost

Definice 4.22. Funkce $f(x)$ je na intervalu I *stejnoměrně spojitá*, když

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in I,\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon. \qquad (4.7)$$

O vztahu mezi spojitostí a stejnoměnou spojitostí funkce vypovídá následující věta.

Věta 4.23. (Heine, Cantor)
Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na něm stejnoměrně spojitá. $\triangle$

Například funkce $f(x) = 2x/(4 - x^2)$ je spojitá na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a proto je tam i stejnoměrně spojitá. (Ukažte, že definice zde platí např. pro $\delta = 2\epsilon$.) $\triangle$

Ze spojitosti funkce na otevřeném intervalu neplyne obecně její stejnoměrná spojitost. Například funkce $f(x) = 1/x$ je stejnoměrně spojitá na každém intervalu $\langle 1, n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, není ale stejnoměrně spojitá na intervalu $(0, \infty)$. Pro argumenty $x_1 = 1/n$, $x_2 = 1/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ se vzdáleností $|x_1 - x_2| = 1/(2n)$ totiž je vzdálenost jejich funkčních hodnot $|f(x_1) - f(x_2)| = n$ - ta neomezeně roste pro $n \to +\infty$ (argumenty blížící se k počátku). Tato funkce je však stejnoměrně spojitá na intervalu $\langle 1, \infty)$, protože pro argumenty $x_1, x_2 \geq n \in \mathbb{N}$ je $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1/n$.

Cvičení

1. Vyšetřete body nespojitosti, intervaly spojitosti a obory funkčních hodnot funkcí

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{x-a}}{x^2 - a^2}; \quad f(x) = \frac{1}{1+x^n}; \quad f(x) = \log(x^2+1).$$

2. Jakého druhu je nespojitost v bodě $x_0 = 0$ u funkcí

$$\frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{\cos(x)}{x}, \quad \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}, \quad \frac{x}{\ln|x|}, \quad sign(\sin(x)) \ ?$$

3. Najděte číslo a tak, aby funkce $f(x) = \exp(-ax), x \leq 0$,
   $f(x) = a - x, x > 0$ byly spojité.
4. Ukažte intervaly, ve kterých leží některá řešení rovnic

$$x^3 - x - 1 = 0, \quad \ln(x) - 3 + x = 0; \quad x + 1 = e^x.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme uvedli definice limity funkce (D 4.1, D 4.2), vlastnosti limit funkce (V 4.9) a pravidla pro jejich výpočet (V 4.10-18-19-20-23). Definovali jsme (D 4.12) spojitost funkce v bodě a na intervalu (D 4.17), body nespojitosti (D 4.16), uvedli některé vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu (V 19-20-23).

Pojmy k zapamatování

- Limita funkce (Heine, Cauchy), pravidla pro její výpočet.
- Spojitost funkce v bodě, na intervalu; body nespojitosti - odstranitelné, prvního a druhého druhu .
- Vlastnosti funkce spojité na uzavřeném intervalu (Weierstrass, Bolzano, Heine-Cantor).

Kontrolní otázky

1. *Kdy funkce nemá v daném bodě limitu ?*
2. *Má každá funkce ohraničená v okolí bodu a v něm limitu ?*
3. *Jsou funkce* $\cos(1/x)$, $x \cdot \cos(1/x)$ *spojité v bodě* $x = 0$ *?*

4. *Nakreslete grafy funkcí s různými druhy bodů nespojitosti.*
5. *Může součin funkcí $f(x) \cdot g(x)$ s funkcí $g(x)$ neohraničenou v okolí bodu $x = a$ být v něm spojitou funkcí (příklad - funkce $x^2 \cdot (1/x), a = 0$) ?*
6. *Může být funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x \notin D(f)$?*
7. *Najděte body nespojitosti trigonometrických, cyklometrických funkcí !*

Vyšetřete (příp. stejnoměrnou) spojitost následujících funkcí na zadaných intervalech:

Úkoly k textu

1. $f(x) = kx,\ x \in (-\infty, +\infty);$
2. $f(x) = x^3,\ x \in (-\infty, +\infty);\ x \in \langle -10, 10 \rangle;$
3. $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, +\infty);\ x \in \langle 0, 10 \rangle;$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x} - x,\ x \in (-\infty, +\infty);\ x \in \langle -10, 10 \rangle;$
5. $f(x) = \sin(x),\ x \in (-\infty, \infty);$
6. $f(x) = \sin(x^2),\ x \in (-\infty, +\infty).$

Řešení

1. Stejnoměrně spojitá .
2. a) Spojitá, b) stejnoměrně spojitá .
3. a) Spojitá, b) stejnoměrně spojitá .
4. a) Spojitá, b) stejnoměrně spojitá .
5. Stejnoměrně spojitá .
6. Spojitá, není stejnoměrně spojitá.

5 Derivace funkce

Studijní cíle: Seznámit se s definicí pojmu derivace funkce, jejím významem v geometrii, fyzice a jinde. Naučit se používat pravidla, podle kterých je možno počítat derivace složitějších funkcí. Seznámit se s možností používat pro takové výpočty prostředky symbolic computing.
Klíčová slova: derivace funkce, její geometrický a fyzikální význam, derivace elementárních funkcí, pravidla výpočtu derivací složitějších funkcí, inverzních a složených funkcí, vyšší derivace a jejich výpočet.
Potřebný čas: 270 minut.

Průvodce studiem

Derivace funkce patří spolu s předchozími pojmy limita a spojitost funkce k základním pojmům diferenciálního počtu. Historickou motivací k zavední tohoto pojmu byl problém určení směrnice tečny ke grafu funkce v geometrii, popis zákonů pohybu v mechanice (okamžitá rychlost, zrychlení), vyšetřování průběhu funkce a jejích vlastností (monotonnost, konvexnost, konkávnost, extrémy). V definici derivace funkce se použije opět limitního přechodu - limity pro podíl přírůstku funkce a přírůstku jejího argumentu.

5.1 Geometrické a fyzikální motivace pojmu derivace

Jednou z nejstarších geometrických úloh které vedly k formulování pojmu derivace funkce je úloha o nalezení tečny ke grafu spojité funkce v daném bodě (resp. nalezení rovnice, směrnice této tečny). Jestliže body $[x_0, f(x_0)], [x, f(x)]$ na grafu funkce $f(x)$ vedeme sečnu, pak její směrnice je podílem přírůstku (diference) funkční hodnoty k přírůstku (diferenci) argumentu (viz obr. 8a): $\tan(\varphi) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$. Geometrická představa nám říká, že tečnu a její směrnici v bodě $[x_0, f(x_0)]$ dostaneme limitním přechodem v tomto podílu při $x \to x_0$. Tedy směrnice takové tečny je geometrickou interpretací této limity, která dostala název *derivace funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 jejího definičního oboru.

Jestliže se hmotný bod pohybuje po přímce a funkce $s = f(t)$ popisuje jeho polohu v závislosti na čase t, pak jeho průměrná rychlost v časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ je určena podílem $[f(t) - f(t_0)]/(t - t_0)$. Limitním přechodem při $t \to t_0$ v tomto podílu - který je až na označení nezávisle proměnné analogický k výrazu pro směrnici sečny - pak zřejmě dostaneme hodnotu okamžité rychlosti takového bodu v čase t_0. Vidíme tedy, že fyzikální interpretací takové limity (tedy derivace funkce popisující polohu bodu) je okamžitá rychlost takového pohybu.

5.2 Definice derivace funkce

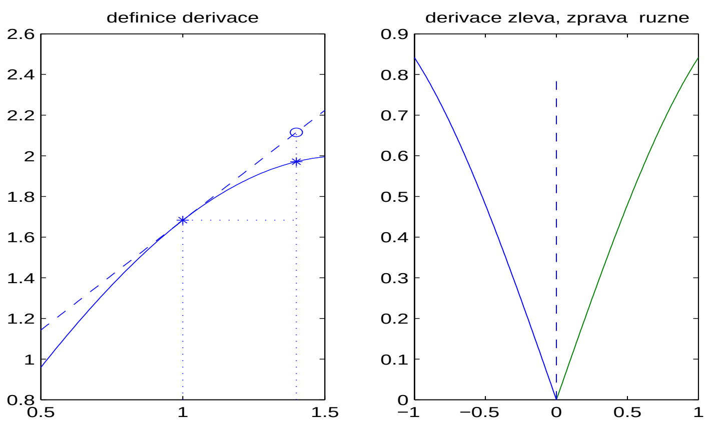
Definice 5.1. Jestliže pro funkci $y = f(x)$ v hromadném bodě $x_0 \in D(f)$ jejího definičního oboru existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{5.1}$$

pak *tuto limitu nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0*
a označujeme ji symbolem $f'(x_0)$, nebo (Leibnizův tvar) $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.
Je-li tato limita vlastní (konečná), nazýváme ji *vlastní derivací*, v případě nevlastní limity *nevlastní derivací* funkce $f(x)$ v bodě x_0. $\triangle$ *derivace v bodě*

Pro jednostranné limitní přechody $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ jsou analogicky definovány pojmy *derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava, zleva* (pro vnitřní bod x_0 definičního oboru můžeme uvažovat obě jednostranné limity, u krajních bodů konečných intervalů a nevlastních bodů $-\infty, +\infty$ pak jen odpovídající jednostrannou limitu).

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I, pak hodnoty této derivace definují funkci, kterou označujeme symbolem $f'(x)$ a nazýváme *derivací funkce $f(x)$* . Pro uzavřený interval jsou hodnoty derivace v jeho krajních bodech definovány hodnotami odpovídající derivace zprava nebo zleva. Má-li funkce na intervalu I derivaci, označuje se také jako *funkce diferencovatelná* na tomto intervalu ; má-li spojitou derivaci $f'(x)$, nazývá se také *hladká funkce, resp. křivka*. *derivace funkce*



obr. 8 a) - definice derivace, b) - různé derivace zleva, zprava

Poznámka 5.2.

1. Funkce může mít derivaci v bodě jen tehdy, je-li definována i v jistém okolí tohoto bodu.

2. Ekvivalentní definice derivace funkce $f(x)$ v bodě x má tvar

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.2}$$

3. Libovolná funkce může mít v daném bodě nejvýš jednu hodnotu derivace.

4. V případě nevlastní derivace ve vlastním bodě je geometrickou interpretací takové derivace směrnice svislé tečny.

5. Funkce má daném bodě derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zleva i zprava a jejich hodnoty se rovnají.

Věta 5.3. *Má-li funkce v daném bodě vlastní derivaci, je v něm spojitá .*

(Dokažte z definice derivace, prodiskutujte neexistenci derivace funkce v bodě nespojitosti 1. druhu).

Ze spojitosti v funkce bodě ale neplyne existence její derivace v tomto bodě - typickým příkladem jsou body, ve kterých má graf spojité funkce špičku (například funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x = 0,$ kde derivace zleva, zprava jsou různé; nebo podobná funkce z obr. 8b). *derivace - spojitost*

5.3 Příklady výpočtu derivace z její definice

Příklad 5.4. Funkce $f(x) = x^3$ má definiční obor $(-\infty, +\infty)$ a z definice je

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^2+xx_0+x_0^2) = 3x_0^2.$$

Funkce $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ má definiční obor $(-\infty, +\infty)$. Pro její derivaci v bodě x dostaneme z definice a užitím binomické formule x^n

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}[(x^n + nhx^{n-1} + \cdots + nh^{n-1}x + h^n) - x^n]/h = nx^{n-1}.$$

Příklad 5.5. Pro funkci $f(x) = \exp(x) = e^x$ s definičním oborem $(-\infty, +\infty)$ platí $\exp(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \exp(x) = \exp(x). \qquad (5.3)$$

Příklad 5.6. Sudá funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ je také definována na celé reálné ose; z definice derivace v bodě $x = 0$ dostaneme

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Limita zleva je rovna $-\infty$, limita zprava je rovna $+\infty$ - funkce má v tomto bodě svislou (polo)tečnu vycházející z počátku, ke které směřuje graf z obou stran bodu $x = 0$ (nakreslete si tento graf se špičkou v počátku - tzv. bod vratu !) - nemá tedy v něm derivaci. Pro derivaci v bodech $x \neq 0$ dostaneme výsledek $f'(x) = x^{-1/3}$.

Příklad 5.7. Pro derivaci funkce $\sin(x)$ v každém bodě jejího definičního oboru platí $\sin(x)$

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cos(\frac{2x + h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2}) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2}) \cdot \frac{2}{h} = \cos(x) \qquad (5.4)$$

(s použitím trigonometrických identit a známé limity pro $\sin(x)/x$ při $x \to 0$).

Příklad 5.8. Použijeme-li z geometrie známou rovnici přímky procházející daným bodem s danou směrnicí a toho, že směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je $f'(x_0)$, směrnice normály je $-1/f'(x_0)$ (proč ?), pak můžeme napsat rovnice takové tečny a normály takto *rovnice tečny*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (5.5)$$

Funkce $f(x) = \exp(x) = e^x$ má tedy v bodě $[0, 1]$ tečnu o rovnici $y = 1 + x$ a normálu s rovnicí $y = 1 - x$.

Úloha: Pod jakým úhlem se protínají křivky $y = x^2,\ y^2 = x$?

5.4 Pravidla pro výpočet derivace funkcí

Průvodce studiem

Při výpočtu derivací složitějších funkcí můžeme použít pravidel, která z definice derivace plynou pro výpočet derivace lineární kombinace, součinu a podílu dvou funkcí, pro funkci složenou a inverzní. Můžeme tak převést výpočet derivací složitější funkce na výpočet derivací funkcí jednodušších.

