KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO

LINEÁRNÍ ALGEBRA

DAGMAR SKALSKÁ

VÝVOJ TOHOTO UČEBNÍHO TEXTU JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Olomouc 2006

Abstrakt

Tento text distančního vzdělávání navazuje na text Algebra a seznamuje se základními pojmy lineární algebry. Studující se seznámí s pojmy matice a determinant, s metodami výpočtu determinantů a inverzních matic. Poslední kapitoly se týkají soustav lineárních rovnic a jejich řešení

Cílová skupina

Text je primárně určen pro posluchače prvního ročníku bakalářského studijního programu Aplikovaná informatika na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Může však sloužit komukoliv se zájmem o lineární algebru. Text předpokládá znalosti středoškolské matematiky a prostudování textu Algebra

Obsah

Použitá označení

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{S}$	množina všech celých sudých čísel
$\mathbb{Q}$	množina všech racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\vee$	disjunkce (logický součet), čteme „nebo“
$\wedge$	konjunkce (logický součin), čteme „a současně“
$\Rightarrow$	implikace, čteme „jestliže, pak“
$\Leftrightarrow$	ekvivalence, čteme „právě když“
$\exists$	existenční kvantifikátor, čteme „existuje“
$\forall$	všeobecný kvantifikátor, čteme „pro všechna“

1 Pořadí a permutace

Studijní cíle: Po prostudování této kapitoly se studující seznámí s pojmy pořadí a permutace, kterých se v dalších kapitolách bude používat

Klíčová slova: pořadí, parita pořadí, transpozice, permutace, parita permutace

Průvodce studiem

Pořadí a permutace mají široké uplatnění v teorii pravděpodobnosti a ve statistice. Protože permutace nám budou sloužit pouze jako pomocný nástroj ke studiu dalších algebraických pojmů, omezíme se pouze na výklad nejzákladnějších vlastností permutací konečné množiny M. Pro zjednodušení předpokládáme, že množina M se skládá z prvních n přirozených čísel, $M = \{1, 2, ..., n\}$.

1.1 Pořadí

Definice 1.1. Nechť $M = \{1,\ 2,\ ...\ ,\ n\}$. Pak libovolná uspořádaná n–tice utvořená z prvků množiny M se nazývá pořadí z n prvků 1, 2, ... , n nebo stručně *pořadí*. Nechť $R = (r_1, r_2, ..., r_n)$ je libovolné pořadí. Řekneme, že dvojice r_i, r_j je *inverze* v pořadí R, jestliže $i < j, r_i > r_j$. Pořadí, v němž celkový počet inverzí je číslo sudé, se nazývá *sudé pořadí*. Pořadí, ve kterém je celkový počet inverzí číslo liché, se nazývá *liché pořadí*. Hovoříme potom o *paritě pořadí*.

inverze
větší číslo před menším

Průvodce studiem

Počet inverzí v daném konkrétním pořadí nejrychleji zjistíme tak, že bereme odleva jedno číslo po druhém a pro každé z nich spočítáme, kolik menších čísel stojí za ním. Sečtením těchto hodnot pak dostaneme celkový počet inverzí v daném pořadí.

Příklad 1.2. Nechť $n = 9$, potom
pořadí (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) je sudé, počet inverzí je 0, *sudé pořadí*

pořadí (6, 3, 1, 9, 4, 5, 2, 8, 7) je liché, počet inverzí je 15. *liché pořadí*

Definice 1.3. Nechť $R = (r_1, r_2, ..., r_n), S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ jsou dvě pořadí a nechť existují indexy $i \neq j$ tak, že $s_i = r_j, s_j = r_i$ a dále $s_k = r_k$ pro $k \neq i, j$. Potom řekneme, že pořadí S vzniklo z pořadí R provedením jedné *transpozice*.

Průvodce studiem

Provedení jedné transpozice tedy znamená záměnu dvou různých prvků v jednom pořadí, přičemž všechny ostatní prvky zůstávají na původním místě.

Příklad 1.4. Pořadí $S = (2, 3, 5, 4, 1)$ vznikla z pořadí $R = (2, 5, 3, 4, 1)$ provedením jedné transpozice.

Věta 1.5. *Nechť n je pevné přirozené číslo, pak platí:*

1. *z n prvků lze vytvořit celkem $n!$ různých pořadí*
2. *všech $n!$ pořadí z n prvků lze seřadit tak, že každé následující pořadí obdržíme z předcházejícího provedením jedné transpozice, lze vyjít od libovolného pořadí.*

Důkaz. Dokazovat budeme matematickou indukcí obě části najednou:
Pro $n = 1$ obě tvrzení triviálně platí. Předpokládáme, že obě tvrzení platí pro 1, 2, ... ,$n - 1$ a budeme dokazovat, že platí rovněž pro n. Nechť $(r_1, r_2, ..., r_n)$ je libovolné pořadí z n prvků. Podle indukčního předpokladu všech pořadí, která mají na posledním místě prvek r_n je $(n - 1)!$ a lze je seřadit tak, že následující vznikne z předchozího provedením jedné transpozice. V posledním z těchto pořadí provedeme transpozici prvků r_n a r_i $(1 \leq i \leq n - 1)$ a stejnou úvahou jako výše dostaneme $(n-1)!$ pořadí s prvkem r_i na posledním místě. Takto vystřídáme na posledním místě všech n prvků, takže dostaneme všechna různá pořadí z n prvků, kterých je tedy $n(n - 1)! = n!$, přitom každé následující pořadí vzniklo z předchozího provedením jedné transpozice. □

Příklad 1.6. Nechť $n = 3$, pak máme $3! = 6$ pořadí $R_1 = (1, 2, 3), R_2 = (1, 3, 2), R_3 = (3, 1, 2), R_4 = (3, 2, 1), R_5 = (2, 3, 1), R_6 = (2, 1, 3)$ seřazených tak, že každé následující vzniklo z předchozího provedením jedné transpozice.

Věta 1.7. *Provedení jedné transpozice změní paritu pořadí.*

Důkaz. Provedeme ve dvou krocích, nejprve pro transpozici sousedních prvků a potom pro transpozici libovolných dvou prvků daného pořadí.

1. Nechť v pořadí $R = (r_1, r_2, ..., r_i, r_{i+1}, ..., r_n)$ je t inverzí. Provedením transpozice sousedních prvků r_i, r_{i+1} dostaneme pořadí $R' = (r_1, r_2, ..., r_{i+1}, r_i, ..., r_n)$, v němž je buď $t - 1$ nebo $t + 1$ inverzí, tedy R' má opačnou paritu než R.
2. Nechť $R = (r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_j, ..., r_n)$ je dané pořadí. Provedením transpozice prvků r_i a r_j dostaneme pořadí $R' = (r_1, r_2, ..., r_j, ..., r_i, ..., r_n)$. Tuto transpozici lze realizovat postupným prováděním $(j-i)+(j-i-1) = 2(j-i)-1$ transpozic sousedních prvků. Číslo $2(j - i) - 1$ je liché. To znamená, že pořadí R' má opačnou paritu než pořadí R.

□

Věta 1.8. *Nechť $n \geq 2$. Potom z celkového počtu n! různých pořadí z n prvků je $\frac{n!}{2}$ sudých a $\frac{n!}{2}$ lichých.*

Důkaz. Tvrzení plyne z předcházejících vět. □

Příklad 1.9. Pro $n = 3$ jsou pořadí R_1, R_3, R_5 sudá a pořadí R_2, R_4, R_6 jsou lichá.

1.2 Permutace

Definice 1.10. Nechť $M = \{1, 2, ..., n\}$ je konečná množina o n prvcích. Pak bijektivní zobrazení P množiny M na sebe se nazývá permutace množiny M nebo krátce *permutace*.

Permutaci P definovanou $P(i_t) = j_t$ pro $t = 1, 2, ..., n$ budeme zapisovat ve formě dvouřádkové tabulky tvaru

$$P = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Průvodce studiem

Permutace množiny M je tedy bijekce $M \to M$, kterou zapisujeme ve tvaru dvouřádkové tabulky. To znamená, že v horním i dolním řádku této tabulky je vždy nějaké pořadí z n prvků. Zřejmě lze tutéž permutaci P zapsat v uvedeném tvaru celkem $n!$ formálně různými způsoby, zaměníme-li pořadí sloupců v tabulce. Všech těchto $n!$ zápisů permutace P je zcela rovnocených, ale my budeme nejčastěji používat zápisu permutace P v základním tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.11. Tři formálně různé zápisy téže permutace množiny M pro $n = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Těchto různých zápisů stejné permutace může být 720.

Věta 1.12. *Počet různých permutací n–prvkové množiny je roven $n!$*

permutace v základním tvaru

Důkaz. Když zapíšeme každou permutaci v základním tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

pak různých permutací bude přesně tolik, kolik je různých pořadí v dolním řádku. Těch je však právě $n!$. □

Příklad 1.13. Různé permutace tříprvkové množiny

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

parita permutace

Definice 1.14. Permutace P se nazývá *sudá permutace*, jestliže součet počtu inverzí v horním a dolním řádku je sudé číslo. Pokud je součet počtu inverzí v horním a dolním řádku liché číslo, nazývá se *lichá permutace*. Hovoříme potom o *paritě permutace*.

Příklad 1.15. Permutace P_1, P_3, P_5 jsou sudé, permutace P_2, P_4, P_6 jsou liché.

Průvodce studiem

I když danou permutaci P můžeme zapsat $n!$ formálně různými tabulkami, je předchozí definice korektní, protože při libovolném zápisu permutace P je parita horního a dolního řádku buď vždy stejná nebo vždy rozdílná. Při přechodu od jednoho zápisu permutace P k druhému provádíme vždy jistý počet transpozic současně v horním i dolním řádku.

Věta 1.16. *Nechť $n \geq 2$, potom z celkového počtu n! různých permutací n–prvkové množiny je $\frac{n!}{2}$ sudých permutací a $\frac{n!}{2}$ lichých permutací.*

Důkaz. Každou permutaci zapíšeme v základním tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ k_1 & k_2 & ... & k_n \end{pmatrix}$$

Parita permutace je pak shodná s paritou pořadí v dolním řádku a tvrzení plyne z věty 1.8 □

Shrnutí

Pořadí je libovolná uspořádaná n-tice utvořená z n prvkové množiny $M = \{1, 2, ..., n\}$.
Dvojice prvků v pořadí tvoří inverzi, pokud větší z obou čísel předchází v daném pořadí menší.
Transpozice je záměna dvou různých prvků v daném pořadí.
Permutace množiny M je bijekce množiny M na množinu M.
Permutaci zapisujeme ve tvaru dvouřádkové tabulky.
Paritu permutace určíme z parit pořadí v horním a dolním řádku.

Pojmy k zapamatování

- pořadí
- parita pořadí
- inverze
- transpozice
- permutace
- parita permutace

Kontrolní otázky

1. *Dané pořadí je sudé. Jaká bude parita pořadí, které dostaneme z daného pořadí provedením tří transpozic?*
2. *Je dána permutace P. V této permutaci provedeme stejnou transpozici v horním i dolním řádku. Změní se parita?*
3. *Je dána permutace P. V této permutaci necháme horní řádek beze změny a provedeme jednu transpozici v dolním řádku. Změní se parita permutace?*

Cvičení

1. Určete počet inverzí v daném pořadí z 9-ti prvků (4,3,5,6,8,9,7,1,2).
2. Určete x a y tak, aby pořadí (9,x,6,5,y,4,7,2,1) bylo liché.
3. Určete paritu dané permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Určete x a y tak, aby permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & x & 4 & 6 & y & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

   byla sudá.

Úkoly k textu

1. Utvořte všechna pořadí ze 4 prvků tak, že každé pořadí obdržíte z předchozího pořadí provedením jedné transpozice. Pořadí (1,3,4,2) bude zapsáno jako první.

2. Vypište všechny formálně různé zápisy permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Vypište všechny formálně stejné zápisy permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

1. 15
2. $x = 8, y = 3$
3. lichá
4. $x = 3, y = 5$

2 Matice

Studijní cíle: Při studiu této kapitoly se studující seznámí s pojmem matice. S maticemi budeme pracovat i v dalších kapitolách.

Klíčová slova: matice typu m/n, prvky matice, nulová matice, čtvercová matice, matice transponovaná k dané matici

Průvodce studiem

Jedním ze základních pojmů lineární algebry je pojem matice. Matice používáme při řešení soustav lineárních rovnic, při studiu vektorových prostorů a v celé řadě dalších odvětví nejen matematiky. Matice mají i bohaté uplatnění v informatice. Setkáme se s nimi v algoritmické matematice. Jedna z reprezentací grafů je maticová reprezentace.

Definice 2.1. Nechť T je číselné těleso, m, n přirozená čísla. Pak obdélníkové schema tvaru

m řádků, n sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in T$ pro $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, se nazývá *matice typu* m/n nad tělesem T. Označení: $A = (a_{ij})$ typu m/n . Čísla $a_{ij} \in T$ se nazývají *prvky matice* A.

Matice $A = (a_{ij})$ typu m/n a matice $B = (b_{ij})$ typu p/q jsou si rovny, jestliže jsou stejného typu ($p = m \wedge q = n$) a je-li $a_{ij} = b_{ij}$ pro $\forall i, j$.

Průvodce studiem

Každý jednotlivý řádek matice A typu m/n nad tělesem T můžeme uvažovat jako uspořádanou n–tici prvků (čísel) z tělesa T, tedy jako vektor vektorového prostoru T^n. Má tedy smysl mluvit o sčítání řádků matice, násobení řádku matice číslem z T, lineární kombinaci a lineární závislosti a nezávislosti řádků matice atd. a to ve smyslu operací a pojmů jak byly definovány ve vektorovém prostoru T^n.

