

KATEDRA INFORMATIKY  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
UNIVERZITA PALACKÉHO

## PETRIHO SÍŤ

MONIKA KOCHANÍČKOVÁ



VÝVOJ TOHOTO UČEBNÍHO TEXTU JE SPOLUFINANCOVÁN  
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDĚM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Olomouc 2008



## **Abstrakt**

Učební text postupně seznamuje čtenáře se základními typy Petriho sítí a metodami analýzy jejich vlastností. Petriho sítě jsou zde prezentovány jako grafický a matematický nástroj pro modelování a návrh systémů s paralelními procesy a hierarchickou strukturou. Důraz je kladen na rozvoj schopnosti přecházet od výchozího neformálního slovního popisu systému k jeho formálně přesné a přitom názorné (grafické, síťové) reprezentaci s teoreticky zabezpečenou bezesporností a úplností. Text je doplněn ilustrativními příklady z oblasti zpracování dat, paralelního programování, distribuovaných databází a řízení procesů výrobních systémů. Text nemůže nahradit rozsáhlé monografie, ale měl by usnadnit orientaci při detailnějším studiu.

## **Cílová skupina**

Text je primárně určen pro posluchače magisterského studijního programu Informatika na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Může však sloužit komukoliv se zájmem o danou problematiku. Text předpokládá znalosti logiky 1. řádu, teorie grafů, teorie jazyků a automatů.



## Obsah

1	Úvod do Petriho sítí.....	7
1.1	Modelování a simulace .....	7
1.2	Historie Petriho sítí .....	8
1.3	Struktura a dynamika Petriho sítě.....	9
1.4	Typy Petriho sítí.....	10
1.5	Výhody Petriho sítí .....	12
2	P/T Petriho sítě.....	14
2.1	Struktura P/T sítí.....	14
2.2	Dynamika P/T sítí .....	16
2.3	Vlastnosti a stavová analýza P/T sítí.....	25
2.4	Strukturní analýza P/T sítí .....	35
2.4.1	Algebraické metody strukturní analýzy.....	35
2.4.2	Využití invariantů při analýze P/T sítí.....	46
2.4.3	Grafové techniky strukturní analýzy .....	50
2.5	Podtřídy Petriho sítí .....	54
3	Jazyky Petriho sítí .....	57
3.1	Petriho síť a konečný automat .....	57
3.2	Chomského hierarchie .....	59
	Seznam literatury.....	66
	Seznam obrázků .....	67
	Rejstřík.....	69



# 1 Úvod do Petriho sítí

Petriho sítě patří k významným nástrojům pro modelování paralelních systémů a systémů s diskretním časem. Díky své schopnosti snadno a srozumitelně vyjádřit paralelismus, synchronizaci a kauzalitu událostí jsou vhodným modelem systémů, jakými jsou komunikační protokoly, počítačové sítě či databázové systémy.

**Studijní cíle:** V této kapitole se budeme věnovat základním pojmům z oblasti modelování systémů, a dále si neformálně popíšeme strukturu Petriho sítě, uvedeme základní typy sítí a zmíníme se o výhodách použití těchto sítí při modelování systémů.

**Klíčová slova:** Model systému, modelování, simulace, Petriho síť.

**Potřebný čas:** 60 minut

## 1.1 Modelování a simulace

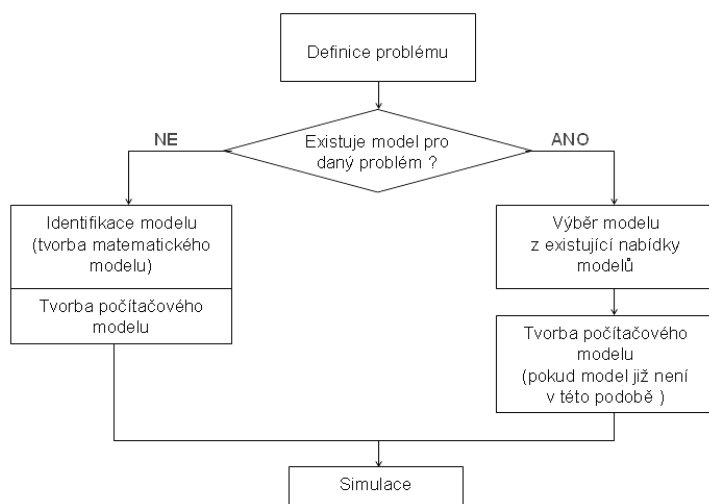
*Modelování* je využíváno především pro získávání nových poznatků o modelovaném systému. Studium založené na modelování a modelech umožňuje soustředit se na podstatné rysy systému s ohledem na cíl modelování a lépe pochopit studovaný systém. Modelování představuje proces výběru modelu, jeho sestavení, přetváření, hodnocení a přechod od modelu zpět k reálné skutečnosti. Jedná se o specifickou formu experimentu, který umožňuje poznávat objektivní zákonitosti sledovaného systému.