Věta 5.9. *Nechť funkce $f(x), g(x)$ mají ve společném bodě x svých definičních oborů vlastní derivaci. Pak v tomto bodě mají derivace i funkce, které jsou jejich lineární kombinací, součinem nebo podílem a platí následující pravidla*

1. $\Big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\Big)' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x);$

2. $\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$

3. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \textit{při} \quad g(x) \neq 0.$$

Důkaz.
Pravidla pro derivování lineární kombinace odvodíme snadno z definice derivace. Pro derivaci součinu dostaneme s použitím definice derivace a předchozích pravidel

$$\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\Big) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\Big) =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot\frac{1}{h}\Big(f(x+h)-f(x)\Big)+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(g(x+h)-g(x)\Big) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Podobně odvodíme s použitím předchozích pravidel pravidlo pro derivaci podílu:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{1}{h}\Big(f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)\Big) =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

□

Příklad 5.10. a) $\Big(x+\sin(x)\Big)' = 1+\cos(x);$ b) $\Big(\sqrt{x}+e^{-x}\Big)' = \frac{-1}{2}x^{-1/2} - e^{-x}.$

c) $\Big(x^2\sin(x)\Big)' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x),$ d) $\Big(x^3e^x\Big)' = (x^3+3x^2)e^x.$

$$\text{e)} \quad \Big(\tan(x)\Big)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}. \qquad (5.6)$$

Úloha: Odvoďte funkční předpisy pro derivace funkcí $\cos(x),\ \cot(x),\ \sinh(x)$ (viz tabulka v odst. 5.5, [3-8,11]).

Věta 5.11. Derivace složené funkce
Nechť funkce $u = g(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0
a funkce $y = f(u)$ má vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$.
Pak složená funkce $y = F(x) = f\,(g(x))$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'\,(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{5.7}$$

(Při vícenásobném složení se toto pravidlo používá opakovaně.) △

Příklad 5.12. Pro derivaci obecné mocninné funkce s konstantou $a \in \mathbb{R}$ dostaneme výsledek

$$(x^a)' = (e^{a.\ln(x)})' = e^{a\cdot\ln(x)}(a.\ln(x))' = x^a a\frac{1}{x} = ax^{a-1} \tag{5.8}$$

formálně shodný s derivací funkce $x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Příklad 5.13. Pro výpočet derivace funkce $f(x) = x\sqrt{2+x^3}$ použijeme pravidla pro derivaci součinu a složené funkce

$$\left(x\sqrt{2+x^3}\right)' = \sqrt{2+x^3} + x(2+x^3)^{-1/2} \cdot 3x^2 = \frac{2+4x^3}{\sqrt{2+x^3}}.$$

Příklad 5.14.

$$\Big(\exp(2\sin(x))\Big)' = \exp(2\sin(x)) \cdot 2\cos(x); \qquad \Big(x^x\Big)' = x^x \cdot (1+\ln(x)).$$

Příklad 5.15. Pro výpočet derivace funkce $F(x) = f(x)^{g(x)}$ použijeme následující postup

$$\Big(f(x)^{g(x)}\Big)' = \Big(\exp(g(x)\cdot\ln(f(x))\Big)' = f(x)^{g(x)}\Big(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\Big). \tag{5.9}$$

Např. tak spočítáme $(x^{x^2})' = (\exp(x^2\ln(x))' = x^{x^2}(2x\ln(x) + x)$

Věta 5.16. Derivace inverzní funkce
Je-li funkce $y = f(x)$ spojitá a ryze monotonní na otevřeném intervalu I
a má derivaci $f'(x_0) \neq 0,\ x_0 \in I$, pak má inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$
v bodě $y_0 = f(x_0)$ derivaci a platí $\Big(f^{-1}(y_0)\Big)' = 1/f'(x_0)$. △

Poznámka 5.17. Při použití Leibnizovy symboliky pro derivaci funkce $y = f(x)$ ve tvaru $f'(x) = dy/dx$ pak formálně dostaneme pro derivaci inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$ vyjádření její derivace v analogickém tvaru $dx/dy = 1/f'(x)$, který nám umožní snadno si toto pravidlo zapamatovat či připomenout. Toto pravidlo můžeme také odvodit z geometrických vlastností grafů funkcí f, f^{-1} a jejich tečen.

Příklad 5.18.

Funkce $y = \ln(x)$ je funkcí inverzní k funkci e^x. Proto platí $\Big(\ln(x)\Big)' = 1/e^y = 1/x$.

Pro derivaci funkce $\arcsin(x),\ x \in \langle -1, 1\rangle$,
inverzní k funkci $\sin(x),\ x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ pak platí
$\Big(\arcsin(x)\Big)' = 1/\Big(\sin(y)\Big)' = 1/\cos(y) = 1/\sqrt{1-\sin^2(y)} = 1/\sqrt{1-x^2}.$

Pro derivaci funkce $\arctan(x)$, inverzní k funkci $\tan(x)$, najdeme
$\Big(\arctan(x)\Big)' = 1/\Big(\tan(y)\Big)' = \cos^2(y) = 1/(1+\tan^2(y)) = 1/(1+x^2).$

5.5 Přehled derivací elementárních funkcí

V předchozích odstavcích jsme ukázali derivace některých jednodušších funkcí a pravidla pro počítání derivací funkcí se složitějším funkčním předpisem. V literatuře nebo na webových stránkách a v prostředcích symbolic computing najdeme celou řadu takových formulí a možností nechat si spočítat derivace i dost složitých funkcí. Doporučuje se zapamatovat si formule pro derivace elementárních funkcí, jejichž stručný přehled je v následující tabulce:

funkce	derivace	funkce	derivace
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$c = konst.$	0
$a^x,\ a > 0$	$a^x \ln(a)$	e^x	e^x
$\log_a(x)$	$1/(x. \ln(a))$	$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	$\cot(x)$	$-1/\sin^2(x)$
$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$	$arccot(x)$	$-1/(1+x^2)$

Tyto vzorce platí pro argumenty z definičních oborů jednotlivých funkcí.

Poznámka 5.19. Derivace implicitně nebo parametricky zadaných funkcí
Pro výpočet derivace funkce zadané implicitně (např. algebraických křivek) v zadaném bodě použijeme pravidel o derivaci složené funkce. Např. pro výpočet derivace paraboly $y^2 = 2px$ derivací obou stran podle proměnné x dostaneme vztah platný pro oba její segmenty $y' = p/y$.
Pro směrnici tečny ke křivce $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ dostaneme po derivaci obou stran předpis $y' = (1 - x - y)/(x - y)$.
Máme-li funkci (křivku) zadánu parametrickým předpisem jejích složek
$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in < a, b >,\ x(t), y(t)$ diferencovatelné funkce,
pak s použitím Leibnizovy symboliky pro diferenciály (viz odst. 7.1) formálně snadno odvodíme postup pro výpočet derivace takové funkce v bodě $[x(t), y(t)]$:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{dy}{dx}(t) = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{5.10}$$

(derivace funkcí $x(t), y(t)$ jsou zde vzhledem k parametru t a často se pro odlišení označují tečkou místo čárkou).
Pro parametrické rovnice elipsy se středem v počátku a poloosami délek a, b
$x(t) = a\cos(t),\ y(t) = b\sin(t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ tak pro její derivaci dostaneme
$\frac{dy}{dx}(t) = b\cos(t)/[-a\sin(t)] = -(b/a)\cot(t)$.
Stejný výsledek dostaneme z jejího implicitního vyjádření $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ předchozím postupem - jen s úpravou výsledku $y' = -(b^2x)/(a^2y)$ (proveďte !).
Pro cykloidu s parametrickými rovnicemi
$x(t) = r(t - \sin(t)),\ y(t) = r(1 - \cos(t)),\ r > 0,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ dostaneme $\frac{dy}{dx}(t) = r\sin(t)/[r(1 - \cos(t))] = \sin(t)/[1 - \cos(t)]$.
(Nakreslete tuto křivku a srovnejte analytický výsledek s geometrickou interpretací derivace.)

5.6 Derivace vyšších řádů

Derivace funkce $f(x)$ je zpravidla opět funkcí, pro kterou opět můžeme hledat její derivaci v daném bodě nebo na jistém intervalu. Tento proces pak případně můžeme opakovat a definovat tak pro funkci její derivace vyšších řádů .

Definice 5.20. Pokud je první derivace $f'(x)$ funkce $f(x)$ diferencovatelná, pak druhou derivací funkce $f(x)$ je funkce $f''(x) := \Big(f'(x)\Big)'$.
Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ pak *n-tou derivaci (derivaci n-tého řádu)* definujeme vztahem

$$f^{(n)}(x) := \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)' \quad \Big(\text{jiný zápis } \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\big(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\big)\Big). \tag{5.11}$$

Symbolem $f^{(0)}(x)$ pak se označuje také původní funkce $f(x)$. Třída funkcí se spojitou n-tou derivací na intervalu I se pak označuje symbolem $C^n(I)$.

Příklad 5.21. Pro funkci $f(x) = x^n$ podle této definice a pravidel o počítání limit platí

$$\Big(x^n\Big)' = nx^{n-1},\ \Big(x^n\Big)'' = n(n-1)x^{n-2}, \cdots, \Big(x^n\Big)^{(n-1)} = n!x, \quad \Big(x^n\Big)^{(n)} = n!\,. \tag{5.12}$$

Příklad 5.22. Pro funkci $\sin(x)$ dostaneme postupným derivováním

$$\Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x),\ \Big(\sin(x)\Big)'' = -\sin(x),\ \Big(\sin(x)\Big)''' = -\cos(x),\ \Big(\sin(x)\Big)^{(4)} = \sin(x).$$

Ukažte, že platí $\Big(\sin(x)\Big)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$.

Příklad 5.23. Pro funkci a^x platí

$$(a^x)' = (e^{x.\ln(a)})' = \ln(a).a^x,\ (a^x)'' = (\ln(a))^2.a^x, \cdots (a^x)^{(n)} = (\ln(a))^n a^x. \tag{5.13}$$

Příklad 5.24. Pro druhou a třetí derivaci součinu dvou funkcí platí formule (Leibniz)

$$(f.g)'' = f''.g + 2f'.g' + f.g'', \quad (f.g)''' = f'''.g + 3f''.g' + 3f'.g'' + f.g'''. \tag{5.14}$$

Odvoďte tyto formule a formuli pro n-tou derivaci součinu dvou funkcí.

Shrnutí

V této kapitole jsme si ukázali geometrickou a fyzikální interpretaci pojmu derivace, definici derivace funkce v bodě a na intervalu (D 5.1), metody jejího výpočtu (V 5.8, 5.10. 5.15), přehled derivací elementárních funkcí, postup při výpočtu derivace funkce zadané implicitně nebo parametricky (pozn. 5.18). Ukázali jsme, jak jsou definovány derivace vyšších řádů (D 5.19).

Pojmy k zapamatování

- Derivace funkce v bodě, na intervalu - definice, pravidla pro jejich výpočet.
- Derivace funkce zadané implicitně, parametricky.
- Derivace vyšších řádů - definice, metody výpočtu.

Kontrolní otázky

1. *Jak můžeme interpretovat definici derivace geometricky, při studiu dynamických procesů ?*
2. *Jaký výsledek by dal takový limitní proces pro funkci nespojitou v daném bodě ?*
3. *Odvoďte vzorce pro derivace elementárních funkcí v naší tabulce - s použitím definice, nebo také někdy s pomocí vztahů mezi nimi (např. u* $\arccos(x), \arctan(x)$*).*

Cvičení

1. Odvoďte formule pro vyšší derivace ostatních elementárních funkcí.
2. Odvoďte formuli pro n=tou derivaci funkce $f(x) = (a + bx)^m$.
3. Odvoďte formuli pro n-tou derivaci součinu dvou funkcí (Leibniz).
4. Odvoďte vzorec pro druhou a třetí derivaci složené funkce.
5. Odvoďte formuli pro druhou a třetí derivaci inverzní funkce.
6. Odvoďte formuli pro druhou a třetí derivaci podílu dvou funkcí.
7. Odvoďte formuli pro druhou a třetí derivaci parametricky zadané funkce.
8. Najděte formuli pro směrnici tečny v bodě Archimedovy spirály $r = a \cdot \varphi$.
9. Najděte formuli pro směrnici tečny v bodě kardioidy $r = a(1 + \cos(\varphi))$.
10. Ukažte, že pro pro hyperbolické funkce $\sinh(x), \cosh(x)$ platí
    $(\sinh(x))^{(n)} = \sinh(x)\ [\cosh(x)]$ pro n sudá [lichá] ,
    $(\cosh(x))^{(n)} = \cosh(x)\ [\sinh(x)]$ pro n sudá [lichá].
11. Elektrický obvod s kondenzátorem o náboji $Q = a \exp(-bt)$ a rezistorem s odporem R dává proud o intenzitě $i = dQ/dt$ (t... čas). Za jak dlouho klesne intenzita proudu na polovinu počáteční hodnoty ?
12. Fyzikální interpretací druhé derivace funkce popisující pohyb hmotného bodu v závislosti na čase je jeho zrychlení . Odvoďte vztah pro zrychlení netlumeného kmitavého pohybu, popsaného vztahem $y = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
13. V geometrii je křivost grafu funkce $y = f(x)$ dána vztahem (viz např. [12]) $k = |y''|/(1 + (y')^2)^{3/2}$ a tzv. poloměr křivosti (poloměr oskulační kružnice) $R = 1/k$. Vypočtěte křivost
    - paraboly, hyperboly, elipsy;
    - cykloidy, Archimedovy a logaritmické spirály, kardioidy, lemniskaty.