Podobně můžeme sloupce matice A typu m/n chápat jako vektory vektorového prostoru T^m a pracovat s nimi jako s vektory, sčítat je, násobit číslem, vytvářet jejich lineární kombinace, studovat jejich lineární závislost a nezávislost.

Příklad 2.2.

1. Matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
je matice typu $3/3$.

2. Matice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$
je matice typu $5/2$.

Definice 2.3. Nechť A je matice typu m/n nad číselným tělesem T. Potom

1. je-li $a_{ij} = 0$ pro $\forall i, j$, matice se nazývá *nulová matice* typu m/n a označuje se O,
2. je-li $m = n$, matice A se nazývá *čtvercová matice řádu* n,
3. matice $A^{'}$ typu n/m, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce

stejný počet řádků a sloupců
n řádků a m sloupců

$$A^{'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *transponovaná matice* k matici A.

Příklad 2.4. 1. Matice A z příkladu 2.2 je čtvercová matice řádu 3.

2. Matice transponovaná k matici A je matice

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Matice transponovaná k matici B je matice

$$B^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Shrnutí

Matice typu m/n je obdélníkové schema s m řádky a n sloupci.
Nulová matice je matice, jejíž prvky jsou samé nuly.
Čtvercová matice je matice, která má stejný počet řádků a sloupců.
Transponovanou matici k dané matici dostaneme záměnou řádků a sloupců.

Pojmy k zapamatování

- matice typu m/n
- nulová matice
- čtvercová matice
- matice transponovaná k dané matici

Kontrolní otázky

1. *Kolik má řádků a kolik sloupců matice P typu p/q?*
2. *Kolik má řádků a kolik sloupců matice transponovaná k matici P typu p/q?*

Cvičení

1. (a) Určete typ matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Určete matici $A^{'}$ a její typ.

2. Zapište matici B typu $5/6$, pro jejíž prvky platí $b_{ij} = i^2 - j$

3. Zapište čtvercovou matici C řádu 4, pro jejíž prvky platí vztah $c_{ij} = i^2 - j^2$. Určete matici transponovanou k matici C.
4. Určete a, b, c, d, tak aby platilo

$$\begin{pmatrix} a-b-1 & a+b+1 \\ c+a & d-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2\,c+2 & 2\,b-d \\ c-2 & d+1 \end{pmatrix}.$$

Úkoly k textu

1. Udejte příklad matice nad $\mathbb{R}$ typu $8/3$.
2. Udejte příklad čtvercové matice nad $\mathbb{R}$ řádu 4.

Řešení

1. a) $3/4$ b) $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $4/3$
2. $$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 \end{pmatrix}$$
3. $$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 & -15 \\ 3 & 0 & -5 & -12 \\ 8 & 5 & 0 & -7 \\ 15 & 12 & 7 & 0 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 15 \\ -3 & 0 & 5 & 12 \\ -8 & -5 & 0 & 7 \\ -15 & -12 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$
4. $b = -1, d = 0, c = -1, a = -2$

3 Determinanty

Studijní cíle: Ve studované kapitole je zaveden pojem determinant a studující se seznámí se způsobem výpočtu determinantů nižších řádů a jedním ze způsobů výpočtu determinantů vyšších řádů.

Klíčová slova: determinant, člen determinantu

Nyní se budeme zabývat pouze čtvercovými maticemi nad pevným číselným tělesem T. Pro tyto matice zavedeme následující pojem:

Definice 3.1. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad číselným tělesem T. Pak *determinant* matice A je číslo z tělesa T, které značíme det A, definované vztahem

determinant

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, ..., j_n)} (-1)^{I(j_1, j_2, ..., j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n},$$

kde $I(j_1, j_2, ..., j_n)$ znamená celkový počet inverzí v permutacích

permutace řádkových a sloupcových indexů

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}$$

použitých řádkových a sloupcových indexů. Sčítání se provádí přes všechna různá pořadí $(j_1, j_2, ..., j_n)$ sloupcových indexů.
Součin $(-1)^{I(j_1, j_2, ..., j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$ se nazývá *člen determinantu* .

člen determinantu

Průvodce studiem

Z definice determinantu vyplývá, že determinant je číslo, které dostaneme sečtením $n!$ členů determinantu. Každý člen determinantu je součin n prvků matice A, přitom z každého řádku a každého sloupce je vybrán právě jeden prvek. Každý člen má znaménko + nebo - podle toho, jestli permutace vytvořená z řádkových a sloupcových indexů je sudá nebo lichá.

Musíme si uvědomit zásadní rozdíl mezi maticí a determinantem. Matice je obdélníkové nebo čtvercové schema, determinant je číslo.

Poznámka 3.2. Determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

budeme rovněž značit symbolem

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Rozepíšeme si předchozí definici pro nejjednodušší případy $n = 1, 2, 3$.

$n = 1$ $\quad |a_{11}| = a_{11}$

determinant matice 1.řádu

$n = 2$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

determinant matice 2.řádu

$$n = 3 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

determinant matice 3.řádu

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Příklad 3.3. 1. $\det C = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5.$

2. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 1 - 2 - 0 - 6 = -1.$

Průvodce studiem

Výpočet determinantů vyšších řádů jen na základě definice determinantu by byl příliš zdlouhavý a pracný. V následujícím textu si ukážeme metody, jak determinanty vyšších řádů počítat. Nejdříve si uvedeme několik vět, které popisují vlastnosti determinantů a mohou nám usnadnit jejich výpočet.

Věta 3.4. *Transponováním matice A se hodnota determinantu nezmění,* $\det A' = \det A$.

Důkaz. Nechť $(j_1, j_2, ..., j_n)$ je libovolné pořadí z n prvků. Pak součin $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ se vyskytuje právě jednou v determinantu $\det A$ i v determinantu $\det A'$. Tento součin je v determinantu $\det A$ vynásoben číslem $(-1)^r$, kde r je počet inverzí v permutaci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$. V determinantu $\det A'$ je součin vynásoben číslem $(-1)^s$, kde s je počet inverzí v permutaci $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$. Zřejmě $r = s$ a platí tedy tvrzení věty. □

Věta 3.5. *Nechť prvky k–tého řádku matice A mají tvar*

$$a_{k1} = b_{k1} + c_{k1}, a_{k2} = b_{k2} + c_{k2}, ..., a_{k_n} = b_{kn} + c_{kn}$$

a nechť matice B a C se liší od matice A pouze v prvcích k–tého řádku, přičemž $b_{k1}, b_{k2}, ..., b_{kn}$ *je k–tý řádek matice B a* $c_{k1}, c_{k2}, ..., c_{kn}$ *je k–tý řádek matice C, potom* $\det A = \det B + \det C$. *Schematicky zapsáno platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ b_{k1}+c_{k1} & ... & b_{kn}+c_{kn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ b_{k1} & ... & b_{kn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ c_{k1} & ... & c_{kn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definice determinantu, protože pro každý člen determinantu $\det A$ platí:

$$(-1)^{I(j_1,j_2,...,j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot ... \cdot (b_{kj_k} + c_{kj_k}) \cdot ... \cdot a_{nj_n} =$$

$$= (-1)^{I(j_1,j_2,...,j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot ... \cdot b_{kj_k} \cdot ... \cdot a_{nj_n} + (-1)^{I(j_1,j_2,...,j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot ... \cdot c_{kj_k} \cdot ... \cdot a_{nj_n}.$$

□

Věta 3.6. *Nechť matice B vznikne z matice A*

1. *záměnou dvou různých řádků, potom je* $\det B = -\det A$
2. *vynásobením jednoho řádku pevným číslem* $t \in T$*, potom* $\det B = t \cdot \det A$

Důkaz. 1. Pokud v matici A zaměníme k-tý řádek s r-tým řádkem, kde $k \neq r$, pak součiny, které se vyskytují v det A a det B zůstanou stejné. Tyto součiny však mají různá znaménka, protože permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & r & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_k & \dots & j_r & \dots & j_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & r & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_r & \dots & j_k & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

mají různou paritu. Proto platí det B = -det A.

2. Plyne přímo z definice determinantu, protože vynásobením k-tého řádku číslem $t \in T$ v matici A dostaneme

$$\det B = \sum (-1)^{I(j_1, j_2, \dots, j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot t \cdot a_{kj_k} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= t \cdot \sum (-1)^{I(j_1, j_2, \dots, j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{kj_k} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} = t \cdot \det A$$

□

Věta 3.7. *Nechť v matici A*

1. *jeden řádek se skládá ze samých nul, potom je* $\det A = 0$,
2. *dva různé řádky jsou shodné, potom je* $\det A = 0$,
3. *jeden řádek je t–násobkem jiného řádku (*$t \in T$ *libovolné), potom je* $\det A = 0$,
4. *jeden řádek je lineární kombinací ostatních řádků, potom je* $\det A = 0$.

Důkaz. 1. Plyne přímo z definice determinantu, protože každý člen determinantu obsahuje nulu.

2. Zaměníme-li ty dva řádky matice A, které jsou shodné, matice A se nezmění. Musí tedy být
$$\det A = -\det A \Rightarrow 2 \cdot \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

3. Plyne z druhé části věty 3.6 a druhé části věty 3.7

4. Když je např. k-tý řádek lineární kombinací ostatních řádků, můžeme det A vyjádřit jako součet $(n-1)$ determinantů, ve kterých je k-tý řádek násobkem nějakého jiného řádku. Podle třetí části věty 3.7 je každý z těchto determinantů roven nule a det A = 0.

□

Příklad 3.8. Determinant matice

$r_3 = r_1 - 2.r_2$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

je nulový, protože třetí řádek je lineární kombinací prvních dvou.

Věta 3.9. *Hodnota determinantu matice A se nezmění, jestliže*

1. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku,*
2. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků,*
3. *jeden řádek matice A necháme beze změny a k ostatním řádkům přičteme jeho libovolné násobky.*

Důkaz. Plyne z předcházejících vět. □

Poznámka 3.10. Z věty 3.4 plyne, že k větám 3.5, 3.6, 3.7 a 3.9 platí analogické věty, které dostaneme, když slovo „řádek" nahradíme slovem „sloupec". Toto lze uplatnit na všechna tvrzení o determinantech matice, která se týkají řádků matice. Dostaneme tak stejná tvrzení, která se týkají sloupců. Stejně z tvrzení o determinantech matice, která se týkají sloupců, dostaneme platná tvrzení, která se týkají řádků.

Průvodce studiem

Větu 3.9 používáme při konkétním výpočtu determinantu. Přičítáním vhodných násobků jedněch řádků k jiným řádkům se snažíme upravit matici na takový tvar, ze kterého determinant snadno vypočítáme. Převedeme-li matici na trojúhelníkový tvar

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ 0 & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ 0 & 0 & a_{3\,3} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n\,n} \end{pmatrix},$$

je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Příklad 3.11. Máme vypočítat determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$

$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 24.$

Postup výpočtu:

1. ze 3. řádku jsme vytkli číslo 3
2. zaměnili jsme 1. a 3. řádek, tím se změnilo znaménko determinantu
3. od 2. řádku jsme odečetli třínásobek 1. řádku
   od 3. řádku jsme odečetli dvojnásobek 1. řádku
   od 4. řádku jsme odečetli čtyřnásobek 1. řádku
4. zaměnili jsme 2. a 3.řádek, změnilo se znaménko determinantu
5. od 3. řádku jsme odečetli čtyřnásobek 2. řádku
   od 4. řádku jsme odečetli šestinásobek 2. řádku
6. od 4. řádku jsme odečetli třínásobek 3. řádku
7. vypočítali jsme determinant jako součin prvků v hlavní diagonále

Podobně můžeme vypočítat determinant převedením na trojúhelníkový tvar použitím sloupcových úprav

Shrnutí

Člen determinantu je součin n prvků matice, když z každého řádku a každého sloupce je vybrán právě jeden prvek; znaménko členu určíme podle parity permutace sestavené z řádkových a sloupcových indexů.
Determinant je součet $n!$ členů determinantu.
Jeden ze způsobů výpočtu determinantu je převedení matice pomocí řádkových nebo sloupcových úprav na trojúhelníkový tvar a vypočtení součinu prvků v hlavní diagonále.

Pojmy k zapamatování

- determinant
- člen determinantu

Kontrolní otázky

1. *Matici B dostaneme z matice A záměnou 1. a 3. řádku a 2. a 4. řádku. Jaký je vztah mezi* det B *a* det A*?*
2. *Pro řádky matice C platí, že 4. řádek je rozdíl druhého a pátého řádku. Čemu je roven determinant matice C?*
3. *Jak zní věty 3.5, 3.6, 3.7 a 3.9 pro sloupce?*
4. *Může mít determinant čtvercové matice A (nad $\mathbb{R}$) právě 16 členů?*

Cvičení

1. Rozhodněte, zda se součin $a_{31} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{52} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$ vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu 6 a s jakým znaménkem.
2. Uveďte všechny členy determinantu dané matice $A = (a_{ij})$ řádu 4, které obsahují prvky $a_{12} \cdot a_{34}$.
3. Vypočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Určete x, pro které platí $\det Q = 2$, kde Q je matice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ -2 & x & 1 \\ -1 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

5. Vypočtěte determinant

$$J(r, \phi, \psi) = \begin{vmatrix} \cos(\phi)\sin(\psi) & -r\sin(\phi)\sin(\psi) & r\cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) & r\cos(\phi)\sin(\psi) & r\sin(\phi)\cos(\psi) \\ \cos(\psi) & 0 & -r\sin(\psi) \end{vmatrix}$$

6. Vypočítejte determinant matice

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Úkoly k textu

1. Uveďte příklad čtvercové matice A nad $\mathbb{R}$ takové, že $\det A$ má právě 24 členů.
2. Uveďte příklad čtvercové matice řádu 4 nad $\mathbb{R}$, jejíž všechny prvky jsou nenulové, ale $\det A = 0$.
3. Nechť A je matice řádu 5 nad $\mathbb{R}$ a nechť $\det A = \sqrt{3}$. Nechť matice B vznikne z matice A tak, že každý její prvek vynásobíme číslem $-\sqrt{5}$. Uveďte, čemu se rovná $\det B$.