*Modelování*

Oblast modelování je úzce spjata se simulací. *Simulace* je provádění experimentů s modelem za účelem lepšího pochopení chování studovaného systému či za účelem posouzení různých variant činnosti systému.

*Model* je systém, který více či méně zjednodušeně napodobuje určitý reálný systém, jeho chování, fyzikální a chemické vlastnosti, geometrii, statické a dynamické vlastnosti atd. Poznátky získané při práci s modelem jsou posléze použity jako hypotézy o chování výchozího (originálního) reálného systému.

*Model*



Obrázek 1.1: Proces modelování

Kvalitu navrženého modelu daného systému lze posoudit podle různých hledisek:

*Kvalita modelu*

- *Ověření (verifikace)* představuje proces kvalitativního hodnocení správnosti modelu. Ověřuje se, zda model přijatelně zobrazuje systém, jak z hlediska struktury, tak z hlediska chování.
- *Proměnlivost (variabilita)* vyjadřuje možnost přizpůsobení modelu změnám různých činitelů, zejména v souvislosti s požadavky strategie simulačního postupu.
- *Přizpůsobivost (adaptibilita)* je schopnost modelu pracovat jako podsystém s jiným modelovým podsystémem.
- *Věrohodnost (validita)* představuje kvalitativní stupeň souhlasu chování modelu a zkoumaného systému. Model je věrohodný, jestliže při všech uvažovaných podmínkách zkoumání jeho chování souhlasí v přípustných mezích s chováním originálu. Jde o poměrně subjektivní hodnocení a nikoli o přesnou prověrku hypotéz.
- *Platnost (valence)* vyjadřuje obor uplatnění modelu, v němž lze považovat model za věrohodný.

Důležitou charakteristikou je *časová a finanční náročnost*. Náklady se obvykle vyjadřují v závislosti na požadované přesnosti modelování nebo na složitosti úlohy.

Význam modelování a simulace spočívá v možnosti studovat charakter modelovaného systému (originálu) nepřímo, pomocí modelu. Poznatky získané na modelu se pak stávají hypotézami o vlastnostech systému. Neméně významná je i možnost experimentování s vytvořeným modelem. Experimentování s reálným systémem totiž často není možné, a to z následujících důvodů:

- riziko zničení originálního systému,
- vysoké náklady pro experimentování na originálu,
- s některými originálními systémy nelze vůbec experimentovat.

Počítačové modelování a simulace přináší možnost mnohonásobných experimentů, model tedy lze průběžně optimalizovat. Díky modelu můžeme předvídat budoucí chování systému. Využitím časové transformace je možné určitý děj oproti originálu zrychlit, nebo zpomalit (např. zrychlit proces eroze).

*Význam  
modelování*

## 1.2 Historie Petriho sítí

Petriho sítěmi [12, 14] je označována rozsáhlá třída matematických modelů, které umožňují specifickými prostředky popisovat řídicí toky a informační závislosti uvnitř modelovaných systémů. Jejich historie se datuje od 60. let minulého století, kdy německý matematik C. A. Petri zavedl ve své disertační práci [13] nové koncepty popisu vzájemné závislosti mezi událostmi a podmínkami modelovaného systému. Tyto koncepty vyšly z dekompozice systému na podsystémy popisované konečnými automaty, jež pracují autonomně, avšak jejich činnost může být v potřebné míře vzájemně koordinována.

Pojem Petriho sítí (PN) byl postupně obohacován a zobecňován tak, aby jeho modelovací schopnost vyhověla praktickým potřebám, ukázalo se totiž, že narážejí na dva závažné nedostatky. Prvním problémem byl chybějící datový koncept. Modely byly velmi velké, protože všechny operace s daty musely být prováděny přímo na struktuře sítě. Druhým nedostatkem byl jednoúrovňový způsob navrhování a modelování systému. Chyběl hierarchický koncept. Nebylo možné postavit velký model pomocí několika menších modelů s přesně definovaným rozhraním.

V 80. letech začal vývoj *Petriho sítí vyšší úrovně* (angl. high-level Petri nets) [10], odstraňující výše zmíněné nedostatky. Výsledkem vývoje byly *barevné Petriho sítě* zavedené K. Jensenem [9], které umožňují stručnější zápis modelů. Původní koncept černých tokenů nahrazují tokeny různých barev, což v podstatě znamená zavedení typů do Petriho sítí. Jensen rozšiřuje Petriho



sítě i o další prvky jako jsou proměnné, deklarace typů, inskripční výrazy hran, stráže a akce přechodů.