Řešení

1. Viz např. [3],[6],[12]
2. $f^{(n)}(x) = \binom{m}{n}(a + bx)^{(m-n)} b^n,\ m \geq n$
3. $(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} g + n \cdot f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} + \cdots + n \cdot f' \cdot g^{(n-1)} + f \cdot g^{(n)}$
4. $(f \circ g)^{(2)} = f'' \cdot (g')^2 + f' \cdot g''$; $(f \circ g)^{(3)} = f^{(3)} \cdot (g')^3 + 3f'' \cdot g' \cdot g'' + f' \cdot g'''$
5. $(f^{-1)})'' = -f''/(f')^2$; $(f^{-1})^{(3)} = (2f'f'' - f''' \cdot f')/(f')^3$
6. $(f/g)'' = [(f''g - fg'')g - 2g'(f'g - fg')]/g^3 =$
   $= -2f'g'/g^2 + f''/g + f(2g'^2/g^3 - g''/g^2)$;
   $(f/g)''' = -3f''g'/g^2 + 3f'(2g'^2 - gg'')/g^3 + f'''/g +$
   $+ f(-6g'^3 + 6gg'g'' - g^2 g''')/g^4$.
7. $\frac{d^2y}{dx^2} = [y''x' - y'x'']/(x')^3$, $\frac{d^3y}{dx^3} = [y'''(x')^2 - y'x'x''' - 3y''x'x'' + 3y'(x')^2]/(x')^5$.
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{\tan(\varphi)+\varphi}{1-\varphi\cdot\tan(\varphi)} = \tan(\varphi + \arctan(\varphi))$. (Složitější úpravy !)
9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)}{\sin(\varphi)+\sin(2\varphi)} = -\cot(3\varphi/2),\ \varphi \neq 0, \pm\frac{3}{2}\pi$.

6 Základní věty diferenciálního počtu

Studijní cíle: Uvedeme některé základní vlastnosti spojitých funkcí a jejich souvislost s vlastnostmi jejich derivací. Ty byly formulovány v řadě tzv. základních vět diferenciálního počtu, kterých budeme v dalším používat při studiu průběhu funkcí a dalších kapitolách.
Klíčová slova: funkce rostoucí, klesající, extrém funkce; věty - Fermat, Rolle, Cauchy, Lagrange; L'Hospitalovo pravidlo.
Potřebný čas: 150 minut.

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme věnovat takovým vlastnostem spojitých a diferencovatelných funkcí, které nám umožní ověřovat a upřesňovat si některé jejich vlastnosti, které vidíme na jejich grafech (na papíru nebo na obrazovce počítače) - jejich monotonnost, existenci a lokalizaci maximálních a minimálních (extremálních) hodnot s pomocí jejich první derivace, nebo výpočet limit tzv. neurčitých výrazů.

6.1 Vlastnosti funkcí - monotonnost, extrémy

V této kapitole rozšíříme studium vlastností funkcí, uvedených v části 2.3 (Def. 2.5).

Definice 6.1. Funkce $f(x) \in C(I)$ (spojitá na intervalu I)

funkce rostoucí klesající

- *je rostoucí* na tomto intervalu, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$,
- *je klesající* na tomto intervalu, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$,
- *nabývá v bodě x_0 lokálního maxima*, jestliže existuje takové jeho okolí $O(x_0)$, že $\forall x \in O(x_0),\ f(x) \le f(x_0)$,

extrémy

- *nabývá v bodě x_0 lokálního minima,* jestliže existuje takové jeho okolí $O(x_0)$, že $\forall x \in O(x_0),\ f(x) \ge f(x_0)$.
- Lokální minima a maxima funkce se souhrnně označují jako *lokální extrémy funkce*. Jestliže rovnost nastává jen v bodě x_0, používají se termíny *ostré minimum, ostré maximum, ostrý lokální extrém.* $\triangle$

Poznámka 6.2. Z předchozí definice rostoucí a klesající funkce a z definice derivace funkce plyne následující vztah mezi těmito vlastnostmi funkce (dokažte !):
Jestliže $f'(x_0) > 0$, pak funkce $f(x)$ je rostoucí v jistém okolí bodu x_0;
při $f'(x_0) < 0$ je tato funkce klesající v jistém okolí bodu x_0 . $\triangle$

derivace - monotonnost

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně označují jako *monotonní funkce*. Pro vyšetření intervalů monotonnosti funkce je tedy základem znalost tzv. *stacionárních bodů* s nulovou hodnotou derivace. Těchto vlastností použijeme při vyšetřování průběhu funkce v kap.8.2 . Při nulové hodnotě derivace v daném bodě není situace jednoznačná, jak nám ukazuje příklad funkcí x^2, x^3 , které obě mají při $x = 0$ nulovou hodnotu derivace, ale první má v tomto bodě minimum, druhá je v jeho okolí rostoucí funkcí. Opačný pohled na vztah mezi těmito vlastnostmi ukazuje následující věta.

Věta 6.3. (Fermat)
Jestliže funkce $f(x) \in C\langle a,b\rangle$ *v bodě* $c \in (a,b)$ *nabývá svého lokálního maxima nebo minima a existuje* $f'(c)$, *pak* $f'(c) = 0.$ △

Důkaz této věty odvodíme z definice lokálních extrémů a definice derivace funkce v bodě (podíly přírůstků funkčních hodnot a argumentu zleva a zprava mají opačné znaménko a společnou hodnotou limit zleva a zprava je v nula). Použijeme jí při hledání extrémů funkce v kapitole 8.

6.2 Věty o přírůstku funkce, o střední hodnotě

Další vztah mezi vlastnostmi spojité funkce a její derivací ukazuje tato věta:

Věta 6.4. (Rolle)
Nechť funkce $f(x) \in C\langle a,b\rangle$ *má v každém bodě intervalu* (a,b) *derivaci a platí* $f(a) = f(b)$. *Pak existuje bod* $c \in (a,b)$ *takový, že* $f'(c) = 0$.

Důkaz. Pro konstantní funkci je derivace nulová ve všech bodech takového intervalu. Pro obecnou funkci s uvedenými vlastnostmi se důkaz této věty opírá o Weierstrassovu větu (viz V.4.18), podle které taková funkce nabývá v uzavřeném intervalu své maximální i minimální hodnoty, které pro nekonstantní funkci jsou (alespoň jedna z nich) různé od hodnot $f(a) = f(b)$ a jsou tedy funkční hodnotou v bodě $c \in (a,b)$. Podle Fermatovy věty (V.6.3) v takovém bodě lokálního extrému platí $f'(c) = 0$ (viz obr. 9a). □

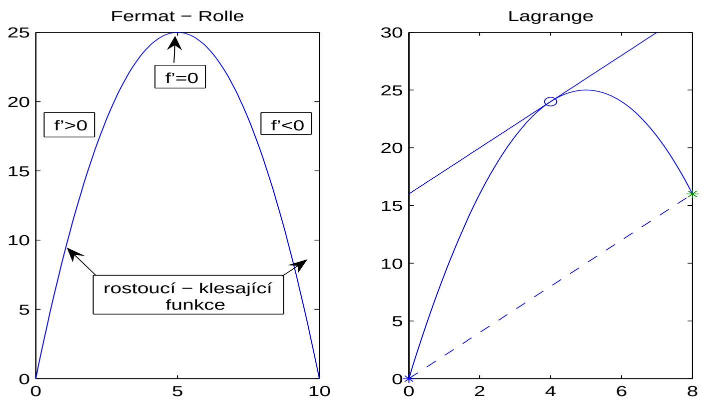
Příklad 6.5. Funkce $f(x) = x(x-1)(x-2)$ má nulové body (kořeny) $0, 1, 2$ a tedy její derivace má nulové body v intervalech $(0,1),(1,2)$.

Geometrická interpretace této věty nám říká, že graf takové funkce má v uvažovaném intervalu alespoň jednu tečnu s nulovou směrnicí - tedy rovnoběžnou s osou x .
Pokud funkce nemá derivaci v některém bodě intervalu, tvrzení nemusí platit (uveďte příklad !). △
Následující věta zobecňuje předchozí situaci a její další interpretace jí přinesla i označení " věta o přírůstku funkce " (viz např. [1-8]).

Věta 6.6. (Lagrange)
Jestliže $f(x) \in C\langle a,b\rangle$, $f'(x) \in C(a,b)$, *pak existuje* $c \in (a,b)$ *takové, že platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Big(\textit{tedy také} \quad f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).\Big) \tag{6.1}$$

Geometrická interpretace této věty (viz obr. 9b): za uvedených předpokladů existuje bod $c \in (a,b)$, ve kterém je směrnice tečny rovna směrnici sečny grafu funkce $f(x)$, procházející body $[a, f(a)], [b, f(b)]$. Tato vlastnost souvisí také s označováním této věty jako "věty o střední hodnotě diferenciálního počtu".
Přepis takové formulace do tvaru uvedeného v závorce nám ukazuje, jak se liší funkční hodnoty v bodech a, b a zdůvodňuje tak termín " věta o přírůstku funkce".
Důsledkem této věty je také rozšíření implikace $g(x) = f(x) + k \ \Rightarrow g'(x) = f'(x)$ na obrácenou implikaci $g'(x) = f'(x) \ \Rightarrow g(x) = f(x) + k, (k ... konstanta)$
při splnění odpovídajících předpokladů (zformulujte podrobněji !)



obr. 9 a), b) - ilustrace vět (Fermat, Rolle, Lagrange)

Příklad 6.7. Pro funkci $f(x) = x(x^2 - 1)$ platí $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$. V intervalech $(-1, 0), (0, 1)$ jsou body $c = \pm\sqrt{1/3}$ s nulovými hodnotami derivací.

Dalším zobecněním předchozí věty (kterou obsahuje jako speciální případ pro $g(x) = x$) je následující věta:

Věta 6.8. (Cauchy)
Nechť $f(x), g(x) \in C\langle a, b\rangle$ *a v každém bodě* $x \in (a, b)$ *existují jejich vlastní derivace* $f'(x), g'(x)$. *Pak existuje bod* $c \in (a, b)$ *takový, že platí*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \quad \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ při } g'(c) \neq 0.\right) \tag{6.2}$$

Důkaz. Pro konstrukci důkazu této věty definujeme funkci
$F(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]$.
Ta je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) a platí $F(a) = F(b) = 0$.
Podle Rolleovy věty tedy existuje $c \in (a, b)$, pro které je
$F'(c) = 0 = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$,
odkud plyne již tvrzení věty. □

Poznámka 6.9. Známější druhý tvar tvrzení této věty vyžaduje nenulovost první derivace - například pro funkce $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ platí v intervalu $\langle 0, 2\rangle$, neplatí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Věty uvedené v tomto odstavci použijeme v dalším při vyšetřování průběhu funkce, nebo odhadu derivací.

6.3 L'Hospitalovo pravidlo

Při výpočtu limit složitějších funkcí se setkáme se situací, kdy při použití pravidel o limitě podílu, rozdílu nebo složené funkce se nám jako limity v jejich složkách objeví tzv. *"neurčité výrazy"* typu (výhrady k tomuto termínu viz ve [2], příklady v [11])

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty,$$

pro které nejsou příslušné operace jednoznačně definovány a mohou vést k různým výsledkům, které závisí na poměru rychlostí, s jakou se jednotlivé faktory blíží ke svým limitám. Pro výpočet limit v takových situacích je důležitým nástrojem následující věta.

Věta 6.10. (L'Hospital)
Nechť funkce $f(x), g(x)$ jsou diferencovatelné v nějakém okolí bodu c.

1. *Jestliže současně platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \quad \text{a} \quad \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \quad \text{pak také} \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{6.3}$$

2. *Jestliže současně platí*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b,$$

$$\text{pak také} \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{6.4}$$

Příklad 6.11.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0. \qquad (\text{typ } |\frac{\infty}{\infty}|).$$

Tohoto výsledku můžeme použít pro výpočet limity typu ∞^0 :

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp(\frac{\ln(x)}{x}) = e^0 = 1.$$

Podobný postup použijeme pro limity výrazů typu $0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty$ (upozornění ve [2], str. 45 ukazuje na jisté problémy).

Příklad 6.12.

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x} \cdot (\frac{-1}{x^2})}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Tento výsledek můžeme použít k výpočtu limity neurčitého výrazu typu 1^∞

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{x\to\infty} \exp(x \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)) = \exp(\lim_{x\to\infty} x \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)) = e^1 = e.$$

Poznámka 6.13. L'Hospitalova pravidla můžeme použít i k výpočtu limit některých posloupností, generovaných funkcí $f(x)$ předpisem $f(n) = a_n$.
Platí totiž $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = L$ (dokažte !).

Příklad 6.14.

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp(\frac{\ln(x)}{x}) = \exp(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}) = \exp(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}) = e^0 = 1.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1.$

Příklad 6.15. L'Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít např. pro výpočet limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \ln(x).\sin(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 + \sin(x).\ln(x)/x)^{-1} = 1,$$

protože podíl derivací tam limitu nemá (ukažte !).

Příklad 6.16. V matematice se obvykle definuje symbol $0^0 = 1$;
to obecně neplatí pro limitu neurčitých výrazů tohoto typu -
např. pro $\forall x > 0$ je $x^{1/\ln(x)} = \exp(\ln(x)/\ln(x)) = e$ (konstantní funkce),
ale $\lim\limits_{x\to 0+} x = \lim\limits_{x\to 0+} (1/\ln(x)) = 0.$ $\triangle$

Shrnutí

V této kapitole jsme si zopakovali a rozšířili definice některých vlastností funkcí (D 6.1) a jejich extrémů. Ukázali jsme na souvislosti mezi vlastnostmi funkce a její derivace (pozn. 6.2, V 6.3-6.6). Použili jsme L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet některých limit funkcí.