Řešení

1. ano, -
2. dvě řešení: $+a_{12} \cdot a_{34} \cdot a_{21} \cdot a_{43}, -a_{12} \cdot a_{34} \cdot a_{23} \cdot a_{41}$
3. $\det A = 29$
4. dvě řešení $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -1$
5. $-\sin(\psi)\, r^2$
6. a) $\det A = 12$ b) $\det B = -336$

4 Výpočet determinantu použitím Laplaceovy věty

Studijní cíle: V této kapitole se studující seznámí s dalším způsobem výpočtu hodnoty determinantu a pořebnými pojmy submatice, minor a algebraický doplněk.

Klíčová slova: submatice, minor, doplňková submatice, doplněk minoru, algebraický doplněk minoru a algebraický doplněk prvku

Definice 4.1. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, nechť je zvoleno k jejích řádků a sloupců ($k < n$) a to $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$. Pak matice

k řádků, k sloupců

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

se nazývá *submatice matice* A určená řádky $i_1, i_2, ..., i_k$ a sloupci $j_1, j_2, ..., j_k$. Její determinant $\det M$ se nazývá *minor* nebo *subdeterminant řádu* k *matice* A. Zbývajícími $n - k$ řádky a $n - k$ sloupci je určena submatice $\overline{M}$ matice A, která se nazývá *doplňková submatice k matici* M a její minor $\det \overline{M}$ se nazývá *doplněk minoru* $\det M$. Označme $s_M = i_1 + i_2 + ... + i_k + j_1 + j_2 + ... + j_k$. Pak číslo $(-1)^{s_M} \cdot \det \overline{M}$ se nazývá *algebraický doplněk minoru* $\det M$.

Příklad 4.2. Je dána čtvercová matice A řádu 5 nad tělesem $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 5, j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 5$, pak submatice určená prvním, třetím a pátým řádkem a druhým, třetím a pátým sloupcem má tvar

$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, minor je $\det M = 2$.

Doplňková submatice k submatici M je
$\overline{M} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, doplněk je $\det \overline{M} = -6$.

$s_M = 1 + 3 + 5 + 2 + 3 + 5 = 19$, algebraický doplněk minoru $\det M$ je

$$\det \overline{M} = (-1) \cdot (-6) = 6.$$

Věta 4.3. *Nechť A je čtvercová matice řádu n, nechť* $\det M$ *je minor řádu k matice A ($k < n$). Pak součin libovolného členu minoru* $\det M$ *s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem determinantu* $\det A$.

Důkaz. Najdete v literatuře, např.[Hor91] □

Věta 4.4 (Laplaceova). *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, nechť je pevně zvoleno k řádků matice A, kde $0 < k < n$. Pak determinant* $\det A$ *je roven součtu všech $\binom{n}{k}$ součinů minorů řádu k vybraných ze zvolených k řádků s jejich algebraickými doplňky.*

Důkaz. Ze zvolených řádků lze vybrat minor $\binom{n}{k}$ různými způsoby. Podle předchozí věty je součin členu takového minoru s členem jeho algebraického doplňku členem determinantu

$\det A$. Takto získáme zřejmě navzájem různé členy. Stačí nyní dokázat, že tímto způsobem dostaneme všechny členy determinantu $\det A$, kterých je $n!$. Každý minor řádu k má $k!$ členů, každý jeho algebraický doplněk má $(n-k)!$ členů a minorů je $\binom{n}{k}$. Odtud dostaneme

$$k!(n-k)!\binom{n}{k} = k!(n-k)!\frac{n!}{k!(n-k)!} = n!$$

□

Poznámka 4.5.

1. Laplaceova věta se také někdy nazývá „Věta o rozvoji determinantu podle zvolených řádků“.
2. Podle věty 3.4 z předcházející kapitoly platí analogická věta k Laplaceově větě zformulovaná pro sloupce.

Průvodce studiem

Praktický význam Laplaceovy věty spočívá v tom, že výpočet determinantu určitého řádu n se převede na výpočet jistého počtu determinantů matic řádu menšího než n.

Příklad 4.6. Použitím Laplaceovy věty vypočítáme determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Výpočet provedeme rozvinutím podle 1. a 3. řádku (při praktickém výpočtu je výhodné volit řádky, ve kterých se vyskytuje pokud možno hodně nul).

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+2} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+3} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+4} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+2+3} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+2+4} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+3+4} = -3 \cdot 10 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 15 \cdot (-1) +$$

$$+0 \cdot 10 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) = 30 + 0 - 6 + 0 + 0 + 0 = 24$$

Definice 4.7. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Pak algebraický doplněk jednoprvkové submatice, která se skládá z prvku a_{ij} se nazývá *algebraický doplněk prvku* a_{ij} a označuje se A_{ij}.

Příklad 4.8. V matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

je algebraickým doplňkem prvku $a_{43} = 6$ hodnota

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 9 + 0 - 3 - 0 + 9) = -3.$$

Věta 4.9. *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, nechť i je pevně zvolený řádkový a j sloupcový index. Pak platí*

rozvoj podle i–tého řádku

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$$

rozvoj podle j–tého sloupce

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Důkaz. Jedná se vlastně o tvrzení Laplaceovy věty pro $k = 1$. □

Příklad 4.10. Vypočítáme determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. rozvojem podle 1.řádku

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 24 + 1 \cdot (-60) + 0 \cdot (-66) - 1 \cdot (-36) = 48 - 60 + 36 = 24$$

2. rozvojem podle 3.sloupce

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-21) - 6 \cdot 3 = 24$$

Shrnutí

Submatice M k-tého řádu matice A je matice tvořená k řádky a k sloupci matice A.
Minor řádu k matice A je determinant submatice k-tého řádu matice A.
Algebraický doplněk je determinant submatice vytvořené zbývajícími $n - k$ řádky a $n - k$ sloupci matice A s příslušným znaménkem.
Laplaceova věta nám říká, jak vypočítat determinant pomocí minorů k-tého řádu a příslušných algebraických doplňků.

Pojmy k zapamatování

- submatice řádu k
- minor řádu k
- doplňková submatice
- doplněk minoru
- algebraický doplněk minoru
- algebraický doplněk prvku
- rozvoj podle i-tého řádku
- rozvoj podle j-tého sloupce

Kontrolní otázky

1. *Jak si odpovídají pojmy submatice matice A a doplňková submatice matice A?*
2. *Je doplněk minoru matice nebo číslo?*
3. *Proč se Laplaceově větě říká rovněž věta o rozvoji determinantu podle zvolených řádků?*
4. *Můžeme najít matici A řádu 3 (nad $\mathbb{R}$) takovou, že* det *$A \neq 0$ a všechny minory 2.řádu v matici A jsou nulové?*

Cvičení

1. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Určete submatici této matice určenou 1., 3.a 4. řádkem a 2., 4.a 5.sloupcem, příslušný minor, doplňkovou submatici, doplněk a algebraický doplněk.

2. Rozvojem podle 2. řádku vypočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ x & y & z & w \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Rozvojem podle 3. sloupce vypočítejte determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x & -1 \\ 2 & 0 & y & 1 \\ 0 & 3 & z & -2 \\ 3 & 2 & w & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozvojem podle 2. a 3. řádku vypočítejte determinant matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ a & 0 & b & 0 & c \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Vypočítejte determinant matice

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úkoly k textu

1. Nechť A je matice řádu 6 nad $\mathbb{R}$ a nechť jsou pevně zvoleny 3 její sloupce. Uveďte, kolik submatic řádu 3 lze ze zvolených sloupců vybrat. Ukažte na příkladě.

2. Uveďte příklad matice A řádu 3 nad $\mathbb{R}$ takové, že det A = 0 a všechny minory řádu 2 matice A jsou nenulové

3. Nechť A je čtvercová matice řádu 7 (nad $\mathbb{R}$). Sestrojte všechny submatice řádu 5, které obsahují 1., 2., 5., 6. a 7. řádek matice A. Kolik jich je?

Řešení

1. submatice: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, minor: -14,

   doplňková submatice: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, doplněk: 4, algebraický doplněk: -4
2. det $A = -8z + 7w - 2x + 3y$
3. det $B = -4y + w - 4z + 5x$
4. det $C = -3bd - 7dc + 4be + 9ce - 8ae + 6ad$
5. det $K = -10$

5 Algebra matic

Studijní cíle: V této kapitole se vrátíme k obdélníkovým maticím typu m/n nad pevným číselným tělesem T. Definujeme operace sčítání matic, násobení matice číslem z tělesa T a násobení matic. Studující se rovněž seznámí s pojmem jednotková matice a inverzní matice a jedním ze způsobů výpočtu inverzní matice.

Klíčová slova: součet matic, součin čísla a matice, součin matic, jednotková matice, regulární matice, singulární matice, matice inverzní, matice adjungovaná

5.1 Algebraické operace s maticemi

Definice 5.1. Nechť $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ jsou matice typu m/n, $t \in T$ libovolné. Pak platí:

matice musí být stejného typu

1. Matice $A + B = (c_{ij})$ typu m/n definovaná

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n$$

se nazývá *součet matic* A, B.

2. matice $t \cdot A = (d_{ij})$ typu m/n definovaná

$$d_{ij} = t \cdot a_{ij} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n$$

se nazývá *součin čísla t s maticí* A.

Průvodce studiem

Součet matic je definován pouze pro matice stejného typu, přičemž sčítáme odpovídající si prvky obou matic. Při součinu čísla a matice násobíme tímto číslem každý prvek dané matice.

Příklad 5.2. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Máme vypočítat matici $4 \cdot A + 3 \cdot B$.

Řešení:

$$4 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -8 \\ 12 & 0 & -4 \\ 20 & -12 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -15 & 9 & 12 \\ -3 & 3 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \\ 17 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

Věta 5.3. *Sčítání matic je komutativní*

$$A + B = B + A$$

a asociativní

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Důkaz. Obě tvrzení plynou přímo z komutativnosti a asociativnosti sčítání čísel číselného tělesa T. □

Definice 5.4. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n, $B = (b_{ij})$ je matice typu n/p, obě nad číselným tělesem T. Pak matice $A \cdot B = (c_{ij})$ typu m/p, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{pro} \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., p$$

se nazývá *součin matic* A, B (v tomto pořadí).

Průvodce studiem

Součin matic je definován pro matice, ve kterých druhá matice má stejný počet řádků jako první sloupců. Prvky výsledné matice dostaneme jako součet součinů prvků na příslušném řádku první matice s prvky v odpovídajícím sloupci druhé matice.

Příklad 5.5. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Máme vypočítat jejich součin $A \cdot B$.
Řešení: Matice B má tolik řádků jako matice A sloupců. Součin matic $A \cdot B$ je tedy definován. Výsledná matice bude matice typu $3/2$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Průvodce studiem

Při násobení matic záleží na jejich pořadí. Na předcházejícím příkladě je vidět, že součin $A \cdot B$ je definován, ale součin $B \cdot A$ definován není. Ale i v případě, že je definováno $A \cdot B$ i $B \cdot A$ (čtvercové matice téhož řádu), tak obecně neplatí $A \cdot B = B \cdot A$. Násobení matic tedy není obecně komutativní.

Příklad 5.6. Jsou dány čtvercové matice 3. řádu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 8 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 \\ -1 & 4 & 9 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Věta 5.7. *Násobení matic je asociativní, tj. nechť matice* **A** *je typu* m/n, **B** *je typu* n/p *a* **C** *je typu* p/q. *Pak platí*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Důkaz. Nechť platí předpoklady věty, přičemž $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Potom matice $A \cdot B = (d_{ij})$ je typu m/p, kde

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Matice $(A \cdot B) \cdot C = (f_{ij})$ je typu m/q, kde

$$f_{ij} = \sum_{v=1}^{p} d_{iv} \cdot c_{vj} = \sum_{v=1}^{p} \sum_{u=1}^{n} a_{iu} \cdot b_{uv} \cdot c_{vj}.$$

Součin za sumačními znaky nemusíme závorkovat, protože se jedná o násobení čísel z číselného tělesa T, pro které platí asociativní zákon. Podobně $B \cdot C = (g_{ij})$ je typu n/q, kde

$$g_{ij} = \sum_{v=1}^{p} b_{iv} \cdot c_{vj}.$$

Matice $A \cdot (B \cdot C) = (h_{ij})$ je matice typu m/q, kde

$$h_{ij} = \sum_{u=1}^{n} a_{iu} \cdot g_{uj} = \sum_{u=1}^{n} a_{iu} \cdot \sum_{v=1}^{p} b_{uv} \cdot c_{vj} = \sum_{v=1}^{p} \sum_{u=1}^{n} a_{iu} \cdot b_{uv} \cdot c_{vj} = f_{ij}.$$

Odtud již plyne dokazovaná rovnost. □

Věta 5.8. *Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání matic, to je:*

1. *Nechť matice A je typu m/n, matice B a C jsou typu n/p, potom platí*

   $$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

   distributivní zákon pro násobení zleva

2. *Nechť matice F a G jsou typu m/n a matice H je typu n/p, potom platí*

   $$(F + G) \cdot H = F \cdot H + G \cdot H.$$

   distributivní zákon pro násobení zprava

Důkaz. 1. Nechť $A = (a_{ij})$ je typu m/n, $B = (b_{ij})$ a $C = (c_{ij})$ jsou matice typu n/p. Potom matice $A \cdot (B + C) = (d_{ij})$ je matice typu m/p, kde

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}).$$

Matice $A \cdot B + A \cdot C = (f_{ij})$ je matice typu m/p a platí

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}) = d_{ij}.$$

Dohromady platí 1.

2. Dokážeme podobně jako 1.

□

Definice 5.9. Čtvercová matice řádu n nad tělesem T tvaru

jedničky v hlavní diagonále, jinde samé nuly

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice řádu n.*

Příklad 5.10.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta 5.11. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n, $B = (b_{ij})$ je matice typu n/p. Pak platí*

$$(A \cdot B)^{'} = B^{'} \cdot A^{'}$$

Důkaz. Matice $(A \cdot B)^{'} = (c_{ij})$ je typu p/m, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki}.$$

Matice $B^{'} \cdot A^{'} = (d_{ij})$ je typu p/m, kde

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} = c_{ij}.$$

Tedy platí dokazovaná rovnost. □

Věta 5.12 (Cauchyho). *Nechť $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice řádu n. Pak platí*

determinant součinu matic je roven součinu determinantů těchto matic

$$\det\,(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důkaz. Uvažujeme čtvercovou matici H řádu $2n$ tvaru

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 0 & ... & 0 & b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & -1 & ... & 0 & b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Užitím Laplaceovy věty rozvinutím podle prvních n řádků dostaneme

$$\det H = \det A \cdot \det B$$

Nyní k $(n+j)$-tému sloupci matice H přičteme b_{1j}-krát 1. sloupec + b_{2j}-krát 2. sloupec + ... + b_{nj}-krát n-tý sloupec, $j = 1, 2, ..n$. Dostaneme tak matici

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \\ -1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

ve které

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Tedy (c_{ij}) = $A \cdot B$. Rozvinutím podle posledních n sloupců matice K dostaneme
$\det K = \det(A \cdot B) \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{1+...+n+(n+1)+...+2n} = \det(A \cdot B) \cdot (-1)^{2 \cdot n \cdot (n+1)} = \det(A \cdot B)$.
Úpravy, kterými jsme převedli matici H na matici K, nemění hodnotu determinantu a tedy $\det H = \det K$. Odtud dostaneme $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$. □

Definice 5.13. Čtvercová matice A se nazývá *regulární matice*, je-li det $A \neq 0$, *singulární matice*, je-li det $A = 0$.

Příklad 5.14. Matice

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je regulární, protože det $R = 3 \neq 0$.

Věta 5.15. *Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného řádu n. Pak platí:*

$$\textit{matice } A \cdot B \textit{ je regulární} \iff \textit{obě matice A i B jsou regulární.}$$

Důkaz. Plyne přímo z definice regulární matice a věty 5.12. □

5.2 Inverzní matice

Definice 5.16. Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice X s vlastností

$$A \cdot X = E_n \wedge X \cdot A = E_n$$

(pokud taková existuje) se nazývá *inverzní matice* k matici A a označuje se A^{-1}

> **Průvodce studiem**
>
> Je-li matice A řádu n, je matice A^{-1} rovněž řádu n.

Definice 5.17. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Matice

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

se nazývá *adjungovaná matice* k matici A.

> **Průvodce studiem**
>
> Všimněme si, že v matici A^* je v i-tém řádku a j-tém sloupci algebraický doplněk A_{ji} prvku a_{ji}, který je v j-tém řádku a i-tém sloupci matice A.

Věta 5.18. *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Potom k matici A existuje matice A^{-1} právě tehdy, je-li matice A regulární a platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Důkaz. „⇒“ Nechť k A existuje inverzní matice A^{-1} a dokážeme, že A je regulární matice. Podle definice inverzní matice je $E_n = A \cdot A^{-1}$ a odtud dostaneme

$$1 = \det E_n = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0.$$

„$\Leftarrow$" Nechť A je regulární matice, det $A \neq 0$. Ukážeme, že matice $X = \frac{A^*}{\det A}$ je inverzní maticí k matici A. Nechť $A \cdot X = (c_{ij})$, to znamená

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk}.$$

Potom však pro $i = j$ je

$$c_{ii} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1.$$

Pro $i \neq j$ je

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \frac{1}{\det A} \cdot 0 = 0.$$

Výraz $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0$, protože se jedná o determinant matice, ve které jsou i-tý a j-tý řádek stejné. Vidíme tedy, že $A \cdot X = (c_{ij}) = E_n$. Podobně dokážeme $X \cdot A = E_n$. □

Věta 5.19. *Nechť A, B jsou regulární matice řádu n. Pak platí*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,
3. $\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$,
4. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

matice inverzní k inverzní matici je matice původní

inverzní matice k součinu matic je součin inverzních matic v opačném pořadí

determinant inverzní matice je převrácená hodnota determinantu původní matice

matice inverzní k transponované matici je transponovaná matice k inverzní matici

Důkaz. 1. Plyne ihned z definice

2. $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot B = E_n$
   $A \cdot B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n$
   Z toho vidíme, že matice $B^{-1} \cdot A^{-1}$ je inverzní maticí k matici $A \cdot B$.

3. Platí $A \cdot A^{-1} = E_n$ a podle Cauchyho věty 5.12 dostaneme

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E_n = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

4. Podle věty 5.11 platí:
   $(A^{-1})' \cdot A' = (A \cdot A^{-1})' = E_n' = E_n$
   $(A') \cdot (A^{-1})' = (A^{-1} \cdot A)' = E_n' = E_n$
   To znamená, že $(A^{-1})'$ je inverzní maticí k matici A'.

□

Příklad 5.20. Je dána matice

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Máme vypočítat inverzní matici R^{-1}.
Řešení: V předcházejícím příkladě jsme zjistili, že matice R je regulární, det $R = 3$. Matice R^{-1} je tedy definovaná. Vypočítáme nejdříve algebraické doplňky prvků matice R.

$$R_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad R_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$R_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad R_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$R_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad R_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

výpočet algebraických doplňků

$$R_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad R_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$R_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Z algebraických doplňků sestavíme adjungovanou matici

adjungovaná matice

$$R^* = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a z té dostaneme matici inverzní

inverzní matice

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} \cdot R^* = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

.

Podle definice inverzní matice ověříme, že se skutečně jedná o inverzní matici.

zkouška správnosti výpočtu

$$R \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

Průvodce studiem

Při praktickém ověřování, zda matice X je inverzní maticí matice A, stačí ověřit pouze jednu z rovností $A \cdot X = E_n, X \cdot A = E_n$. Druhá rovnost je již vynucena.

V dalším si ukážeme jiný, jednodušší způsob, jak k dané matici vypočítat inverzní matici.

Shrnutí

Součet matic je definován pouze pro matice stejného typu.
Součin matic je definován pouze pro matice, ve kterých druhá matice má tolik řádků, kolik má první matice sloupců.
Regulární matice je matice, jejíž determinant je různý od nuly.
Inverzní matice je čtvercová matice, která v součinu s původní čtvercovou maticí dává jednotkovou matici.
Adjungovaná matice je sestavená z algebraických doplňků prvků původní matice.

Pojmy k zapamatování

- součet matic
- součin čísla a matice
- součin matic

- jednotková matice
- regulární matice
- singulární matice
- inverzní matice
- adjungovaná matice

Kontrolní otázky

1. *Matice A je typu* $5/4$ *a matice B typu* $4/3$*. Můžeme najít součet a součin těchto matic? Jakého jsou typu?*
2. *Matice A je typu* u/v*, matice B typu* v/w *a matice C je typu* w/t*. Jakého typu je matice* $A \cdot (B \cdot C)$*?*
3. det *A je roven nule. Můžeme najít matici inverzní k matici A?*
4. *Jak spolu souvisí matice* A^{-1} *a* A^**?*
5. *Můžeme najít dvě regulární čtvercové matice řádu 3 takové, že jejich součin je nulová matice?*

Cvičení

1. Vypočítejte matici $A \cdot B - B \cdot A$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
2. K matici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
nalezněte všechny matice X, pro které platí $A \cdot X = O$.
3. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
určete matici $A^3 - A^2 - 3 \cdot A + 4 \cdot E$, kde E je jednotková matice.
4. Zjistěte, pro která reálná čísla c je následující matice regulární:
$$\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ -2 & c & 2 \\ c & -c & 3 \end{pmatrix}$$
5. Nechť A, B, C jsou čtvercové matice téhož řádu, det $A = 5$, det $B = 2$, det $C = 3$. Vypočtěte:
   (a) $\det(A^2 \cdot B \cdot C' \cdot B^{-1})$
   (b) $\det(B^2 \cdot C^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} \cdot C')$
6. Ke čtvercové matici
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
nalezněte adjungovanou matici A^*.

7. K daným maticím

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 7 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

nalezněte pomocí adjungované matice inverzní matici.

Úkoly k textu

1. Udejte příklad matic A, B nad $\mathbb{R}$, které nejsou čtvercové a přitom existují oba součiny $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
2. Udejte příklad matice X typu m/n nad T, aby $X \cdot A = t \cdot A$, kde matice A je typu m/n nad T a t je číslo z číselného tělesa T.
3. Udejte příklad nenulové čtvercové matice řádu 4, ke které neexistuje matice inverzní.

Řešení

1. $A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
2. $X = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, kde p, q, r, x, y, z jsou libovolná čísla z $\mathbb{R}$
3. $A^3 - A^2 - 3 \cdot A + 4 \cdot E = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 5 \\ 13 & 7 & 4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
4. všechna reálná čísla různá od čísel -2 a -3
5. a) 75 b) 10
6. $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
7. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) není definovaná

6 Hodnost matice

Studijní cíle: V této kapitole se studující seznámí s pojmem hodnost matice a s tím, jak tento pojem souvisí s pojmem dimenze vektorového prostoru.

Klíčová slova: hodnost matice, elementární řádková úprava, matice ve schodovitém tvaru

Průvodce studiem

V této kapitole opět uvažujeme matici A typu m/n nad číselným tělesem T tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in T.$$

Jak jsme si již dříve řekli, řádky matice A můžeme chápat jako vektory z vektorového prostoru T^n. Řádky (vektory) matice A tedy generují jistý podprostor W vektorového prostoru T^n a nás zajímá dimenze tohoto podprostoru.

Sloupce matice A jsou vektory z vektorového prostoru T^m, generují v T^m podprostor H. T^n, T^m jsou různé vektorové prostory, W a H tedy musí být rozdílné podprostory a nás zajímá, jestli dim W = dim H.

Definice 6.1. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n nad číselným tělesem T. Pak dimenze vektorového podprostoru v T^n generovaného řádky matice A se nazývá *hodnost matice* A a označuje se h(A).

Věta 6.2. *Hodnost matice je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků.*

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z definice hodnosti matice, definice dimenze a definice báze. □

Věta 6.3. *Nechť A je nenulová matice typu m/n. Pak hodnost matice A je rovna maximálnímu z řádů nenulových minorů matice A.*

Důkaz. Viz literatura [Hor91] □

Věta 6.4. *Transponováním matice se její hodnost nezmění,* h(A) = h($A^{'}$) .

Důkaz. Je-li A nulová matice, potom je $A^{'}$ rovněž nulová matice a tvrzení platí. Nechť je A nenulová matice a h$(A) = k$. Potom podle předchozí věty existuje v A nenulový minor řádu k a všechny minory většího řádu než k jsou nulové. Transponováním se hodnoty minorů nemění, proto v matici $A^{'}$ existuje nenulový minor řádu k a všechny minory většího řádu než k jsou nulové. To znamená, že h$(A^{'}) = k$ a tedy h($A^{'}$)=h(A). □

Věta 6.5. *Hodnost matice je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých sloupců.*

Důkaz. h($A^{'}$)=h(A) a hodnost matice A je tedy rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků transponované matice h($A^{'}$), to znamená maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců matice A. □

Průvodce studiem

Došli jsme tedy k závěru, že

$$\dim W = \dim H$$

kde W je podprostor generovaný řádky matice A a H je podprostor generovaný sloupci matice A. Čili dimenze podprostoru generovaného řádky matice A je rovna dimenzi podprostoru generovaného sloupci matice A.

Následující věta charakterizuje čtvercovou regulární matici

Věta 6.6. *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *Matice A je regulární.*
2. $\mathrm{h}(A) = n$.
3. *Řádky matice A jsou lineárně nezávislé.*
4. *Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.*

charakteristika regulární matice

Důkaz. „1 ⇒ 2“ matice A je regulární, to znamená det $A \neq 0$. To však znamená, že $\mathrm{h}(A) = n$, protože maximální z řádů nenulových minorů je n.
„2 ⇒3“ $\mathrm{h}(A) = n$, tedy matice A má n lineárně nezávislých řádků
„3 ⇒4“ matice A má n lineárně nezávislých řádků, platí tedy $\mathrm{h}(A) = n$. $\mathrm{h}(A^{'})$=$\mathrm{h}(A) = n$, má tedy matice A rovněř n lineárně nezávislých sloupců.
„4 ⇒1“ sloupce matice A jsou lineárně nezávislé, to znamená, že $\mathrm{h}(A) = n$. Maximální řád nenulových minorů je tedy n, to znamená, že det $A \neq 0$ a matice A je regulární. □

Poznámka 6.7. Podobně můžeme charakterizovat singulární matici. Ekvivalentní jsou výroky:

1. Matice A je singulární.
2. $\mathrm{h}(A) < n$.
3. Řádky matice A jsou lineárně závislé.
4. Sloupce matice A jsou lineárně závislé.

charakteristika singulární matice

Definice 6.8. Nechť A je matice typu m/n nad číselným tělesem T. Pak každá z následujících úprav matice A se nazývá *elementární řádková úprava* matice A:

1. libovolná záměna pořadí řádků,
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem z T,
3. k jednomu řádku přičtení jiného řádku vynásobeného libovolným číslem z T.