Pojmy k zapamatování

- Monotonní funkce, druhy extrémů.
- Věty - Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, L'Hospital .

Kontrolní otázky

1. *Jak jsou definovány lokální extrémy funkce, oblasti monotonnosti ?*
2. *Jaké vztahy jsou mezi vlastnostmi funkce a její derivace ?*
3. *Pro jaké úlohy se používá L'Hospitalovo pravidlo ?*
4. *Platí takové pravidlo pro každou limitu podílu ?*

Použijte l'Hospitalova pravidla k výpočtu následujících limit.

Cvičení

1. $$\lim_{x\to 0}(\tan(x) - x)/(x - \sin(x)).$$
2. $$\lim_{x\to 0}(\cot(x) - \frac{1}{x}); \quad \lim_{x\to 0_+} \sqrt[3]{x}\ln(x).$$
3. $$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln(\frac{x-1}{x+1})\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln((x-1)/(x+1))}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2-1}.$$
4. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right).$$
5. $$a)\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\tan(\pi x/2); \qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x}^{1/x}.$$
6. $$a)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x^2}; \qquad b)\lim_{x\to 0}\exp(-1/x^2)\cdot\cot^2(x).$$

Řešení

1. $2.$
2. $0; \qquad 0.$
3. $-2.$
4. $1/2.$
5. $2/\pi; \qquad e^2.$
6. $e^{-1/6}; \qquad 0.$

7 Diferenciál, Taylorův rozvoj funkce

Studijní cíle: Geometrickou interpretací derivace funkce v bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Tato tečna je lineární aproximací této funkce v okolí bodu x_0, která v něm s použitím hodnoty derivace aproximuje přírůstek funkce (diferenci) jeho přibližnou hodnotou - diferenciálem funkce. Funkce které mají i vyšší derivace můžeme přesněji aproximovat v okolí takového bodu pomocí jejich Taylorova rozvoje, kde se použije derivací a diferenciálů vyšších řádů.
Klíčová slova: Derivace, diference, diferenciál, Taylorův rozvoj .
Potřebný čas: 200 minut.

Průvodce studiem

V této kapitole použijeme pojmu derivace funkce k aproximaci dané funkce (která může mít výpočetně náročný funkční předpis) v okolí daného bodu jejím diferenciálem. Pokud taková funkce má i vyšší derivace v tomto bodě, použijeme k její přesnější aproximaci Taylorova rozvoje v tomto bodě s uvedením výrazu pro jejich odchylku.

7.1 Diferenciál funkce

V předchozí kapitole jsme (v souladu s historickým vývojem diferenciálního počtu) označili za diferencovatelnou takovou funkci, která má v jistém intervalu derivaci.
Z geometrické interpretace derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 jako směrnice tečny ke grafu této funkce v bodě x_0 plyne, že funkce $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ je v okolí bodu x_0 lineární aproximací funkce $f(x)$ s vlastností $y(x_0) = f(x_0)$. Její odchylka v dalších bodech takového okolí závisí na dalších vlastnostech funkce $f(x)$ (existenci a vlastnostech vyšších derivací).

diference
diferenciál

Definice 7.1. Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí $x_0 + h \in O(x_0)$.
Diferencí (přírůstkem) funkce $f(x)$ v bodě x_0 s přírůstkem argumentu h nazýváme veličinu $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$.
Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě x_0 konečnou derivaci, pak funkci proměnné h
$df(x_0, h) := f'(x_0) \cdot h$ nazýváme *diferenciálem funkce* $f(x)$ v bodě x_0. △

Poznámka 7.2.

Při označení $h = x - x_0 = dx,\ y = f(x)$ dostaneme v Leibnizově symbolice jednoduché vztahy mezi derivací a diferenciálem: $dy = f'(x) \cdot dx = df(x)$.

Pojem diferenciálu funkce byl zobecněn i na funkce, u kterých se nepoužije v definici hodnota derivace - viz např. lit. [3]. Najdeme tam však i větu, že má-li funkce v bodě x_0 diferenciál, má v něm i vlastní derivaci a pro diferenciál pak platí i naše definice.

Geometrickou interpretaci pojmů diference, diferenciál funkce ukazuje obr.10a) . Diference představuje skutečný přírůstek funkce na intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$, diferenciál představuje odpovídající přírůstek funkční hodnoty na tečně ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 na stejném intervalu. Proto se diferenciál často používá k odvození formulí pro přibližný výpočet hodnot složitějších funkcí v okolí bodu se známou hodnotou takové funkce.

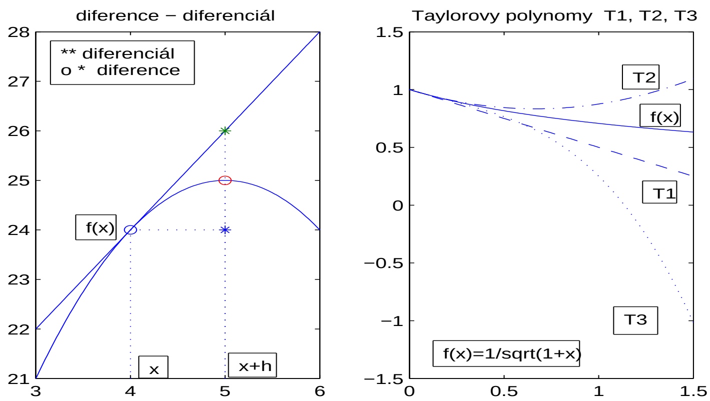
Příklad 7.3.
a) Pro funkci $f(x) = arccotg(x)$ známe její hodnotu
$arccotg(1) = \pi/4$. Pro přibližný výpočet hodnoty $arccotg(1.02)$ pomocí diferenciálu této funkce dostaneme
$arccotg(1.02) \simeq arccotg(1) + (arccotg(x))'_{x=1} \cdot 0,02 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0,02 \simeq 0.7754$
(zaokroouhlená přesná hodnota je 0.7755).

b) Přibližnou hodnotu $e^{0.02}$ spočítáme podobně ($x_0 = 0,\ h = 0.02$):
$e^{0.02} \simeq e^0 + e^0 \cdot 0,02 = 1 + 0,02 = 1,02$ (přesná hodnota je 1.0202).

c) Pro přibližnou hodnotu $\sqrt{35}$ dostaneme s použitím diferenciálu funkce $\sqrt{x},\ h = -1$
$\sqrt{35} \simeq \sqrt{36} + (1/2)36^{-1/2} \cdot (-1) = 6 - 1/12 = 5.917$ (přesná hodnota je 5.916).

d) V okolí počátku platí pro každé $a \in \mathbb{R}$ $\quad (1+x)^a \simeq 1 + ax$.

Příklad 7.4. Diferenciál funkce můžeme použít také k odhadu absolutní nebo relativní chyby funkční hodnoty $y = f(x)$ při známém odhadu chyby v argumentu x :
absolutní chyba $\simeq dy = f'(x)dx$,
pro relativní chyby platí $dy/y = (f'(x)/f(x))dx$.
Jestliže například změříme délku hrany krychle a s chybou Δa nebo s relativní chybou jedno procento, pak pro chybu při výpočtu jejího objemu $V = a^3$ platí přibližně
$dV = 3a^2 da$ pro odhad absolutní chyby, $dV/V = (3a^2 da)/a^3 = 3 \cdot (da/a)$ pro odhad relativní chyby.
Tedy absolutní chyba je asi $3a^2$-násobkem chyby da, pro relativní chybu objemu dostaneme asi trojnásobek relativní chyby délky hrany a. $\triangle$



obr. 10 a), b) - diference, diferenciál; Taylorovy polynomy

Podobně jako jsme definovali pro funkce rekurzivně derivace vyšších řádů, můžeme podobně zavést pojem jejich diferenciálů vyšších řádů v daném bodě, má-li funkce v jeho okolí odpovídající derivace. Pro první diferenciál $df(x,h) = f'(x) \cdot h$ jako funkci proměnné x je jeho derivací funkce $f''(x) \cdot h$ a tedy jeho diferenciálem je funkce $d^2 f(x) = f''(x) \cdot h^2$. (Zde jsme opět použili označení h pro přírůstek argumentu x.)
Podobně můžeme odvodit rekurzí i výrazy pro diferenciály vyšších řádů, uvedené v následující definici.

diferenciály vyšších řádů

Definice 7.5. Jestliže má funkce $f(x)$ v okolí bodu x derivace do řádu n včetně, pak její *n-tý diferenciál* je definován vztahem

$$d^n f(x,h) := d(f^{(n-1)}(x,h)) \cdot h = f^{(n)}(x) \cdot h^n \quad (= f^{(n)}(x) dx^n). \qquad (7.1)$$

Příklad 7.6. Pro funkci $f(x) = x^4$ je prvním, druhým a třetím diferenciálem v bodě x
$d^1f(x,h) = 4x^3h, \quad d^2f(x,h) = 12x^2h^2, \quad d^3f(x,h) = 24xh^3.$
V bodě $x = 1$ je tedy $d^1f(1,h) = 4h,\ d^2f(1,h) = 12h^2,\ d^3f(1,h) = 24h^3.$

Cvičení

1. Najděte diferenciál funkce $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v bodě $x = 0$. Jaký je rozdíl mezi diferenciálem a přírůstkem funkce při $h = 0.2$?
2. Pomocí diferenciálu ukažte, jak se přibližně změní plocha kruhu nebo kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu α
   a) při změně poloměru,
   b) při změně středového úhlu
   (uvažujte v obou případech její závislost jen na odpovídajícím jednom parametru).
3. Odvoďte pravidla pro výpočet diferenciálu součinu a podílu dvou funkcí, diferenciálu složené funkce.
4. U funkce zadané parametricky můžeme spočítat jen diferenciál každé její složky v závislosti na přírůstku parametru.
   Ukažte to na příkladu elipsy, cykloidy, srdcovky.

7.2 Taylorův rozvoj funkce

Pomocí první derivace a diferenciálu v daném bodě definičního oboru jsme v předešlé části aproximovali funkci lineárním polynomem v okolí tohoto bodu. V případě, že tato aproximace není dostatečně přesná a funkce má i derivace vyšších řádů, hledáme přesnější aproximaci funkce v okolí bodu $x = x_0$, která má s původní funkcí společné hodnoty $f^{(j)}(x_0),\ j = 0, 1, \cdots, n$ a dá se (např. v případě složitého funkčního předpisu původní funkce) snadno vyčíslit. Takovou funkcí je její Taylorův polynom, který dostaneme *Taylorovým rozvojem funkce v bodě* x_0 . Jeho tvar odvodíme např. srovnáním derivací polynomu

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

s požadavky $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0),\ j = 0, 1, \cdots, n$. Pro "neurčité koeficienty" a_j dostaneme takovým srovnáním výrazy

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = f''(x_0)/2!, \cdots a_n = f^{(n)}(x_0)/n!. \tag{7.2}$$

Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ *se středem* x_0 má tedy tvar

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7.3}$$

Pro rozdíl mezi hodnotami takové funkce $f(x)$ a jejího Taylorova polynomu (pro chybu aproximace funkce $f(x)$ polynomem $T_n(x)$) platí následující věta:

Věta 7.7. (Lagrange, Cauchy)
Jestliže funkce $f(x)$ *má v okolí bodu* x_0 *vlastní derivace až do řádu* $n + 1$*, pak pro všechna* x *z tohoto okolí platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x), \quad \textit{kde} \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n,\ \xi = \xi(x) \in (x_0, x). \tag{7.4}$$

Poznámka 7.8. Tento vztah se označuje také jako *Taylorův vzorec, Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ v bodě $x = x_0$*. Pro $R_{n+1}(x)$ se používá termín *zbytek v Taylorově vzorci*; pozice bodu ξ závisí na bodu x, ale není jednoznačně určena (proto ji jen odhadujeme a pro chybu aproximace tak dostáváme také jen horní odhad; jsou známy i jiné tvary zbytku Taylorova rozvoje).
Ve speciálním případě při $x_0 = 0$ se používá často termín *"Maclaurinův rozvoj."*
Pro $n = 0$ je speciálním případem Taylorova rozvoje věta o střední hodnotě diferenciálního počtu. Při $n = 1$ dostaneme na pravé straně diferenciál $df(x_0, h)+$ zbytek ; toto se dá použít k obecnější definici diferenciálu (viz [3,7,8]) .
Pro vyšší hodnoty n poznáváme v Taylorově polynomu postupné přičítání diferenciálů druhého až n-tého řádu v bodě x_0.

Příklad 7.9. Pro funkci $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ výpočtem jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ dostaneme její Taylorův polynom

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

se zbytkem $R_4(x) = -\frac{1.3.5}{2^4}\frac{x^4}{4!}(1 + \theta x)^{-7/2},\ \theta \in (0, 1)$.
Odhad velikosti zbytku (chyba aproximace) je

$$|R_4| \leq \frac{15}{16} \cdot \frac{x^4}{24}\ .$$

Horní odhad zbytku pro $x = 0.2$ je $6 \cdot 10^{-5}$; pro $x = 2.4$ ale dostaneme horní odhad 2.3 - to nám ukazuje, že chyba aproximace při větší vzdálenosti od středu může značně narůstat.
Vypočítejte hodnoty $f(x), T_3(x)$ v bodech $x = 0, 1; 0, 5; 1; 2$ a spočítejte si skutečnou odchylku ! Porovnejte grafy těchto funkcí v intervalu $\langle -1, 3\rangle$!