Průvodce studiem

Elementární řádkové úpravy matice A chápeme jako výše popsané manipulace s vektory z T^n.

Věta 6.9. *Nechť A je matice typu m/n nad T a nechť B vznikne z A provedením elementární řádkové úpravy. Pak podprostor (ve vektorovém prostoru T^n) generovaný řádky matice A je roven podprostoru generovanému řádky matice B.*

Důkaz. Řádky matice A chápeme jako vektory vektorového prostoru T^n a označíme je $u_1, u_2, ..., u_m$. Víme, že podprostor generovaný vektory $u_1, u_2, ..., u_m$ je roven množině všech lineárních kombinací těchto vektorů, to je

$$[u_1, u_2, ..., u_m] = L(u_1, u_2, ..., u_m)$$

Podprostor $[u_1, u_2, ..., u_m]$ se nezmění, když

1. zaměníme pořadí řádků matice A, protože

$$L(u_1, u_2, ..., u_m) = L(u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_m}),$$

kde $(i_1, i_2, ..., i_m)$ je libovolné pořadí indexů 1,2, ... ,m

2. vynásobením i-tého řádku matice A číslem $t \neq 0 \in T$, protože

$$L(u_1, u_2, ..., u_m) = L(u_1, u_2, ..., t.u_i, ..., u_m)$$

3. přičtením k i-tému řádku matice A t-násobku j-tého řádku ($i \neq j$), protože

$$L(u_1, u_2, ..., u_m) = L(u_1, u_2, ..., u_i + t.u_j, ..., u_m)$$

Tím jsme dokázali, provedením libovolné elementární řádkové úpravy matice A se nezmění podprostor $[u_1, u_2, ..., u_m]$ v T^n. □

Věta 6.10. *Provedením libovolné elementární řádkové úpravy matice A se nezmění hodnost matice A.*

Důkaz. Plyne přímo z věty 6.9. □

Průvodce studiem

Z předchozích úvah je zřejmé, že pro praktické zjišťování hodnosti dané matice A bude výhodné elementárními řádkovými úpravami převést matici A na jednoduchý tvar, ze kterého již hodnost snadno určíme.

Definice 6.11. Nechť A je matice typu m/n. Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek nad ním.

Věta 6.12. *Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na schodovitý tvar.*

Důkaz. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n. Je-li A nulová matice, pak je již ve schodovitém tvaru a tvrzení věty platí. Předpokládáme tedy, že A je nenulová matice. Důkaz nyní provedeme matematickou indukcí vzhledem k počtu řádků m.

1. Pro $m = 1$ je již matice ve schodovitém tvaru.

2. Předpokládáme, že každou matici o 1,2,...,m řádcích lze konečným počtem elementárních úprav převést na schodovitý tvar. Nechť A je matice, která má $m + 1$ řádků. Nechť s-tý sloupec je první nenulový sloupec matice A. Pak přímou výměnou řádků dostaneme z matice A matici $B = (b_{ij})$, která má v 1.řádku a s-tém sloupci nenulový prvek $b_{1s} \neq 0$. Nyní k i-tému řádku matice B přičteme (-$\frac{b_{is}}{b_{1s}}$)-násobek 1.řádku pro $i = 2, 3, ..., m + 1$. Dostaneme tak matici $C = (c_{ij})$, která má v prvních s sloupcích samé nuly kromě $c_{1s} \neq 0$. Aplikujeme-li nyní na matici, která se skládá z posledních m řádků matice C indukční předpoklad, dostaneme tvrzení pro $m + 1$.

□

Věta 6.13. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Nechť A je matice typu m/n ve schodovitém tvaru. Je-li A nulová matice, pak $\text{h}(A) = 0$ a tvrzení platí. Je-li A nenulová matice, která obsahuje k nenulových řádků, tak těchto k řádků je lineárně nezávislých a všechny ostatní řádky jsou nulové. To znamená, že maximální počet lineárně nezávislých řádků je k a tedy $\text{h}(A) = k$. □

Průvodce studiem

Posledních tří vět používáme pro zjišťování hodnosti matic. Matici pomocí elementárních řádkových úprav převedeme na schodovitý tvar a pak zjistíme její hodnost. Popsaný postup si ukážeme na příkladě.

Příklad 6.14. Určete hodnost matice A nad číselným tělesem $\mathbb{R}$, když

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & -6 & 9 \\ 1 & 6 & -6 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & -8 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Druhý řádek vynásobíme číslem $\frac{1}{3}$ a zaměníme první a druhý řádek, dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -6 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & -8 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku, od třetího řádku odečteme první a od čtvrtého řádku dvojnásobek prvního

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 9 & -12 & -3 & 9 & -12 \end{pmatrix}.$$

Od třetího řádku odečteme dvojnásobek a od čtvrtého trojnásobek druhého řádku a dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnost matice A je $\mathrm{h}(A) = 2$.

Průvodce studiem

Předchozí metodu můžeme s výhodou použít při řešení úloh o vektorovém prostoru T^n. Pokud chceme ve vektorovém prostoru T^n zjistit dimenzi a bázi nějakého podprostoru W, který je generovaný konečným počtem zadaných vektorů, pak tyto vektory napíšeme jako řádky do matice, kterou elementárními řádkovými úpravami převedeme na schodovitý tvar. Hodnost matice je dimenze podprostoru W a nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru jsou pak bází podprostoru W.

Příklad 6.15. Ve vektorovém prostoru R^4 je dán podprostor

$$W = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5],$$

kde

$u_1 = (1, 0, -1, 2), u_2 = (2, 3, 1, 0), u_3 = (1, -3, -4, 6), u_4 = (3, 2, 1, -1), u_5 = (-1, 1, 0, 1).$

Určete dimenzi a bázi tohoto podprostoru.

Řešení:

z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sestavíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici převedeme na schodovitý tvar.

od 2.řádku odečteme dvojnásobek 1., od 3.řádku odečteme 1., od 4.odečteme trojnásobek 1. a k pátému 1.řádek přičteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zaměníme druhý a pátý řádek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

k 3.řádku přičteme trojnásobek 2.od 4.řádku odečteme dvojnásobek a od 5. trojnásobek druhého

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

ke 4.a 5. řádku přičteme 3.řádek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že dim $W = 3$ a bázi W tvoří vektory

$$(1, 0, -1, 2), (0, 1, -1, 3), (0, 0, -6, 13)$$

Shrnutí

Hodnost matice je dimenze vektorového prostoru generovaného řádky dané matice.
Hodnost matice zjistíme, když ji elementárními řádkovými úpravami převedeme na schodovitý tvar a spočítáme počet nenulových řádků.

Pojmy k zapamatování

- hodnost matice
- elementární řádkové úpravy
- matice ve schodovitém tvaru

Kontrolní otázky

1. *Je dimenze podprostoru generovaného sloupci dané matice stejná jako dimenze podprostoru generovaného řádky této matice?*

2. *Jsou řádky singulární matice lineárně nezávislé?*
3. *Je hodnost regulární matice menší než její řád?*
4. *Když libovolný řádek vynásobíme číslem 0, jedná se o elementární řádkovou úpravu?*
5. *Matice A je typu 5/6. Všechny minory řádu 5 jsou nulové a existuje minor řádu 4, který je nenulový. Jaká je hodnost matice A?*

Cvičení

1. Určete hodnost matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$
nad $\mathbb{R}$.
2. Určete hodnost matice
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 21 & 4 \\ a & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$
v závislosti na parametru a z $\mathbb{R}$.
3. Určete bázi a dimenzi podprostoru W vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory
$$u_1 = (1,1,2,2), u_2 = (1,2,-1,2), u_3 = (1,2,-2,3), u_4 = (2,3,5,0).$$
4. Nalezněte ty hodnoty parametru a z $\mathbb{R}$, pro které má podprostor $W = [u_1, u_2, u_3]$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ nejmenší dimenzi a určete tuto dimenzi, je-li
$$u_1 = (2,7,a,2), u_2 = (1,3,-4,1), u_3 = (1,a,-14,1).$$
5. Jsou dány matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Určete $\mathrm{h}(A)$, $\mathrm{h}(B)$, $\mathrm{h}(A \cdot B)$

Úkoly k textu

1. Uveďte příklad matice A nad $\mathbb{R}$ takové, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a sloupce matice A jsou lineárně závislé.
2. Uveďte příklad matice A nad $\mathbb{R}$ takové, že sloupce matice A jsou lineárně nezávislé a řádky matice A jsou lineárně závislé.
3. Uveďte příklad čtvercových matic 3. řádu A a B takových, že $\mathrm{h}(A \cdot B) \neq \mathrm{h}(B \cdot A)$.
4. Uveďte příklad matice A typu $7/5$, ve které jsou všechny minory 4. řádu nulové.

Řešení

1. $\mathrm{h}(A) = 3$
2. pokud $a = 2$, $\mathrm{h}(B) = 3$, pokud $a \neq 2$, $\mathrm{h}(B) = 4$
3. $\dim(W) = 3$, báze W je (1,1,2,2), (0,1,-3,0), (0,0,-1,1)
4. pokud $a = -7$ nebo $a = 2$ je $\dim(W) = 2$
5. $\mathrm{h}(A) = 3$, $\mathrm{h}(B) = 3$, $\mathrm{h}(A \cdot B) = 1$

7 Výpočet inverzní matice pomocí elementárních řádkových úprav

Studijní cíle: V této kapitole se studující seznámí s jednodušším způsobem výpočtu inverzní matice a s řešením maticových rovnic.

Klíčová slova: inverzní matice, maticová rovnice

Průvodce studiem

Již víme, že jednou ze základních úloh lineární algebry je hledání inverzní matice k dané čtvercové matici A řádu n. My už jsme si jeden způsob výpočtu ukazovali, použitím adjungované matice A^* k matici A. Počítali jsme inverzní matici matice 3. řádu. Viděli jsme, že i pro tak malou matici byl výpočet dost pracný. Museli jsme vypočítat jeden determinant matice 3. řádu a devět determinantů matic 2. řádu. Obecně pro matici řádu n musíme spočítat jeden determinant matice řádu n a n^2 determinantů matic řádu $n-1$.

Nyní si odvodíme jednu poměrně jednoduchou a pro výpočet vhodnou metodu nalezení inverzní matice, která je založená na použití elementárních řádkových úprav.

Věta 7.1. *Nechť A je regulární matice řádu n nad číselným tělesem R. Pak platí:*

1. *Matici A lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici E_n.*
2. *Provedení řádkové elementární úpravy matice A je ekvivalentní vynásobení matice A zleva jistou regulární maticí řádu n.*

Důkaz. 1. Podle předpokladu je $\mathrm{h}(A) = n$ a je možné tedy matici A konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na tvar, ve kterém jsou v hlavní diagonále samé nenulové prvky a pod hlavní diagonálou jsou samé nuly. Vynásobením jednotlivých řádků vhodnými nenulovými čísly z T dostaneme v hlavní diagonále samé jedničky. Nakonec konečným počtem elementárních řádkových úprav dostaneme nad hlavní diagonálou samé nuly. Dostaneme tak jednotkovou matici.

2. Rozepsáním se snadno ověří, že:

(a) Záměna dvou řádků (i-tého a j-tého) matice A je ekvivalentní vynásobení matice A zleva maticí

záměna i-tého a j-tého řádku

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

$\det F = -1 \neq 0$.

(b) Vynásobení i-tého řádku matice A nenulovým číslem $t \in T$ je ekvivalentní vynásobení matice A zleva maticí *vynásobení i-tého řádku číslem t*

$$G = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & t & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

det $G = t \neq 0$.

(c) přičtení t-násobku j-tého řádku k i-tému řádku matice A ($i \neq j$, $t \in T$ libovolné) je ekvivalentní vynásobení zleva matice A maticí

přičtení t-násobku j-tého řádku k i-tému

$$H = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & t & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

det $H = 1 \neq 0$.

□

Průvodce studiem

Z předcházející věty plyne metoda výpočtu inverzní matice k matici A. Spočívá v tom, že elementárními řádkovými úpravami převedeme matici A na jednotkovou matici E_n. To podle druhé části předchozí věty znamená, že existují jisté regulární matice $R_1, R_2, ..., R_s$, kterými zleva násobíme matici A tak, že platí

$$(R_s \cdot ... \cdot R_2 \cdot R_1) \cdot A = E_n.$$

To znamená, že $(R_s \cdot ... \cdot R_2 \cdot R_1) = A^{-1}$. Současně platí

$$(R_s \cdot ... \cdot R_2 \cdot R_1) \cdot E_n = (R_s \cdot ... \cdot R_2 \cdot R_1) = A^{-1}.$$

Z posledního vztahu je vidět, že když stejné elementární řádkové úpravy, které provádíme na matici A budeme současně provádět na jednotkovou matici E_n, dostaneme matici inverzní A^{-1}.

Prakticky provádíme výpočet tak, že obě matice A a E_n napíšeme vedle sebe a oddělíme je svislou čarou. Pak provádíme zvolené elementární řádkové úpravy a to pro obě matice najednou. Jednotlivé matice při úpravách oddělujeme symbolem $\sim$.

$$(A|E_n) \sim \left(E_n|A^{-1}\right)$$

Příklad 7.2. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici k ní inverzní.

Řešení: Z matice A a jednotkové matice vytvoříme jednu velkou matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Na tuto matici budeme provádět elementární řádkové úpravy tak, aby pod hlavní diagonálou byly samé nuly

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

převedení matice na trojúhelníkový tvar

Nyní provedeme elementární řádkové úpravy tak, aby v hlavní diagonále byly samé jedničky – 3. a 4. řádek vydělíma dvěma

v hlavní diagonále samé jedničky

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Nyní se snažíme elementárními řádkovými úpravami dostat nuly nad hlavní diagonálu

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

převedení matice na jednotkovou matici

Hledaná inverzní matice k matici A je tedy matice

inverzní matice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Průvodce studiem

Nyní už umíme matice sčítat, odečítat, násobit číslem i mezi sebou a umíme najít k dané čtvercové matici matici inverzní. Můžeme tedy řešit maticové rovnice.

Příklad 7.3. Řešte maticovou rovnici

$$(X + A) \cdot B = C,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Rovnici vynásobíme zprava maticí inverzní k matici B

$$(X + A) \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$$
$$X + A = C \cdot B^{-1}$$

Od obou stran rovnice odečteme matici A

$$X = C \cdot B^{-1} - A$$

Vypočítáme matici inverzní k matici B. Sestavíme matici z matice B a jednotkové matice E_3 a provádíme potřebné elementární řádkové úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

převedení matice na trojúhelníkový tvar s jedničkou v hlavní diagonále

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim$$

převedení na jednotkovou matici

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Inverzní maticí k matici B je matice

matice inverzní k matici B

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme dořešit naši rovnici

$$X = C \cdot B^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \\ -2 & -2 & 9 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

postupný výpočet matice X

Hledaným řešením dané maticové rovnice je tedy matice

řešení

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \\ -2 & -2 & 9 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do dané rovnice se můžeme přesvědčit, že toto řešení je správné.

Shrnutí

Provedeme-li stejné elementární řádkové úpravy, kterými matici A převedeme na jednotkovou matici, s jednotkovou maticí, dostaneme matici inverzní k matici A

Pojmy k zapamatování

- inverzní matice
- elementární řádkové úpravy
- maticová rovnice

Kontrolní otázky

1. *Jakou matici obdržíme, když provedeme stejné elementární řádkové úpravy, kterými jsme převedli jednotkovou matici na matici A^{-1}, na matici A?*
2. *Vynásobením matice E zleva maticemi $R_1, R_2, ..., R_s$ jsme dostali matici A^{-1}. Jakou matici dostaneme, když vynásobíme zleva matici A maticemi $R_1, R_2, ..., R_s$?*

Cvičení

1. K dané matici pomocí elementárních řádkových úprav najděte matici inverzní

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Řešte maticovou rovnici $(X+K)\cdot L - M = N$, kde

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Pomocí inverzní matice určete matici X, pro kterou platí $A\cdot X\cdot B = C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

Úkoly k textu

1. Uveďte příklad nenulové čtvercové matice A řádu 5, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

2. Uveďte příklad čtvercové matice A řádu 6, kterou lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

3. Uveďte příklad matice H tak, aby $H\cdot A$ byla matice, která vznikne ze zadané čtvercové matice A řádu 5 přičtením dvojnásobku 2. řádku ke 4. řádku.

4. Uveďte příklad matice G tak, aby $G\cdot A$ byla matice, která vznikne ze zadané čtvercové matice A řádu 5 záměnou 3. a 5. řádku.

Řešení

1. $a)$ $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ $b)$ $$B^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -11 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení

Studijní cíle: V této kapitole se studující seznámí se soustavami k lineárních rovnic o n neznámých a nejpoužívanější metodou jejich řešení – Gaussovou eliminační metodou.

Klíčová slova: soustava k lineárních rovnic o n neznámých, řešení soustavy, koeficient, absolutní člen, matice soustavy, rozšířená matice soustavy, ekvivalentní soustavy, ekvivalentní úprava, Gaussova eliminační metoda

V následujících kapitolách se budeme zabývat řešením soustavy algebraických rovnic nad číselným tělesem T. Tento problém má široké uplatnění v matematice, vědě a technice.

8.1 Soustavy lineárních rovnic

Průvodce studiem

Se soustavami lineárních rovnic jsme se setkali již na střední škole. Řešili jsme jednoduché soustavy se dvěma a třemi neznámými. Nyní se seznámíme se soustavami obecněji. Ukážeme si jednu z mnoha metod řešení obecných soustav lineárních rovnic – Gaussovu eliminační metodu.

Definice 8.1. Nechť T je číselné těleso. Pak soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + ... + a_{kn}\cdot x_n &= b_k, \end{aligned} \tag{8.1}$$

kde $a_{ij} \in T, b_i \in T$, $i = 1, 2, ..., k, j = 1, 2, ..., n$, se nazývá *soustava k lineárních rovnic o n* neznámých nad tělesem T. *Řešení soustavy* (8.1) je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, ..., t_n)$ prvků z T taková, že po dosazení t_i za x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ všechny rovnice v (8.1) přejdou v identity.

Poznámka 8.2.

1. Číslo a_{ij} v soustavě (8.1) nazýváme *koeficient* v i-té rovnici u j-té neznámé, číslo b_i v soustavě (8.1) nazýváme *absolutní člen* i-té rovnice. Matici *k řádků, n sloupců*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

nazýváme *matice soustavy* (8.1).
Matici *k řádků, n+1 sloupců*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

nazýváme *rozšířená matice soustavy* (8.1).

2. Každé řešení soustavy (8.1) může být považováno za vektor z vektorového prostoru T^n. Množinu všech řešení soustavy (8.1) můžeme chápat jako jistou podmnožinu prostoru T^n, která může být i prázdná, pokud soustava nemá žádné řešení.

3. Když označíme

vektor neznámých X, vektor absolutních členů B

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix},$$

pak můžeme soustavu (8.1) zapsat krátce maticovou rovnicí

maticový zápis dané soustavy

$$A \cdot X = B.$$

Průvodce studiem

Při řešení soustavy lineárních rovnic nastane vždy právě jeden z následujících tří případů:

1. soustava nemá žádné řešení (je neřešitelná),
2. soustava má jediné řešení,
3. soustava má více než jedno řešení (nekonečně mnoho).

Definice 8.3. Dvě soustavy lineárních rovnic o n neznámých (nad týmž číselným tělesem T) se nazývají *ekvivalentní soustavy*, jestliže množiny jejich řešení jsou si rovny. Jakákoliv úprava dané soustavy lineárních rovnic, po které vznikne soustava ekvivalentní, se nazývá *ekvivalentní úprava* dané soustavy lineárních rovnic.

Věta 8.4. *Nechť je dána soustava lineárních rovnic (8.1). Pak následující úpravy jsou ekvivalentními úpravami soustavy (8.1):*

1. *libovolná záměna pořadí rovnic,*
2. *vynásobení libovolné rovnice nenulovým číslem z T,*
3. *k jedné rovnici přičtení jiné rovnice vynásobené libovolným číslem z T,*
4. *vypuštění z (8.1) rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic.*

Průvodce studiem

Řekneme, že i-tá rovnice soustavy (8.1) je lineární kombinací ostatních rovnic této soustavy, když existují taková čísla $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k \in T$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, že platí

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = p_1 \cdot (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n) +$$
$$+ p_2 \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n) + \dots + p_{i-1} \cdot (a_{(i-1)1} \cdot x_1 + a_{(i-1)2} \cdot x_2 + \dots + a_{(i-1)n} \cdot x_n) +$$
$$+ p_{i+1} \cdot (a_{(i+1)1} \cdot x_1 + a_{(i+1)2} \cdot x_2 + \dots + a_{(i+1)n} \cdot x_n) + \dots + p_k \cdot (a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n).$$

Důkaz. 1. Tvrzení je zřejmé.

2. Tvrzení je zřejmé.

3. Vzhledem k 1. můžeme předpokládat, že k první rovnici přičteme druhou rovnici vynásobenou číslem p. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n + p \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n) &= b_1 + p \cdot b_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ .... & \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Je-li $(t_1, t_2, ..., t_n)$ řešením soustavy (8.1), potom je zřejmě také řešením soustavy (8.2). Naopak, když $(t_1, t_2, ..., t_n)$ je řešením soustavy (8.2), pak po dosazení do první rovnice soustavy (8.2) dostaneme

$$a_{11} \cdot t_1 + a_{12} \cdot t_2 + ... + a_{1n} \cdot t_n + p \cdot (a_{21} \cdot t_1 + a_{22} \cdot t_2 + ... + a_{2n} \cdot t_n) = b_1 + p \cdot b_2,$$

ale $a_{21} \cdot t_1 + a_{22} \cdot t_2 + ... + a_{2n} \cdot t_n = b_2$, po dosazení dostaneme

$$a_{11} \cdot t_1 + a_{12} \cdot t_2 + ... + a_{1n} \cdot t_n + p \cdot b_2 = b_1 + p \cdot b_2.$$

Po odečtení máme

$$a_{11} \cdot t_1 + a_{12} \cdot t_2 + ... + a_{1n} \cdot t_n = b_1.$$

To znamená, že vektor $(t_1, t_2, ..., t_n)$ je řešením soustavy (8.1). Soustavy (8.1) a (8.2) jsou ekvivalentní.

4. Vzhledem k 1. předpokládáme, že v soustavě (8.1) je první rovnice lineární kombinací ostatních rovnic. To znamená, že soustava (8.1) má tvar

$$\begin{aligned} p_2 \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n) + & \\ + p_3 \cdot (a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + ... + a_{3n} \cdot x_n) + & \\ + ... + p_k \cdot (a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n) &= p_2 \cdot b_2 + p_3 \cdot b_3 + ... + p_k \cdot b_k \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ .... & \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n &= b_k, \end{aligned} \tag{8.3}$$

kde $p_2, p_3, ..., p_k \in T$. Uvažujeme soustavu, která vznikla z předchozí soustavy vypuštěním 1. rovnice. Nyní je přímo vidět, že $(t_1, t_2, ..., t_n)$ je řešením soustavy (8.1) právě tehdy, když je řešením soustavy (8.3). Tedy soustavy (8.1) a (8.3) jsou ekvivalentní.

□

Průvodce studiem

Při provádění ekvivalentních úprav dané soustavy lineárních rovnic není nutné stále opisovat celou soustavu i s neznámými, stačí pracovat s rozšířenou maticí dané soustavy. Provádění ekvivalentních úprav na dané soustavě je ekvivalentní provádění elementárních řádkových úprav na rozšířené matici dané soustavy doplněnému o vypouštění řádků matice, které jsou lineárními kombinacemi ostatních řádků.

Na této úvaze je založena Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic. Její princip spočívá v tom, že danou soustavu rovnic převedeme na jednodušší ekvivalentní soustavu, kterou snadno vyřešíme.

8.2 Gaussova eliminační metoda

Je dána soustava lineárních rovnic (8.1). Převedeme soustavu (8.1) ekvivalentními úpravami na soustavu, jejíž rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru, přičemž vypustíme každou rovnici, která je lineární kombinací ostatních rovnic.

$$\begin{aligned} a_{11}^{'} \cdot x_1 + a_{12}^{'} \cdot x_2 + ... + a_{1n}^{'} \cdot x_n &= b_1^{'} \\ .... & \\ a_{sr}^{'} \cdot x_r + a_{sr+1}^{'} \cdot x_{r+1} + ... + a_{sn}^{'} \cdot x_n &= b_s^{'}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

Soustava (8.4) má s rovnic. Mohou nastat tři případy:

1. Pokud se v (8.4) vyskytne rovnice, ve které jsou všechny koeficienty nulové a absolutní člen je různý od nuly, nemá soustava (8.4) a tím ani soustava (8.1) řešení.

   Příklad 8.5. Je dána soustava rovnic nad číselným tělesem $\mathbb{R}$

   daná soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_3 + 2.x_4 &= 5 \\ 3x_1 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

   Rozšířená matice této soustavy je

   rozšířená matice dané soustavy

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   Rozšířenou matici soustavy elementárními řádkovými úpravami převedeme na schodovitý tvar

   převedení rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & -9 & 4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -67 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33 \end{array}\right).$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

soustava ekvivalentní s danou soustavou

$$\begin{aligned} x_1 + 3.x_2 - x_3 &= 4 \\ -3x_2 + 6x_3 - x_4 &= -5 \\ -2x_3 + x_4 &= 10 \\ -4x_4 &= -67 \\ 0 &= -33 \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení, tedy ani daná soustava nemá řešení.

neřešitelná soustava

Pokud takový případ nenastane, soustava je řešitelná.

2. Soustava má jediné řešení, je-li $s = n$. Toto řešení spočítáme postupným dosazováním ze soustavy (8.4)

Příklad 8.6. Je dána soustava rovnic nad číselným tělesem $\mathbb{R}$

daná soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 18 \end{aligned}$$

Rozšířená matice této soustavy je

rozšířená matice dané soustavy

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

Rozšířenou matici soustavy elementárními řádkovými úpravami převedeme na schodovitý tvar

převedení rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

soustava ekvivalentní s danou soustavou

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 &= -4 \\ 5x_4 &= 10. \end{aligned}$$

Nyní již snadno spočítáme řešení
$x_4 = 2$,

$x_3 = -4 + 3x_4 = -4 + 6 = 2,$
$x_2 = -x_3 - 2x_4 = -2 - 4 = -6,$
$x_1 = 1 + x_3 - x_4 = 1 + 2 - 2 = 1.$

Řešením dané soustavy je tedy vektor $(1, -6, 2, 2)$. *řešení soustavy*

3. Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud je $s < n$. Postupným dosazováním z (8.4) vyjádříme s neznámých pomocí zbývajících $(n - s)$ neznámých. Těchto $(n - s)$ neznámých nazýváme *volné neznámé* . Dosazujeme-li za volné neznámé libovolně čísla z T, kterých je nekonečně mnoho, dostaneme pak jednotlivá konkrétní řešení soustavy (8.1), kterých je tedy také nekonečně mnoho.