Příklad 7.10. Pro polynom $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ stupně k platí $P^{(n)}(x) \equiv 0,\ n > k$. Jeho Taylorův polynom $T_n(x)$ v bodě x_0 bude tedy opět polynom stupně k a zbytek v rozvoji bude nulový. Takový rozvoj provádí tedy transformaci polynomu v mocninách x^j na polynom v mocninách $(x - x_0)^j$.
Příklad: $x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1 = (x - 2)^4 + 6(x - 2)^3 + 13(x - 2)^2 + 11(x - 2) + 3.$
Popište podrobněji algoritmus takové transformace, ověřte na příkladech !

Příklad 7.11. Maclaurinovy rozvoje některých elementárních funkcí jsou uvedeny v následující tabulce:

funkce	rozvoj	zbytek ($\theta \in (0, 1)$)
e^x	$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}x^n$	$\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$	$(-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$(-1)^{n+1}\frac{\cos(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{!}{n}x^n$	$(-1)^n\frac{(1+\theta x)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1}$
$(1 + x)^{-1/2}$	$1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4 + \cdots$	
$\tan(x)$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{350}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$	
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$	

Příklad 7.12. Odhad zbytku Taylorova rozvoje nám umožňuje odhadnout potřebný počet členů rozvoje pro zadanou přesnost aproximace funkční hodnoty $f(x)$ v daném bodě. Máme-li například zjistit, kolik členů uvedeného rozvoje funkce $\sin(x)$ nám aproximuje funkční hodnotu $\sin(1/2)$ s přesností 5.10^{-4}, pak z výrazu pro odhad chyby dostaneme pro takové n podmínku $(1/2)^n/n! < 5 \cdot 10^{-4}$, tedy $2^n \cdot n! > 2000$, která je splněna pro $n \geq 5$. Ověřte tento výsledek výpočtem hodnot $T_4(1/2), \sin(1/2)$!

Příklad 7.13. Maclaurinův rozvoj složené funkce $\ln(\cos(x)), x \in (-\pi/2, \pi/2)$ začíná členy

$$\ln(\cos(x)) \sim -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + \cdots .$$

Ověřte, doplňte další členy, porovnejte výsledky na grafech.

Příklad 7.14. Grafy Maclaurinových polynomů $T_n(x),\ n = 1, 2, 3$ funkce $(1 + x)^{-1/2}$ jsou na obr. 10b).

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojmy diference a diferenciálu funkce (D 7.1), diferenciálů vyšších řádů (D 7.5) a ukázali jejich použití. Dalším novým objektem je Taylorův (Maclaurinův) rozvoj funkce jako aproximace funkce polynomem v okolí daného bodu.

Pojmy k zapamatování

- Diference, diferenciál funkce - jejich definice, použití.
- Taylorovy (Maclaurinovy) rozvoje elementárních funkcí (viz tabulka).

Kontrolní otázky

1. *Jaký je rozdíl mezi diferencí a diferenciálem funkce (ukažte na grafu) ?*
2. *Jaký je rozdíl mezi funkcí a jejím Taylorovým polynomem ?*
3. *Kdy platí $f(x) \equiv T_n(x)$?*

Cvičení

1. Pomocí diferenciálu vypočtěte $\sqrt{9986}$ a odhadněte chybu aproximace.
2. Rozviňte polynom $x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ v mocninách $(x + 1)^k$.
3. Najděte Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = (1 + x + x^2)/(1 - x + x^2)$.
4. V jakém intervalu Maclaurinův rozvoj funkce $(1 + x)^{-1/2} \sim 1 - x/2$ ji aproximuje s chybou menší než 0.01 ? Kolik členů rozvoje je třeba pro aproximaci na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$ s přesností 0.001 ?
5. Jak spočítat Taylorův rozvoj součinu funkcí $f(x).g(x)$, podílu $f(x)/g(x)$ ze známých rozvojů funkcí $f(x), g(x)$?
6. Použijte Maclaurinova rozvoje k výpočtu limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.
7. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}(e^x \cdot \sin(x) - x(1 + x))/x^3$
   a) užitím L´Hospitalova pravidla , b) užitím Maclaurinova rozvoje .
8. Najděte

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$$

9. Ukažte, že vzorec pro pohybovou energii tělesa o hmotnosti m a s rychlostí v v relativistické mechanice

$$E_r = mc^2((1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} - 1), \qquad \text{c - rychlost světla}$$

obsahuje pro relativně malé rychlosti částice o hmotnosti m s rychlostí $v \ll c$ klasický vzorec $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Řešení

1. $\sqrt{9986} \simeq 99.93,\ R_2 < 0.25 \cdot 10^{-6}$;
2. $19 - 8(x+1) + 3(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$
3. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - 2x^5 + 2x^7 + \cdots$
4. 0.1; 8
5. Použít pravidla o derivaci součinu a podílu; nebo vynásobit rozvoje jednotlivých funkcí, rozvinout jejich podíl .
6. $\lim_{x \to 0}(1 - x^2/6 + \cdots) = 1.$
7. 1/3
8. -1/2
9. $E_r \sim mc^2(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1) \to \frac{1}{2}mv^2.$

8 Extrémy, průběh funkce

Studijní cíle: Cílem této kapitoly je shrnout dosavadní poznatky o vlastnostech reálných funkcí jedné proměnné (definiční obor, spojitost, monotonnost,derivace) a rozšířit je o další (konvexnost, konkávnost, extrémy, asymptoty). Budeme při tom používat souvislostí mezi uvedenými vlastnostmi funkce a vlastnostmi jejích derivací. Popíšeme pak stručně jednotlivé kroky při celkovém vyšetřování průběhu funkce.
Klíčová slova: monotonnost, extrémy, inflexní bod; lokální a globální maximum, minimum; konvexnost, konkávnost funkce, vyšetření průběhu funkce
Potřebný čas: 360 minut.

Průvodce studiem

V předešlých kapitolách jsme se již seznámili s definicí rostoucí a klesající funkce. V této kapitole uvedeme další důležité třídy funkcí - funkce konvexní a konkávní. Všechny tyto vlastnosti ukazují vlastnosti procesu, popsaného matematickým modelem - funkcí $f(x)$. V praxi je důležité také znát maximální a minimální hodnoty, kterých funkce může dosáhnout, nebo její další vlastnosti. V této kapitole se podrobněji seznámíme se souvislostmi mezi takovými vlastnostmi funkce a vlastnostmi jejích derivací a s celkovým postupem při vyšetřování jejího průběhu a vlastností.

V předešlých kapitolách (elementární funkce, základní věty) jsme již uvedli pojmy rostoucí, klesající funkce a jejich souvislost s vlastnostmi první derivace takové funkce. Zopakujeme si je a rozšíříme o další pojmy v této kapitole.

8.1 Monotonnost funkce

Termín *monotonní funkce* obsahuje třídy funkcí rostoucích a klesajících (viz D 2.5, D 6.1). Takové vlastnosti funkce poznáme s jistou přesností i na grafu takové funkce, který nám vykreslí počítač na obrazovce. Jestliže taková funkce má i první derivace, pak případné upřesnění některých detailů můžeme provést pomocí jejích prvních derivací.

Poznámka 8.1. Porovnáme-li definici rostoucí a klesající funkce na intervalu I s odpovídající vlastností její derivace (za předpokladu její existence a nulovosti jen v izolovaných bodech - viz Poznámka 6.2), dostaneme tuto dvojici vzájemných vztahů

vztah: monotonnost -derivace

1. pro rostoucí funkci na intervalu I:
   $\{\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\} \Leftrightarrow \{f'(x) \geq 0, \forall x \in I\}$;
2. pro klesající funkci:
   $\{\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\} \Leftrightarrow \{f'(x) \leq 0, \forall x \in I\}$.

Podobné vztahy jsou mezi nerostoucí a neklesající funkcí a její derivací, kde ovšem derivace může být nulová i na částech intervalu (zformulujte podrobněji, uveďte příklady).

Příklad 8.2. (Rostoucí funkce)

Funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí funkcí, její derivace $f'(x) = 3x^2$ je kladná pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (počátek je izolovaným bodem s nulovou derivací).

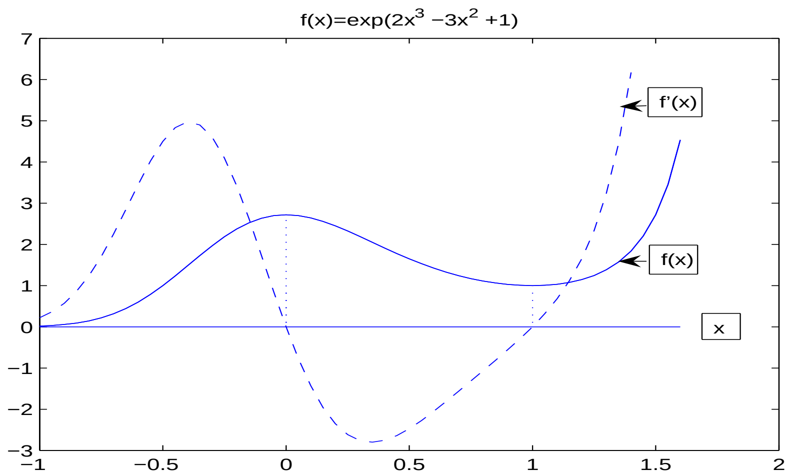
Funkce $f(x) = x + \sin(x)$ má derivaci $f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$, rovnou nule jen v izolovaných bodech (v lichých násobcích čísla π). Je proto rostoucí funkcí na celém intervalu $(+\infty, -\infty)$.

Příklad 8.3. (Klesající funkce)

Funkce $f(x) = x/(x^2 - 6x - 16)$ je definována na celé reálné ose s výjimkou nulových bodů jmenovatele - čísel $x = -2, 8$. Její derivace $f'(x) = -(x^2+16)/(x^2-6x-16)^2$ má stejný definiční obor a je na něm záporná. Tedy funkce $f(x)$ je na všech třech částech svého definičního oboru - intervalech $(-\infty, -2), (-2, 8), (8, +\infty)$ - klesající funkcí. Ověřte si to na grafu této funkce!

Příklad 8.4. (Složitější průběh)

Funkce $f(x) = \exp(2x^3 - 3x^2 + 1)$ je definována a spojitá na celé reálné ose. Její derivace $f'(x) = 6x(x-1)\exp(2x^3 - 3x^2 + 1)$ je rovna nule při $x = 0, +1$, na intervalech $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ je kladná, na intervalu $(0, 1)$ je záporná. Proto je tato funkce rostoucí na intervalech $(-\infty, 0), (1, +\infty)$, klesající na intervalu $(0, 1)$. Ověříme si to na grafu této funkce (obr. 11)!
Na něm uvidíte, že v bodě $x = 0$ nabývá tzv. lokálního maxima $f(0) = e \simeq 2.7$, v bodě $x = 1$ lokálního minima $f(1) = 1$. Výpočtem nevlastních limit (nebo z grafu) zjistíme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$. Zde jsme použili intuitivně pojmů lokální maximum, minimum, kterým se budeme věnovat v další části.



obr. 11 - průběh funkce $f(x) = exp(2x^3 - 3x^2 + 1)$

Příklad 8.5.

Funkce $f(x) = \arctan(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)})$ má za definiční obor celou reálnou osu s výjimkou bodů $x = \frac{3}{2}\pi \pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Její graf se z tohoto funkčního předpisu obtížně odhaduje. Výpočtem její derivace (poněkud složitějším - proveďte !) zjistíme, že ta je ve všech bodech definičního oboru konstantní $\cdots f'(x) = -1/2$. Vzhledem ke geometrickému významu derivace tak můžeme říci, že tato funkce je po částech lineární. Podrobnější vyšetření vlastností této funkce provedeme v závěru této kapitoly.

8.2 Lokální a globální extrémy funkce - minima, maxima

Na řadě příkladů se můžeme přesvědčit, že v rozsáhlé množině reálných funkcí najdeme příklady takových funkcí, jejichž grafy se nerovnoměrně " vlní " a ukazují tak na místa v jejich definičním oboru (kterých ale zde může být více), ve kterých jsou funkční hodnoty v jistém okolí větší či menší než ostatní nejbližší hodnoty. Nás pak mohou zajímat také jen vůbec největší a nejmenší hodnoty, kterých funkce na svém definičním oboru nabývá (globální maxima, minima; používá se též termín absolutní maxima, minima). Rozšíříme tedy Definici 6.1 o tyto druhy extrémů.

Definice 8.6. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I \subseteq D(f)$

- *lokální maximum*, existuje-li okolí $O(x_0) \in I$ takové, že
  $\forall x \in O(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$;
- *ostré lokální maximum* , jestliže v tomto okolí pro $x \neq x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$;
- *globální (absolutní) maximum na intervalu I*, jestliže $\forall x \in I$ platí $f(x) \leq f(x_0)$;
- *ostré globální (absolutní) maximum na intervalu I*, jestliže $\forall x \in I \setminus x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$.

Podobně můžeme definovat *lokální minimum, ostré lokální minimum, globální (absolutní) minimum* funkce v bodě.
Lokální maxima a minima se označují společným termínem *lokální extrémy.* $\triangle$

stacionární bod

Na grafu funkce často vidíme, že extrém může nastat v bodě, kde funkce nemá derivaci (špičky v bodech s různými derivacemi zleva, zprava, body nespojitosti). Při zkoumání vztahů mezi vlastnostmi funkce a její derivace jsme poznali, že nenulová derivace charakterizuje rostoucí nebo klesající funkci. Body s nulovou hodnotou derivace - tzv. *stacionární body* definičního oboru - nemusí být obecně body extrému (viz příklad funkcí x^{2k+1} v bodě $x_0 = 0$), ale jsou hlavními kandidáty pro tuto pozici, jak také plyne z Fermatovy věty. Existenci globálních maxim a minim funkcí spojitých na uzavřených intervalech nám zajišťuje Weierstrassova věta (V 4.19).