Příklad 8.7. Je dána soustava rovnic nad číselným tělesem $\mathbb{R}$ *daná soustava rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 11 \end{aligned}$$

Rozšířená matice této soustavy je *rozšířená matice této soustavy*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Elementárními řádkovými úpravami převedeme rozšířenou matici dané soustavy na schodovitý tvar *převedení rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar*

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy *soustava ekvivalentní s danou soustavou*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5, \end{aligned}$$

která má dvě rovnice a čtyři neznámé. Dvě neznámé volíme jako volné neznámé. Zvolíme např. za volné neznámé x_3, x_4 a dosadíme za ně libovolná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ a vypočítáme x_2 a x_1. Pak
$x_3 = r, x_4 = s,$
$x_2 = 5 - 2x_3 - 3x_4 = 5 - 2r - 3s,$
$x_1 = 3 + x_2 - 2x_3 = 3 + 5 - 2r - 3s - 2r = 8 - 4r - 3s.$

Řešením dané soustavy je vektor $(8 - 4r - 3s, 5 - 2r - 3s, r, s)$, $r, s \in \mathbb{R}$ libovolné. *řešení soustavy*

Poznámka 8.8. Jestliže má soustava lineárních rovnic nekonečně mnoho řešení, pak z Gaussovy metody vyplývá pouze to, kolik neznámých volíme za volné neznámé, ale ne, které neznámé to jsou. V našem příkladě jsme za volné neznámé mohli volit kteroukoli dvojici z neznámých x_1, x_2, x_3, x_4. Může se však stát, že některou neznámou nesmíme volit za volnou neznámou a naopak, některou neznámou musíme volit za volnou neznámou. Například v následující soustavě za jednu volnou neznámou musíme zvolit x_2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Shrnutí

Matice soustavy je matice sestavená z koeficientů dané soustavy lineárních rovnic.
Rozšířená matice soustavy je matice, kterou dostaneme z matice soustavy přidáním sloupce absolutních členů.
Ekvivalentní soustavy jsou soustavy, které mají stejné množiny řešení.
Ekvivalentní úprava je úprava, kterou převedeme soustavu na soustavu s ní ekvivalentní.
Gaussova eliminační metoda spočívá v převedení rozšířené matice dané soustavy elementárními řádkovými úpravami na schodovitý tvar.

Pojmy k zapamatování

- soustava k lineárních rovnic o n neznámých
- řešení soustavy
- matice soustavy
- rozšířená matice soustavy
- ekvivalentní soustavy
- ekvivalentní úpravy
- Gaussova eliminační metoda

Kontrolní otázky

1. *Může mít soustava lineárních rovnic právě dvě řešení?*
2. *Soustavu rovnic dostaneme z původní soustavy záměnou první a druhé rovnice, kterou jsme vynásobili pěti. Co můžeme říci o řešeních těchto dvou soustav?*
3. *Jak poznáme při řešení soustavy Gaussovou eliminační metodou, že je soustava řešitelná?*

Cvičení

1. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

2. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_2 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

3. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 3x_2 - 3x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

4. Nalezněte všechna řešení soustay lineárních rovnic zadané rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 8 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

Úkoly k textu

1. Uveďte příklad dvou ekvivalentních soustav lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, které sestávají z různého počtu rovnic.
2. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých nad $\mathbb{Q}$, která má právě jedno řešení
3. Uveďte příklad čtyř lineárních rovnic o třech neznámých nad $\mathbb{R}$, která má právě jedno řešení.
4. Uveďte příklad řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 nad $\mathbb{Q}$ tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny za volné neznámé.
5. Uveďte příklad řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 nad $\mathbb{Q}$ tak, že neznámé x_2, x_4 nelze volit za volné neznámé.

Řešení

1. (2, 0, 1, -1)
2. nemá řešení
3. $(0, 1 + r, 1, r)$, $r \in \mathbb{R}$ libovolné
4. (1, 1, 0, 1)

9 Základní vlastnosti soustav lineárních rovnic

Studijní cíle: V této kapitole se studující seznámí s tím, jak lze podle hodnosti matice a podle hodnosti rozšířené matice soustavy rozhodnout o řešitelnosti dané soustavy. Dále se seznámí s metodou řešení soustavy, ve které je počet rovnic stejný jako počet neznámých.

Klíčová slova: Frobeniova věta, Cramerovo pravidlo

9.1 Frobeniova věta

Průvodce studiem

Mějme dánu soustavu k lineárních rovnic o n neznámých nad číselným tělesem T, to je soustavu

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n &= b_k, \end{aligned} \tag{9.1}$$

kde A je matice této soustvy a $\overline{A}$ je rozšířená matice této soustavy. Zajímáme se o hodnosti matic A a $\overline{A}$. Je zřejmé, že mohou nastat dva případy, buď je h($\overline{A}$) = h(A) nebo je h($\overline{A}$) = h(A) + 1. Případ h($\overline{A}$) = h(A) nastane právě tehdy, když sloupec absolutních členů je lineární kombinací sloupců matice A.

Uvedeme si nyní důležitou větu, která nám umožní rozhodnout o řešitelnosti či neřešitelnosti soustavy lineárních rovnic bez hledání tohoto řešení.

Věta 9.1 (Frobeniova). *Soustava lineárních rovnic nad číselným tělesem T je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice této soustavy.*

Důkaz. Uvažujeme soustavu (9.1), A je matice této soustavy a $\overline{A}$ rozšířená matice
„$\Rightarrow$“ nechť (9.1) je řešitelná soustava a $(t_1, t_2, ..., t_n)$ je řešení soustavy (9.1). To znamená, že platí

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot t_1 + a_{12} \cdot t_2 + ... + a_{1n} \cdot t_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot t_1 + a_{22} \cdot t_2 + ... + a_{2n} \cdot t_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1} \cdot t_1 + a_{k2} \cdot t_2 + ... + a_{kn} \cdot t_n &= b_k. \end{aligned}$$

Tento vztah můžeme zapsat ve tvaru

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + ... + t_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

To však znamená, že sloupec absolutních členů je lineární kombinací sloupců matice $A \Rightarrow$ h(A) = h($\overline{A}$).
„$\Leftarrow$“ Nechť h(A) = h($\overline{A}$) $\Rightarrow$ sloupec absolutních členů je lineární kombinací sloupců matice A. Označíme-li koeficienty této lineární kombinace $(t_1, t_2, ..., t_n) \Rightarrow (t_1, t_2, ..., t_n)$ je řešením soustavy (9.1) □

Průvodce studiem

Frobeniova věta je jednoduchým kriteriem řešitelnosti soustav lineárních rovnic, ale v případě řešitelné soustavy neříká nic o počtu řešení, jestli soustava má jediné řešení nebo nekonečně mnoho řešení. Podle hodností matic A a $\overline{A}$ se však dá rozhodnout i o počtu řešení. Dá se dokázat, že

1. soustava (9.1) má jediné řešení $\iff$ h(A) = h$(\overline{A})$ = n,
2. soustava (9.1) má nekonečně mnoho řešení $\iff$ h(A) = h$(\overline{A})$ $< n$

Příklad 9.2. V závislosti na parametru a rozhodněte o řešitelnosti a o počtu řešení (bez hledání těchto řešení) soustavy lineárních rovnic nad číselným tělesem $\mathbb{R}$, která je zadaná rozšířenou maticí soustavy

rozšířená matice soustavy

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení: Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami na schodovitý tvar

převod rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1+a & -a+1 & 0 \\ 0 & -1+a & 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & -a+1 & -a+1 & -a^2+1 & -a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1+a & 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+a & -a+1 & 0 \\ 0 & -a+1 & -a+1 & -a^2+1 & -a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1+a & 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+a & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -a+1 & -a^2-a+2 & -a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1+a & 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+a & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-2\,a+3 & -a+1 \end{array}\right).$$

Protože $-a^2 - 2\,a + 3 = -(a+3)(a-1)$, budeme diskutovat hodnoty parametru $a = -3$ a $a = 1$.

rozšířená matice ve schodovitém tvaru pro $a = -3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Je vidět, že v případě $a = -3$ je $\mathrm{h}(A) = 4 \neq \mathrm{h}(\overline{A}) = 5$ a soustava nemá řešení.

rozšířená matice ve schodovitém tvaru pro $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

V případě $a = 1$ je h(A) = h($\overline{A}$) = $1 < 4$ a soustava má nekonečně mnoho řešení.
Pokud je $a \neq -3 \wedge a \neq 1$, platí h(A) = h($\overline{A}$) = 4 a soustava má právě jedno řešení.

9.2 Cramerovo pravidlo

Průvodce studiem

Nyní se budeme zabývat speciálním případem soustavy (9.1), kdy rovnic je tolik, kolik je neznámých ($k = n$) a navíc matice soustavy je regulární.

Věta 9.3 (Cramerovo pravidlo). *Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy A je regulární. Pak soustava má jediné řešení $(x_1, x_2, ..., x_n)$, přičemž*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

kde A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením j-tého sloupce sloupcem absolutních členů.

Důkaz. Matice soustavy A je podle předpokladu regulární, existuje tedy matice k ní inverzní A^{-1}. Soustavu (9.1) můžeme maticově zapsat ve tvaru $A \cdot X = B$. Vynásobením zleva maticí A^{-1} dostaneme

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Snažíme se nyní toto řešení, které je jediné, vyjádřit. Víme, že

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij}. Když takto vyjádřenou matici A^{-1} dosadíme do vztahu $X = A^{-1} \cdot B$, dostaneme

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{1j} \cdot b_1 + A_{2j} \cdot b_2 + ... + A_{nj} \cdot b_n) =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\det A_j}{\det A}, j = 1, 2, ..., n.$$

□

Příklad 9.4. Danou soustavu lineárních rovnic řešte pomocí Cramerova pravidla (pokud je to možné)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Řešení: Nejdříve se přesvědčíme, že danou soustavu můžeme řešit pomocí Cramerova pravidla.

matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

determinat matice soustavy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Matice soustavy je regulární, můžeme tedy soustavu řešit Cramerovým pravidlem.
Vypočítáme nyní $\det A_1$, $\det A_2$, $\det A_3$

nahradíme 1.sloupec sloupcem absolutních členů

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

nahradíme 2.sloupec sloupcem absolutních členů

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2$$

nahradíme 3.sloupec sloupcem absolutních členů

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Nyní již můžeme vypočítat neznámé x_1, x_2, x_3

výpočet řešení x_1, x_2, x_3

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 3, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 1, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 2.$$

Řešením dané soustavy je tedy vektor $(3, 1, 2)$.

Průvodce studiem

Na našem příkladě jsme viděli, že pokud chceme vypočítat hodnotu všech neznámých soustavy tří rovnic o třech neznámých, musíme vypočítat čtyři determinanty třetího řádu. Pro větší soustavy je použití Cramerova pravidla numericky velmi náročné. Cramerovo pravidlo nám však umožňuje přímý výpočet jednotlivých neznámých, což může být výhodné v situacích, kdy nás zajímá pouze hodnota jedné neznámé.

Shrnutí

Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.
Soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení právě, když hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je rovna počtu neznámých.
Podud je matice soustavy regulární čtvercová matice, můžeme řešení počítat použitím Cramerova pravidla.

Pojmy k zapamatování

- Frobeniova věta
- Cramerovo pravidlo

Kontrolní otázky

1. *Může mít soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých (nad $\mathbb{R}$) právě jedno řešení?*
2. *Je dána soustava čtyř lineárních rovnic o třech neznámých (nad $\mathbb{R}$), jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.*
3. *Můžeme řešit soustavu čtyř lineárních rovnic o třech neznámých pomocí Cramerova pravidla?*

Cvičení

1. V závislosti na parametru a rozhodněte o řešitelnosti, případně o počtu řešení, bez hledání těchto řešení, soustavy lineárních rovnic, která je zadaná rozšířenou maticí soustavy (nad $\mathbb{R}$)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a^3 \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
2. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je daná soustava lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ řešitelná
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= a \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4 &= 7 \end{aligned}$$
3. Danou soustavu lineárních rovnic řešte použitím Cramerova pravidla (pokud je to možné).

   (a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 10 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 &= 29 \\ -4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Úkoly k textu

1. Uveďte příklad řešitelné soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých (nad $\mathbb{R}$), jejíž matice soustavy je singulární.
2. Uveďte příklad neřešitelné soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých (nad $\mathbb{R}$), jejíž matice soustavy je singulární.
3. Uveďte příklad soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých nad $\mathbb{R}$, kterou nemůžeme řešit použitím Cramerova pravidla.