Věta 8.7. Nutná podmínka extrému
Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální extrém, potom platí $f'(x_0) = 0$, nebo v něm derivace neexistuje. $\triangle$

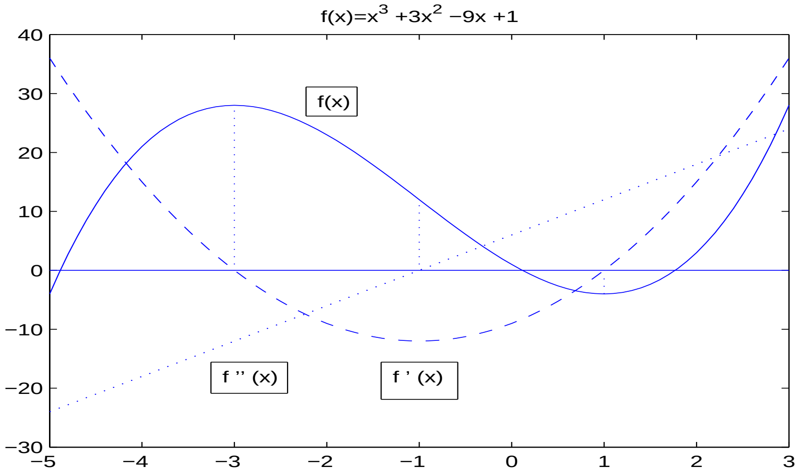
K rozlišení, zda se ve stacionárním bodě jedná o maximum nebo minimum, nám kromě grafu funkce mohou pomoci i informace o hodnotě vyšších derivací ve stacionárním bodě.

Věta 8.8. *Jestliže funkce $f(x)$ má ve svém stacionárním bodě x_0 druhou derivaci, pak*
- při $f''(x_0) > 0$ má v bodě x_0 lokální minimum,
- při $f''(x_0) < 0$ má v bodě x_0 lokální maximum .
V obecnější situaci, při $f^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n-1;\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
- při n sudém , $f^{(n)}(x_0) < 0, (f^{(n)}(x_0) > 0)$ je v bodě x_0 lokální maximum (minimum),
- při n lichém není v bodě x_0 extrém. $\triangle$

Poznámka 8.9. První - jednodušší - část tvrzení věty vyplývá z toho, že první derivace je ve stacionárním bodě za uvedených předpokladů rostoucí, resp. klesající funkcí.

Příklad 8.10.

Vyšetříme intervaly monotonnosti a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ (porovnejte s grafem této funkce na obr. 12).
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9, \quad f''(x) = 6x + 6;$
stacionárními body jsou $x_1 = -3,\ x_2 = 1$.
$f'(x) > 0$ platí pro $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ - funkce je zde rostoucí;
$f'(x) < 0$ pro $x \in (-3, 1)$ - funkce je zde klesající.
Ve stacionárních bodech je $f''(-3) = -12 < 0$ - lokální maximum $f(-3) = 28$,
$f''(1) = 7 > 0$ - lokální minimum $f(1) = -4$. Funkce nemá globální extrémy.



obr. 12 - monotonnost a extrémy funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

Příklad 8.11.

Polynom $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)$ má derivaci $3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Je proto rostoucí funkcí na celé reálné ose (ověřte na grafu !). Na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ má minimum v bodě $x = a$, maximum v bodě $x = b$.

Pro polynom $P(x) = 2x^6 + x^4 + 24$ je $P'(x) = 12x^5 + 4x^3 = 4x^3(3x^2 + 1)$.
V jediném stacionárním bodě $x = 0$ je ale také $P''(0) = P'''(0) = 0,\ P^{(4)}(0) = 24$.
Funkce je proto klesající v intervalu $(-\infty, 0)$, má lokální minimum v bodě $x = 0$, je rostoucí v intervalu $(0, +\infty)$.

Příklad 8.12.

Funkce $f(x) = \exp(x^3 - 5x)$ je definována, spojitá a kladná na celé reálné ose.
Její první derivace je $f'(x) = (3x^2 - 5) \cdot \exp(x^3 - 5x)$,
stacionárními body jsou $x = \pm\sqrt{5/3}$,
druhá derivace je $f''(x) = (9x^4 - 30x^2 + 6x + 25) \cdot \exp(x^3 - 5x)$;
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -\sqrt{5/3}), (\sqrt{5/3}, +\infty)$ - funkce je zde rostoucí,
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3})$ - funkce je zde klesající,
$f''(-\sqrt{5/3}) < 0$ - lokální maximum, $\quad f''(\sqrt{5/3}) > 0$ - lokální minimum.

geometrické problémy

Příklad 8.13.

Máme určit rozměry rotačního válce, který má při daném objemu nejmenší povrch (optimální rozměry sudu s daným objemem a minimální spotřebou materiálu).
Označíme-li r - poloměr, v - výšku, V - objem, S - povrch takového válce, pak mezi těmito parametry platí vztahy $V = \pi r^2 v, \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r v.$
Odtud pro závislost povrchu na poloměru dostaneme vztah
$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2V/r, \quad S'(r) = (4\pi r^3 - 2V)/r^2.$
Stacionárním bodem je pak $r_0 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}, \ S''(r) = 4(\pi r^3 + V)/r^3, \ S''(r_0) > 0.$
Válec o objemu V bude tedy mít minimální povrch při poloměru $r_0 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ s výškou $v_0 = 2r_0$ - tedy osovým řezem tohoto válce bude čtverec.

Příklad 8.14. Do rotačního kužele o poloměru R a výšce h máme vepsat válec
a) s maximálním objemem;
b) s maximálním povrchem.
Z osového řezu kužele pomocí podobnosti trojúhelníků plyne pro parametry válce v - výška, r - poloměr základny vztah $v/(R - r) = h/R.$

ad a) Pro objem V vepsaného válce dostaneme po dosazení vztah
$V = \pi r^2 v = (\pi h/R)(R - r)r^2.$
Pro vyhledání extrému spočítáme první derivaci

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi h}{R}(2r(R - r) - r^2) = \frac{\pi h}{R} r(2R - 3r).$$

Nulová hodnota první derivace je pro $r_0 = 2R/3, \ v_0 = h(R - r_0)/R = h/3.$
Maximální hodnota objemu vepsaného válce (druhá derivace je záporná) je tedy
$V_0 = \pi r_0^2 v_0 = \frac{4}{27}\pi R^2 h$ (t.j. 4/9 objemu kužele).

ad b) Pro povrch S vepsaného válce platí vztah
$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi[r^2 + rh(1 - r/h)].$
Podmínka nulovosti první derivace

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r + h - \frac{2h}{R} r) \quad \text{je splněna při } r = r_0 = \frac{hR}{2(h - R)}.$$

Při $h < R$ je první derivace kladná a $S(r)$ je v intervalu $(0, R)$ rostoucí funkcí - maximální hodnota pro $r = R, \ v = 0, \ S = \pi R^2$ odpovídá degenerovanému případu, kdy se povrch válce redukuje na plochu základny kužele. Aby platila podmínka $r_0 \in (0, R)$, je třeba aby $h > 2R$. Při jejím splnění je pro $r < r_0$ $(r > r_0)$ první derivace funkce $S(r)$ rostoucí (klesající) funkcí - funkce dosahuje pro $r = r_0$ svého maxima.

Cvičení

1. Vyšetřete existenci lokálních, případně globálních extrémů funkcí
   a) $f(x) = x - 1/x$, $\quad$ b) $f(x) = x^2 \cdot \exp(-x)$ $\quad$ c) $f(x) = x - \ln(1 + x).$
   Ověřte si výsledky na grafech těchto funkcí.
2. Ze všech obdélníků o obsahu S najděte obdélník s nejmenším obvodem.
3. Do koule s poloměrem R vepište válec s maximálním objemem (povrchem).
4. Dané kouli opište kužel s minimálním objemem.

5. Dvě letadla letí ve stejné výšce po přímých tratích svírajících úhel θ s konstantními rychlostmi u, v. Určete nejmenší vzdálenost na kterou se přiblíží, jestliže jsou nyní od průsečíku tras ve vzdálenostech a, b.

Řešení

1. a) nemá extrém; b) minimum pro $x = 0$, maximum pro $x = 2$;
   c) minimum pro $x = 0$.
2. Čtverec se stranou délky $s = \sqrt{S}$.
3. Maximální objem je $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$, maximální povrch je asi 81 procent povrchu koule.
4. Objem takového kužele je dvojnásobkem objemu koule.
5. Minimální vzdálenost je $|av \pm bu| \sin(\theta) / \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(\theta)}$.

8.3 Konvexnost, konkávnost funkce

Konvexnost nebo konkávnost funkce (resp. grafu funkce) je další její významnou vlastností. Souvisí také s pojmy konvexní kombinace bodů, konvexnosti nebo konkávnosti plošných a prostorových objektů. Pro každou z těchto dimenzí platí následující definice konvexní kombinace bodů.

Definice 8.15. *Bod x je konvexní kombinací bodů $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^n$,* jestliže

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1. \tag{8.1}$$

Množina všech konvexních kombinací bodů $x_1, \cdots, x_n$ se nazývá *konvexním obalem* těchto bodů. $\triangle$

Konvexním obalem dvou bodů je množina všech bodů spojující úsečky. Konvexním obalem tří bodů je množina všech bodů trojúhelníku s těmito vrcholy. Pro čtyři body v prostoru $\mathbb{R}^3$, které neleží v jedné rovině, je jejich konvexním obalem čtyřstěn s vrcholy v těchto bodech. Pro čtyři nebo více bodů v rovině je jejich konvexním obalem sjednocení bodů všech trojúhelníků, které mají vrcholy v některých třech z těchto bodů. Podobně to platí i pro konvexní obal bodů v prostoru (sjednocení čtyřstěnů).

Definice 8.16. Spojitá funkce $f(x)$ je *konvexní (konkávní) na intervalu $I \subset D(f)$*, jestliže pro libovolné body

konvexní funkce konkávní

$$x_1, x_2 \in I,\ x = c_1 x_1 + c_2 x_2,\ \ c_1 > 0, c_2 > 0,\ \ c_1 + c_2 = 1$$
$$\text{platí } f(x) \leq c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \quad (\ f(x) \geq c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)\ ). \tag{8.2}$$

(Geometricky: bod $[x, f(x)],\ \forall x \in (x_1, x_2)$ leží pod (resp. nad) odpovídajícím bodem přímky spojující body $f(x_1), f(x_2)$ na grafu funkce).
V případě ostrých nerovností je taková funkce *ostře (ryze) konvexní či konkávní.* $\triangle$

Příklad 8.17. Na grafech elementárních funkcí si z geometrické interpretace definic ověříme, že

- funkce $f(x) = x^2$ je konvexní na celé reálné ose,
funkce $f(x) = x^3$ je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$, konvexní na intervalu $(0, +\infty)$;

- exponenciální funkce a^x, $a > 0$ je konvexní funkcí na celé reálné ose;

- logaritmická funkce $\log_a(x)$, $a > 1$ je konkávní funkcí na intervalu $(0, +\infty)$, pro $0 < a < 1$ je na stejném intervalu konvexní funkcí .

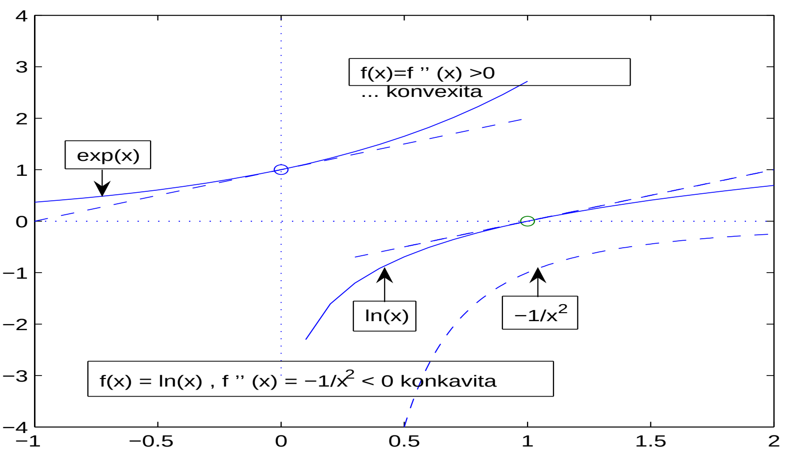
Poznámka 8.18.

Uvedené podmínky konvexnosti nebo konkávnosti splňují také některé spojité funkce po částech lineární - konvexní nebo konkávní polygony, které mají první derivaci po částech konstantní.

Z geometrické interpretace první a druhé derivace také plyne, že pro funkci se spojitou první a druhou derivací na intervalu platí (viz obr. 13) *vliv $f''(x)$*

- při $f''(x) \geq 0$ je funkce $f'(x)$ rostoucí funkcí, $f(x)$ je konvexní funkcí;

- při $f''(x) \leq 0$ je funkce $f'(x)$ klesající funkcí, $f(x)$ je konkávní funkcí.
Nulovost druhé derivace v bodě tedy může souviset se změnou konvexnosti na konkávnost v levém a pravém okolí tohoto bodu nebo naopak.



obr. 13 - vztah mezi $f''(x)$, konvexností a konkávností

Definice 8.19. (Inflexní bod)
Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci a existuje takové jeho δ-okolí, že v bodě x_0 mění funkce $f(x)$ v sousedních intervalech $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$ vlastnost konvexnosti na konkávnost nebo naopak. Takový bod x_0 se nazývá *inflexní bod funkce* $f(x)$. *inflexní body*

Věta 8.20. Podmínky inflexe
Je-li x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$, pak buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.
Jestliže $f^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 2, 3, \cdots n - 1, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$
pak při n lichém je x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$, při n sudém inflexe nenastane.

Příklad 8.21.

Funkce $f(x) = x^2$ má druhou derivaci $f''(x) = 2 > 0$; je tedy konvexní, nemá inflexní bod.

Funkce $f(x) = x^3$ má druhou derivaci $f''(x) = 6x$; inflexním bodem je $x_0 = 0$, v něm se mění z konkávní funkce na funkci konvexní.

Pro funkci $f(x) = x^4$ je $f''(0) = f'''(0) = 0, f^{(4)} = 24$ - nula není inflexním bodem.

Funkce $f(x) = |1 - x^2|,\ D(f) = \mathbb{R}$ nemá v bodech $x = \pm 1$ druhou derivaci, nabývá v nich minimální hodnoty $f(1) = 0$ a mění se v nich z funkce konvexní na konkávní.

Funkce $f(x) = \sin(x)$ s druhou derivací $f''(x) = -\sin(x)$ má inflexní body $x_k = k\pi$, na intervalech $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ je konvexní, na ostatních konkávní funkcí.

Funkce $f(x) = 2(x-2)^5 + 3x$ má derivace $f'(x) = 10(x-2)^4 + 3 > 0$, $f''(x) = 40(x-2)^3$. Je tedy rostoucí funkcí, na intervalu $(-\infty, 2)$ konkávní, na intervalu $(2, +\infty)$ konvexní, s inflexním bodem $x = 2$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $f(x) = x - \sin(2x)$ najdeme na obr. 14a), kde jsou vyznačeny také body inflexe (propočítejte podrobněji !).

8.4 Asymptoty grafu funkce

Při výpočtu limit funkcí jsme se potkali s případy nevlastních limit ve vlastních bodech nespojitosti (jednostranných nebo dvoustranných) i s případy vlastních limit v nevlastních bodech. To jsou speciální případy situací, kdy se graf funkce " blíží k přímce, " které podrobněji a obecněji formuluje pojem *asymptoty funkce* .

Definice 8.22. Pro bod $x_0 \in R$ se přímka $x = x_0$ nazývá *asymptotou bez směrnice (svislou, vertikální asymptotou) funkce* $f(x)$, jestliže $f(x)$ má v x_0 alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.
Přímka $y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá *asymptotou se směrnicí funkce* $f(x)$, jestliže platí

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0, \quad \text{nebo} \lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0. \tag{8.3}$$

Věta 8.23. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b. \tag{8.4}$$

Analogické tvrzení platí i pro $x \to -\infty$. △

Příklad 8.24. Funkce $f(x) = (x-1)^3/(x+1)^2$ je spojitá na celé reálné ose s výjimkou bodu $x = -1$, ve kterém není definována. Limita v tomto bodě zleva i zprava je $-\infty$. Tedy jedinou svislou asymptotou je přímka $x = -1$. Výpočtem dále dostaneme pro koeficienty asymptoty se směrnicí hodnoty

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}\{\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\} = -5.$$

Asymptotou se směrnicí pro $x \to +\infty$ je tedy přímka $y = x - 5$. Ta je také asymptotou i pro $x \to -\infty$. *jedna asymptota*

Příklad 8.25. Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ má svislou asymptotu v bodě nespojitosti $x = 1$. Přímka $y = x$ je opět jedinou asymptotou pro $x \to \pm\infty$.

Příklad 8.26. Funkce $2x + \sin(x)/x$ má odstranitelný bod nespojitosti $x = 0$ s limitou v tomto bodě rovnou jedné - nemá tedy vertikální asymptotu.
Při výpočtu koeficientů asymptoty se směrnicí dostaneme

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (2+\frac{1}{x^2}\sin(x)) = 2, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Asymptotou je tedy přímka $y = 2x$, graf funkce se k ní přimyká z obou stran.

Příklad 8.27. Funkce $f(x) = x - 2\arctan(x)$ je definována na celé reálné ose a je zde lichou spojitou funkcí. Nemá vertikální asymptoty; pro koeficienty asymptoty se směrnicí dostaneme

dvě asymptoty

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (1 - 2\arctan(x)/x) = 1,$$

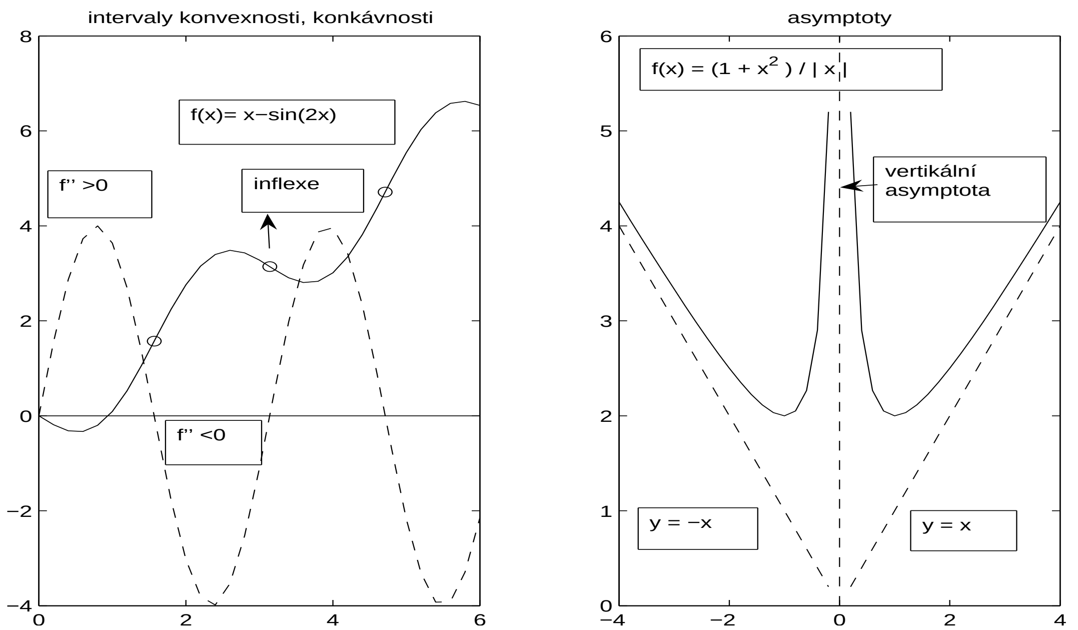
$$\lim_{x\to\pm\infty} (x - 2\arctan(x) - x) = \pm\pi.$$

Dostáváme tak dvě asymptoty : $y = x - \pi$ pro $x \to +\infty$, $y = x + \pi$ pro $x \to -\infty$.

Příklad 8.28. Funkce $f(x) = (1 + x^2)/|x|$ je definována na celé reálné ose s výjimkou počátku, ve kterém má vertikální asymptotu. Má stejnou nevlastní limitu $+\infty$ pro $x \to \pm\infty$. Při výpočtu koeficientů asymptoty se směrnicí dostaneme

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + x^2}{x|x|} = \pm 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{1 + x^2}{x|x|} - x) = 0.$$

Tato funkce má tedy vertikální asymptotu v počátku a dvě asymptoty (obr. 14b):
$y = -x$ pro $x \to -\infty$, $y = x$ pro $x \to +\infty$.



obr. 14 a), b) - konvexnost, konkávnost, inflexe; asymptoty

8.5 Vyšetřování průběhu funkce

V této části shrneme jednotlivé předchozí kroky, ve kterých jsme vyšetřovali různé vlastnosti reálné funkce jedné proměnné z jejího funkčního předpisu. Chceme-li získat poměrně podrobný přehled o vlastnostech funkce s po částech spojitou druhou derivací, doporučuje se postupně provést následující kroky (kritické připomínky viz [2]).

postup vyšetřování

1. Analýzou funkčního předpisu určíme definiční obor funkce, případně některé její vlastnosti (funkce sudá, lichá, periodická, ...). Najdeme intervaly spojitosti, body nespojitosti a chování funkce v jejich okolí (typ nespojitosti).

2. Určíme nulové body funkce a intervaly, kde je funkce kladná či záporná (řešením rovnice $f(x) = 0$, výpočtem funkční hodnoty v intervalech mezi nulovými body).

3. Vypočítáme první derivaci funkce a podle jejího znaménka vyšetřujeme
   - stacionární body, body možných extrémů ($f'(x) = 0$, změna znaménka $f'(x)$),
   - intervaly monotonnosti mezi stacionárními body ($f'(x) > 0$ - rostoucí, $f'(x) < 0$ - klesající funkce).

4. Vypočítáme druhou derivaci funkce a podle jejího znaménka určíme
   - intervaly konkávnosti ($f'' < 0$) a konvexnosti ($f'' > 0$) funkce,
   - druhy extrémů a inflexní body (podle změny znaménka f'', $f''(x) = 0,$ V 8.20).

5. Vyšetříme případnou existenci asymptot a určíme jejich rovnice (viz V 8.23).

6. Spočítáme funkční hodnoty funkce na dostatečně husté síti bodů definičního oboru a nakreslíme graf funkce, případně jeho asymptoty.

Poznámka 8.29. S použitím počítače můžeme poslední uvedený krok provést jako druhý v pořadí a při dostatečné opatrnosti při volbě sítě bodů pro vykreslení grafu v okolí bodů nespojitosti pak nám další kroky upřesňují a potvrzují vlastnosti grafu funkce, který vidíme na obrazovce (někdy nás upozorní na chybu, které jsme se dopustili při zadání pro kreslení grafu nebo při výpočtech).

Příklad 8.30. Funkce $f(x) = x^3/(4 - x^2)$ má definiční obor $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ a je lichou funkcí - graf bude symetrický vzhledem k počátku ($f(0) = 0$) a stačí proto vyšetřovat vlastnosti funkce jen na intervalech $\langle 0, 2), (2, +\infty)$. Ve všech bodech definičního oboru je spojitou funkcí. Výpočtem dostaneme hodnoty limit

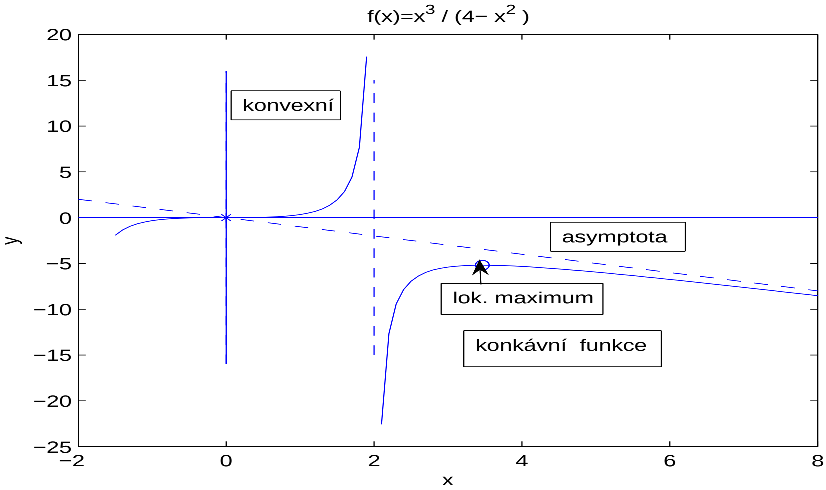
$$\lim_{x\to 2-} \frac{x^3}{(2+x)(2-x)} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2+} \frac{x^3}{(2+x)(2-x)} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty.$$

Graf funkce má proto svislou asymptotu v bodech $x = -2, x = 2$ (symetrie).
Pro derivaci dostaneme výpočtem $f'(x) = x^2(12 - x^2)/(4 - x^2)^2$,
$f'(0) = 0 = f'(\pm 2\sqrt{3})$. Na intervalech $(-2\sqrt{2}, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, 2\sqrt{3})$
je derivace kladná - funkce je tam rostoucí,
na intervalech $(-\infty, -2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, +\infty)$ je derivace záporná - funkce je tam klesající,
v bodě $x = -2\sqrt{3}$ má funkce lokální minimum $f(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$,
v bodě $x = 2\sqrt{3}$ má funkce lokální maximum $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$.
Druhá derivace naší funkce je $f''(x) = 8x(12 + x^2)/(4 - x^2)^3, \quad f''(0) = 0.$
Z lichosti funkce plyne, že nula je inflexním bodem grafu této funkce.
Na intervalech $(-\infty, -2), (0, 2)$ je $f''(x) > 0$ - funkce je tam konvexní,
na intervalech $(-2, 0), (2, +\infty)$ je $f''(x) < 0$ - funkce je tam konkávní.