Řešení

1. pro $a = -3$ nemá soustava řešení, pro $a = 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení, pro $a \neq -3 \wedge a \neq 1$ má soustava právě jedno řešení
2. pro $a = \frac{1}{4}$
3. a) $(3, -4, -5)$, b) nemůžeme řešit použitím Cramerova pravidla

10 Homogenní soustavy lineárních rovnic

Studijní cíle: V této kapitole se studující seznámí s homogenními soustavami lineárních rovnic, obecným řešením a fundamentálním systémem řešení homogenních soustav lineárních rovnic a vztahem mezi řešeními homogenní a nehomogenní soustavy s týmiž koeficienty

Klíčová slova: homogenní soustva lineárních rovnic, nulové řešení, fundamentální systém řešení, zhomogenizovaná soustava

Definice 10.1. Soustava

n neznámých, k rovnic

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n &= 0, \end{aligned} \tag{10.1}$$

kde $a_{ij} \in T$, $i = 1, 2, ..., k, j = 1, 2, ..., n$, se nazývá *homogenní soustava* k lineárních rovnic o n neznámých nad číselným tělesem T.

Poznámka 10.2. Matici soustavy (10.1) opět značíme A a rozšířenou matici soustavy (10.1) značíme $\overline{A}$. Rozšířená matice $\overline{A}$ vznikne z matice soustavy A přidáním sloupce, který se skládá ze samých nul, platí tedy vždy h(A) = h($\overline{A}$) a podle Frobeniovy věty je homogenní soustava vždy řešitelná.

Uspořádaná n-tice (0,0,...,0) je vždy řešením homogenní soustavy (10.1). Toto řešení se nazývá *nulové řešení*. Homogenní soustava má tedy buď jediné řešení, a to řešení nulové, nebo má nekonečně mnoho řešení – nulové řešení a nenulová řešení.

Kritérium pro oba případy udává následující věta.

Věta 10.3. *Nechť (10.1) je homogenní soustava s maticí soustavy A. Potom*

1. *soustava (10.1) má pouze nulové řešení* $\iff \mathrm{h}(A) = n$,
2. *soustava (10.1) má i nenulová řešení* $\iff \mathrm{h}(A) < n$.

Důkaz. Obě tvrzení plynou z předchozích úvah. □

Průvodce studiem

V případě, kdy počet rovnic je roven počtu neznámých ($k = n$) má homogenní soustava pouze nulové řešení právě tehdy, když det $A \neq 0$ a má i nenulová řešení právě tehdy, když det A = 0.

Poznámka 10.4. Již dříve jsme si řekli, že řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých nad číselným tělesem T můžeme považovat za vektor z vektorového prostoru T^n. Množina W všech řešení této soustavy je potom podmnožinou vektorového prostoru T^n. V případě nehomogenní soustavy není nikdy podprostorem vektorového prostoru T^n, protože neobsahuje nulový vektor. Nulový vektor nikdy nemůže být řešením nehomogenní soustavy.

V případě homogenní soustavy množina řešení W vždy nulový vektor obsahuje a je podprostorem vektorového prostoru T^n, jak ukazuje následující věta.

Věta 10.5. *Množina W všech řešení homogenní soustavy (10.1) je podprostorem ve vektorovém prostoru T^n a platí*

dimenze podprostoru řešení dané homogenní soustavy je rovna počtu volných neznámých v této soustavě

$$\dim W = n - h(A).$$

Důkaz. V literatuře [Hor91] □

Definice 10.6. Báze podprostoru W prostoru T^n všech řešení homogenní soustavy (10.1) se nazývá *fundamentální systém řešení soustavy* (10.1).

Průvodce studiem

Při řešení homogenní soustavy lineárních rovnic hledáme obecné řešení dané soustavy, tedy množinu všech řešení dané soustavy, a fundamentální systém řešení dané soustavy. Pro určení fundamentálního systému řešení dané soustavy je nutné podle definice najít bázi podprostoru řešení dané soustavy.
Při praktickém hledání báze podprostoru řešení W je nejvýhodnější postupovat tak, že

1. obecně vyjádříme řešení dané soustavy,
2. $(n-r)$ volných neznámých zvolíme $(n-r)$ lineárně nezávislými způsoby a spočítáme vektory báze podprostoru W.

Je zřejmé, že bází W je nekonečně mnoho.

Příklad 10.7. Nalezněte dva fundamentální systémy řešení homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

homogenní soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0\\ 6x_1 - x_2 - 7x_3 - 4x_4 &= 0\\ 6x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení: Hledáme nejdříve obecné řešení dané soustavy.

matice dané soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4\\ -2 & 1 & 3 & 4\\ 6 & -1 & -7 & -4\\ 6 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Matici převedeme na schodovitý tvar

převedení matice soustavy na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 8\\ 0 & -4 & -4 & -16\\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenze podprostoru řešení W dané soustavy je dim W = 2. Za dvě volné neznámé tedy můžeme zvolit parametry. Zvolíme $x_3 = r, x_4 = s$ a vypočítáme

výpočet obecného řešení

$$x_2 = \frac{1}{2}(-2x_3 - 8x_4) = -r - 4s,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 + x_3 - 4x_4) = \frac{1}{2}(r + 4s + r - 4s) = r.$$

Obecné řešení dané soustavy je vektor *obecné řešení*

$$(r, -r-4s, r, s), \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Když zvolíme $r = 1$, $s = 0$ a $r = 0$, $s = 1$, dostaneme jeden fundamentální systém řešení *1.fundamentální systém řešení*

$$(1, -1, 1, 0), \quad (0, -4, 0, 1)$$

Když zvolíme $r = 0, s = 1$ a $r = 1, s = 1$, dostaneme druhý fundamentální systém řešení *2.fundamentální systém řešení*

$$(0, -4, 0, 1), \quad (1, -5, 1, 1)$$

Nyní se vrátíme k obecným soustavám lineárních rovnic nad číselným tělesem T a řekneme si něco více o množině řešení takové soustavy.

Definice 10.8. Nechť je dána soustava lineárních rovnic nad číselným tělesem T *nehomogenní soustava*

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\;\;......... \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Pak homogenní soustava lineárních rovnic s týmiž koeficienty u neznámých, tj. *homogenní soustava*

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= 0 \\ &\;\;......... \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n &= 0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

se nazývá *zhomogenizovaná soustava* k soustavě (10.2).

Věta 10.9. *Nechť je dána soustava lineárních rovnic (10.2). Pak platí*

1. *součet libovolného řešení soustavy (10.2) s libovolným řešením k ní zhomogenizované soustavy je řešením soustavy (10.2),*
2. *rozdíl libovolných dvou řešení soustavy (10.2) je řešením k ní zhomogenizované soustavy.*

Důkaz. 1. Nechť $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ je řešením soustavy (10.2). To znamená, že platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., k.$$

Nechť $v = (v_1, v_2, ..., v_k)$ je řešením soustavy (10.3). To znamená, že platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_j = 0, \qquad i = 1, 2, ..., k.$$

Potom pro $u + v$ = $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (u_j + v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_j = b_i + 0 = b_i, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

To znamená, že $u + v$ je řešením soustavy (10.2).

2. Nechť $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ jsou dvě řešení soustavy (10.2). To znamená, že platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j = b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Potom pro $u - w = (u_1 - w_1, u_2 - w_2, ..., u_n - w_n)$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (u_j - w_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j = b_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, ...k.$$

$u - w$ je tedy řešením zhomogenizované soustavy (10.3).

□

Věta 10.10. *Nechť (10.2) je řešitelná soustava lineárních rovnic. Pak všechna řešení soustavy (10.2) obdržíme přičtením všech řešení zhomogenizované soustavy (10.3) k jednomu pevnému řešení soustavy (10.2).*

Důkaz. Označme M množinu všech řešení soustavy (10.2). Podle předpokladu je $M \neq \emptyset$. Nechť je $u_0 \in M$ pevné řešení soustavy (10.2). Označme

$$\overline{M} = \{u_0 + v |\ \text{v je pevné řešení soustavy (10.3)}\}.$$

Dokážeme, že $M = \overline{M}$.
„$\subseteq$“ Nechť $u \in M$ je libovolné řešení soustavy (10.2) $\Rightarrow$ $u - u_0$ je řešením soustavy (10.3) $\Rightarrow u = u_0 + (u - u_0) \in \overline{M}$.
„$\supseteq$“ Plyne z 1.části předchozí věty. □

Příklad 10.11. Rozhodněte, zda vektor $u = (2, 3, 1, -1, 0)$ je řešením soustavy lineárních rovnic

daná nehomogenní soustava

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 &= 12 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 &= -10 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 34 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 22. \end{aligned}$$

Pokud ano, pak pomocí vektoru u vyjádřete všechna řešení x této soustavy.

Řešení: Přesvědčíme se nejdříve, že vektor u je řešením dané soustavy.

matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b = (12, -10, 34, 22)$

vektor absolutních členů

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 34 \\ 22 \end{pmatrix} = b$$

vektor u je řešením dané soustavy

příslušná zhomogenizovaná soustava

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu nyní vyřešíme.

převedeme matici soustavy na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obecné řešení zhomogenizované soustavy

$$(-6r - 2s + 7t, 2r + s - 3t, r, s, t)$$

Fundamentální systém řešení zhomogenizované soustavy jsou např. vektory

fundamentální systém řešení zhomogenizované soustavy

$$(-6, 2, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (7, -3, 0, 0, 1)$$

Řešení dané soustavy tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

řešení dané soustavy

$$x = u + r \cdot (-6, 2, 1, 0, 0) + s \cdot (-2, 1, 0, 1, 0) + t \cdot (7, -3, 0, 0, 1).$$

Shrnutí

Homogenní soustava lineárních rovnic je soustava s nulovým vektorem absolutních členů.
Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná.
Nulový vektor je řešením každé homogenní soustavy lineárních rovnic.
Dimenze podprostoru řešení dané homogenní soustavy je rovna počtu volných neznámých v této soustavě.
Fundamentální systém řešení homogenní soustavy je báze podprostoru řešení této soustavy.
Zhomogenizovaná soustava k dané soustavě lineárních rovnic je homogenní soustava, která má stejné koeficienty jako daná soustava.

Pojmy k zapamatování

- homogenní soustava lineárních rovnic
- nulové řešení
- obecné řešení homogenní soustavy
- fundamentální systém řešení homogenní soustavy
- zhomogenizovaná soustava k dané soustavě

Kontrolní otázky

1. *Je možné, aby podprostor řešení homogenní soustavy dvou lineárních rovnic o pěti neznámých (nad $\mathbb{Q}$) měl dimenzi 2?*
2. *Je možné, aby podprostor řešení homogenní soustavy třech lineárních rovnic o čtyřech neznámých (nad $\mathbb{Q}$) neměl žádnou bázi?*
3. *Nechť W je podprostor řešení homogenní soustavy čtyř lineárních rovnic o šesti neznámých (nad $\mathbb{R}$). Udejte, jakých všech hodnot může nabývat* $\dim W$.

Cvičení

1. Nalezněte obecné řešení a fundamentální systém řešení zadané homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2. Nalezněte obecné řešení a fundamentální systém řešení zadané homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. V závislosti na parametru a řešte homogenní soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - a \cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. Rozhodněte, zda vektor u = (1,-1,1,1) je řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= -2 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 4. \end{aligned}$$

   Pokud ano, pak pomocí vektoru u vyjádřete všechna řešení x této soustavy.

Úkoly k textu

1. Udejte příklad homogenní soustavy tří lineárních rovnic o pěti neznámých (nad $\mathbb{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 4.

2. Udejte příklad homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ tak, aby bází jejího podprostoru řešení byl vektor (1,1,1,1)

3. Udejte příklad homogenní soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých (nad $\mathbb{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

4. Udejte příklad homogenní soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 nad $\mathbb{R}$ tak, že za volné neznámé nutno volit právě neznámé x_2, x_3

Řešení

1. obecné řešení: $(-3r, r, -r, 2r)$, $r \in \mathbb{R}$,
   fundamentální systém řešení: např. vektor $(-3, 1, -1, 2)$
2. obecné řešení: $(-2s, -r + 2s, -r + 2s, r, s)$, $r, s \in \mathbb{R}$,
   fundamentální systém řešení: $(0, -1, -1, 1, 0)$, $(-2, 2, 2, 0, 1)$
3. pro $a \neq 16$ soustava má pouze nulové řešení, pro $a = 16$ má řešení $(2r, -2r, -4r, r)$
4. ano, $x = u + r \cdot (-1, 1, 1, 0) + s \cdot (2, -1, 0, 1)$, $r, s \in \mathbb{R}$

Reference

[Bec05] Bečvář J.: *Lineární algebra*. matfyzpress, Praha, 2005

[Bic00] Bican L.: *Lineární algebra a geometrie*. Academia, Praha, 2000

[EmKu07] Emanovský P., Kühr J.: *Cvičení z algebry pro 1.ročník I*. Universita Palackého, Olomouc, 2007

[GaTa88] Garding L.,Tambour T.: *Algebra for computer science*. Springer, New York, 1988

[Hor91] Horák P.: *Algebra a teoretická aritmetika*. Masarykova univerzita, Brno, 1991

[Hor06] Horák P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky*. Masarykova univerzita, Brno, 2006

[HoRa03] Hort D., Rachůnek J.: *Algebra I*. Universita Palackého, Olomouc, 2003

[Chaj03] Chajda I.: *Okruhy a moduly*. Universita Palackého, Olomouc, 2003

[Chaj05] Chajda I.: *Úvod do algebry (grupoidy a grupy)*. Universita Palackého, Olomouc, 2005

[MoZa02] Motl L.,Zahradník M.: *Pěstujeme lineární algebru*. Universita Karlova, Praha, 2002

[Rach05] Rachůnek J.: *Grupy a okruhy*. Universita Palackého, Olomouc, 2005

[SzMo02] Szidarovszky F., Molnár S.: *Introduction to Matrix Theory with Applications to Business and Economics*. World Scientific, New Jersey, 2002