Při výpočtu koeficientů asymptoty se směrnicí dostaneme

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1,\ b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^3}{4-x^2} + x) = 0.$$

Vzhledem k symetrii bude tedy přímka $y = -x$ asymptotou naší funkce při $x \to \pm\infty$. Část grafu této funkce je na obr. 15.



obr. 15 - průběh funkce $f(x) = x^3/(4-x^2)$

Příklad 8.31. Funkce $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$ je složenou funkcí, kde vzhledem k definičnímu oboru vnější funkce (kterým je interval $\langle -1, 1\rangle$) argument vnitřní funkce musí splňovat podmínku $-1 \le 2x/(1+x^2) \le 1$, která je ale splněna na celé reálné ose. Definičním oborem naší funkce je tedy množina všech reálných čísel. Vzhledem k lichosti vnitřní i vnější funkce je i složená funkce lichá - její vlastnosti budou tedy " antisymetrické." Tato funkce je všude spojitá a nemá proto svislou asymptotu.
Jediným nulovým této funkce je $x = 0$, záporných hodnot nabývá v intervalu $(-\infty, 0)$, kladných hodnot v intervalu $(0, +\infty)$.
Výpočtem první derivace dostaneme

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-1)^2}}.$$

Úpravou (po správném zápisu výrazu pod odmocninou v jednotlivých intervalech) dostaneme

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2+1},\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \quad f'(x) = \frac{2}{x^2+1},\ x \in (-1, 1).$$

V bodech $x = -1, x = 1$ existují pouze jednostranné derivace, které spočítáme jako odpovídající limity funkce $f'(x)$:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{-2}{1+x^2} = -1,\ \lim_{x\to-1^+} \frac{2}{1+x^2} = 1,\ \lim_{x\to1^-} \frac{2}{1+x^2} = 1,\ \lim_{x\to1^+} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

V bodech $x = -1, 1$ jsou tedy různé derivace zleva, zprava - jsou to tzv. "body vratu, úhlové body", ve kterých má graf "špičku" .
První derivace je kladná v intervalu $(-1, 1)$ a naše funkce je tam proto rostoucí.

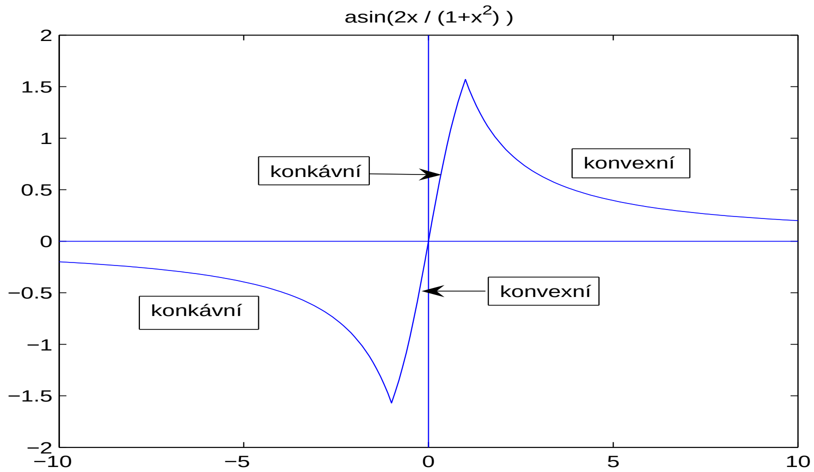
Na intervalech $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ je první derivace záporná a $f(x)$ je tam klesající funkcí. Přestože funkce $f(x)$ nemá v bodech $x = -1, 1$ první derivaci, nabývá podle uvedených vět v bodě $x = -1$ svého minima, v bodě $x = 1$ svého maxima.
Výpočtem druhé derivace na jednotlivých intervalech dostaneme

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2},\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),\quad f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2},\ x \in (-1, 1).$$

Nulovým bodem druhé derivace je $x = 0$ - je to inflexní bod podle naší definice. V něm se mění znaménko druhé derivace a tedy konvexní část grafu přechází v konkávní část. Změna konvexní části v konkávní nastává také v bodech vratu $x = 1,\ x = -1$, kde také dochází ke změně znaménka druhé derivace. Pro tuto spojitou funkci bez svislé asymptoty a s nulovými limitami pro $x \to \pm\infty$ bude jedinou asymptotou se směrnicí osa x - přímka $y = 0$, jak nám potvrdí i výpočet koeficientů

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{x} = 0, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0.$$

Nakreslením grafu funkce si ověříme uvedené výsledky (obr. 16).



obr. 16 - průběh funkce $f(x) = \arcsin(2x/(1+x^2))$

Příklad 8.32. Funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$ má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a je na něm spojitá. Nulových hodnot nabývá v bodech $x = 0,\ x = 1$, kladných hodnot na intervalech $(-\infty, 0), (0, 1)$, záporných hodnot na intervalu $(1, +\infty)$. Nepatří mezi funkce sudé, liché nebo periodické.
Výpočtem první derivace dostaneme

$$f'(x) = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}; \quad f'(\frac{8}{27}) = 0, \quad \lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty.$$

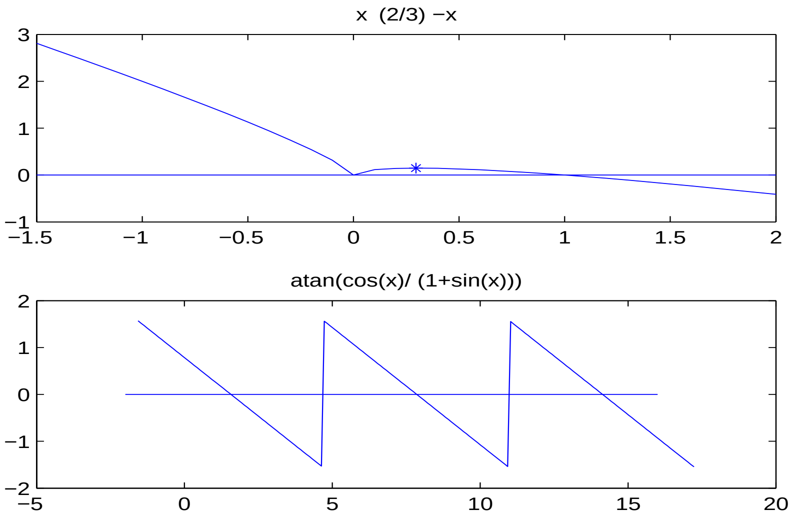
Tato funkce má tedy v počátku svislou tečnu. První derivace je záporná v intervalu $(-\infty, 0)$, kladná v intervalu $(0, 8/27)$, záporná v intervalu $(8/27, +\infty)$.
V těchto intervalech je tedy funkce postupně klesající, rostoucí, klesající funkcí.
V bodě $x = 0$ nabývá svého lokálního minima, v bodě $x = 8/27$ lokálního minima ($f(0) = 0, f(8/27) = 0.1481...$).
Výpočtem druhé derivace dostaneme výsledek $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot 1/\sqrt[3]{x^4} < 0\ \forall x \neq 0$.

Funkce je tedy konkávní v intervalech $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, oba tyto konkávní segmenty navazují spojitě ve špičce v počátku.
Výsledky výpočtu koeficientů asymptoty se směrnicí

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1) = -1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

ukazují, že tato funkce nemá asymptotu se směrnicí.
Uvedené vlastnosti si můžeme ověřit na jejím grafu (obr. 17a).

Příklad 8.33. Funkce $f(x) = \arctan\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right)$ z příkladu 8.5 je po částech lineární. V bodech $x = \frac{3}{2}\pi \pm 2k\pi$ má limity zleva rovny $-\pi/2$, limity zprava rovny $+\pi/2$. Nemá vertikální ani jiné asymptoty - je to po částech lineární funkce se stejnými směrnicemi $-1/2$ a nulovými body $\pi/2 \pm 2k\pi$. Když si nevšimneme nespojitosti této funkce a necháme počítač vykreslit její graf přímo z definice funkce, pak dostaneme (s případným varováním o dělení nulou) graf z obr. 17b), který nám spojuje jednotlivé lineární části vlastního grafu dalšími úsečkami a dává falešnou představu o grafu této funkce, kam tyto spojnice nepatří ! (Viz ale např. zprávu *discont* = *true* v Maple .)



obr. 17 a), b) - grafy funkcí $x^{2/3} - x$, $\arctan(\cos(x)/(1 + \sin(x))))$

Shrnutí

V této kapitole jsme do přesnějších detailů zformulovali vztahy mezi monotonností funkce, jejími extrémy a vlastnostmi její derivace (pozn. 6.2, 8.1, V 8.7, 8.8), rozšířili definici extrémů (lokální a absolutní extrémy). Dále jsme zavedli pojem konvexní, konkávní funkce (D 8.16), inflexní bod (D 8.19) a zformulovali podmínky inflexe (V 8.20). Pro graf funkce jsme definovali pojem asymptoty (D 8.22) a uvedli formule pro výpočet jejích koeficientů (V 8.23). V závěru kapitoly byl popsán doporučený postup při vyšetřování celkového průběhu funkce a demonstrován na příkladech.

Pojmy k zapamatování

- Monotonnost funkce; extrémy, jejich druhy a metody rozpoznání.

- Funkce konvexní a konkávní na intervalu, inflexní bod, asymptoty.
- Postup při vyšetřování průběhu funkce.

Kontrolní otázky

1. *Může mít neklesající funkce $f(x), x \in I$ zápornou hodnotu první derivace v některém bodě ?*
2. *Může mít funkce více globálních maxim nebo minim ?*
3. *Má funkce $f(x)$ s hodnotami $f'(c) = f''(c) = 0$ v bodě $x = a$ extrém ?*
4. *Může být funkce, která nemá v izolovaných bodech derivaci, konvexní nebo konkávní ?*
5. *Je přímka konvexní nebo konkávní funkcí ?*
6. *Může mít polygon inflexní body ?*

Cvičení : Vyšetřete průběh funkcí a nakreslete jejich grafy:

1. $f(x) = x \cdot arccotg(x)$
2. $f(x) = x \cdot arccotg(1/x)$
3. $f(x) = |x| - |x^2 - 1|$
4. $f(x) = x \cdot \exp(-1/x)$
5. $f(x) = x \cdot \arctan(1/x)$
6. $f(x) = \arctan\left(\frac{|\ln(x)|}{\ln(x)-1}\right)$
7. $f(x) = arccotg\left(|\frac{x}{x^2-1}|\right)$

Řešení

1. $D(f) = \mathbb{R}$, spojitá, rostoucí, konkávní funkce, asymptoty $y = \pi x + 1,\ y = 1$.
2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus 0$, není sudá ani lichá, pro $x < 0$ $(x > 0)$ je $f < 0$ $(f > 0)$, rostoucí, konvexní v celém definičním oboru; společná asymptota $y = (\pi/2)x + 1$.
3. $D(f) = \mathbb{R}$; sudá spojitá funkce s různými předpisy v intervalech $\langle 0, 1\rangle, \langle 1, +\infty)$ (tam je konvexní, konkávní), s lokálním minimem v počátku ($f(0) = -1$), maximy v bodech $x = -1, x = 1$ (špičky), bez asymptot. (Ověřte si na grafu funkce.)
4. $D(f) = \mathbb{R} \setminus 0$, bod nespojitosti a vertikální asymptota v $x = 0$, záporné hodnoty pro $x < 0$, kladné pro $x > 0$, lokální maximum $f(-1) = -e$, rostoucí funkce pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, klesající pro $x \in (-1, 0)$, konvexní v intervalech $(-\infty, -2), (0, +\infty)$, konkávní v intervalu $(-2, 0)$.
5. $D(f) = \mathbb{R} \setminus 0,\ x = 0$ je odstranitelný bod nespojitosti. Funkce je konkávní na obou částech $D(f)$, klesající pro $x \in (-\infty, 0)$, rostoucí pro $x \in (0, +\infty)$, společná asymptota $y = 1 = sup f(x),\ inf f(x) = 0$.
6. $D(f) = (0, e) \cup (e, +\infty)$, spojitá v $D(f)$, omezená, v intervalu $(0, 1\rangle$ rostoucí, v intervalech $\langle 1, e), (e, +\infty)$ klesající, v bodě $x = e$ skok, nemá maximum ani minimum, horizontální asymptota $y = \pi/4,\ sup = \pi/2, inf = -\pi/2$.
7. $D(f) = \mathbb{R} \setminus 0$, sudá a spojitá funkce v $D(f)$, klesající v intervalech $(-\infty, -1), (0, 1)$, rostoucí v intervalech $(-1, 0), (1, +\infty)$, odstranitelnými body nespojitosti $x = \pm 1$, hroty v bodech $x = -1, 0, 1$, horizontální asymptotou $y = \pi/2$. (Ověřte výpočtem, na grafu.)

Reference

[1] I. Černý - M. Rokyta, *Differential and Integral Calculus of one Real Variable.* Praha, Karolinum 1998, ISBN 80-7184-661-9

[2] I. Černý, *Úvod do inteligentního kalkulu I.* Academia 2002, ISBN 80/200-1017-3

[3] Z. Došlá - J. Kuben, *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* MU Brno, 2004 (elektr. text), ISBN 80-210-3121-2

[4] P. Drábek - S. Míka, *Matematická analýza I.* ZČU Plzeň, 2003, ISBN 80-7082-978-8 .

[5] B.P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment 2003. ISBN 80-7200-587-1

[6] P. Fuchs - V. Krupková, *Matematika 1.* ÚM FEKT Brno (elektr. text).

[7] V. Jarník, *Diferenciální počet.* Academia 1974, Praha

[8] V. Mošová, *Diferenciální počet.* KI PřF UP Olomouc, 2004 (elektr. text)

[9] D. Skalská, *Algebra.* KI PřF UP Olomouc, 2006 (elektr. text)

[10] D. Skalská, *Lineární algebra.* KI PřF UP Olomouc, 2006) (elektr. text)

[11] V. Mádrová - J. Marek, *Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I.* PřF UP Olomouc, 2004. ISBN 80-244-0958-5

[12] K. Rektorys, *Přehled užité matematiky.* Prometheus 2000, Praha. ISBN 80-7196-179-5

[13] Literatura k používání programových produktů Maple, Matlab, Mathematica

9 Seznam obrázků

10 Seznam tabulek