Aby bylo možné pomocí Petriho sítí vytvářet rozsáhlé modely, bylo nutné zavést do Petriho sítí hierarchický způsob návrhu systémů, který se vyznačuje rysy jako rozdělení systému do dobře definovaných komponent, možnost skrytí vnitřní struktury komponent při práci s komponentami jako celkem, možnost návrhu systému metodou „shora dolů“ i „zdola nahoru“, možnost vícenásobného použití komponent při návrhu systému, paralelní práce při návrhu a snadná údržba systému. Takto vznikla *hierarchická Petriho síť* (Hierarchical Petri net), která je částečně uspořádanou množinou nehierarchických Petriho sítí, tzv. stránek. V tomto uspořádání je stránka A pod stránkou B, jestliže síť na stránce A rozvíjí některý prvek ze stránky B.

Petriho sítě se tak dostaly do popředí zájmu v souvislosti s aplikacemi pro modelování a teoretické zkoumání distribuovaných a paralelních systémů, jako jsou komunikační protokoly [3], počítačové sítě či databázové systémy. Díky své schopnosti snadno a srozumitelně vyjádřit asynchronnost, paralelismus, synchronizaci a kauzalitu událostí jsou vhodným modelem těchto typů systémů. V současné době jsou Petriho sítě předmětem zájmu široké vědecké komunity [5, 6, 7, 15].

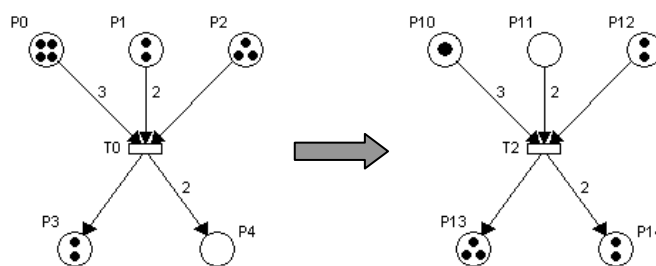
### 1.3 Struktura a dynamika Petriho sítě

Petriho sítě vznikly rozšířením modelovacích schopností konečných automatů [8]. Základními elementy Petriho sítě jsou *místa*, která představují podmínku, a *přechody*, které reprezentují nějakou událost. Místa (places) jsou graficky zobrazována kružnicemi a přechody (transitions) úsečkami nebo obdélníky. Počty míst i přechodů jsou konečné a s výjimkou degenerovaných případů také nenulové. Místa a přechody jsou vzájemně propojeny *orientovanými hranami* (arcs). Hrana spojuje buď místo s přechodem nebo přechod s místem, nikdy však místo s místem nebo přechod s přechodem. Jinými slovy je Petriho síť bipartitním orientovaným grafem se dvěma typy uzlů: místy a přechody.

*Místa a přechody*

Okamžitý stav systému je definován umístěním *značek - tokenů* (tokens) v místech, což je v grafu Petriho sítě vyjádřeno příslušným počtem teček v místech. Přítomnost tokenu v místě modeluje skutečnost, že daný stav systému je momentálně aktuální. Petriho sítě, s nimiž budeme dále pracovat, umožňují výskyt libovolného počtu tokenů v místech.

Každý přechod má definovanou množinu vstupních a výstupních míst. Vstupní a výstupní podmínky přechodu určují počty odebíraných a umísťovaných tokenů, což je v grafu Petriho sítě specifikováno ohodnocením orientovaných hran. Hrana, která není v grafu sítě explicitně ohodnocena, má implicitně váhu 1. Přechod může být proveden v případě, že má splněny všechny vstupní podmínky, tj. všechna jeho vstupní místa obsahují příslušné počty tokenů. Na následujícím obrázku je vidět provedení přechodu, kdy se v závislosti na ohodnocení orientovaných hran odstraní tokeny ze vstupních míst a umístí se nové tokeny do výstupních míst.



Obrázek 1.2: Změna stavu po provedení přechodu

## 1.4 Typy Petriho sítě

Pojem Petriho sítě byl postupně obohacován a zobecnován tak, aby jeho modelovací schopnost vyhověla praktickým potřebám. Pokusíme se zde neformálně představit několik základních typů Petriho sítě a na příkladech vysvětlit, jak fungují a k čemu mohou sloužit. Postupovat budeme od jednoduchého k složitějšímu typu sítě.

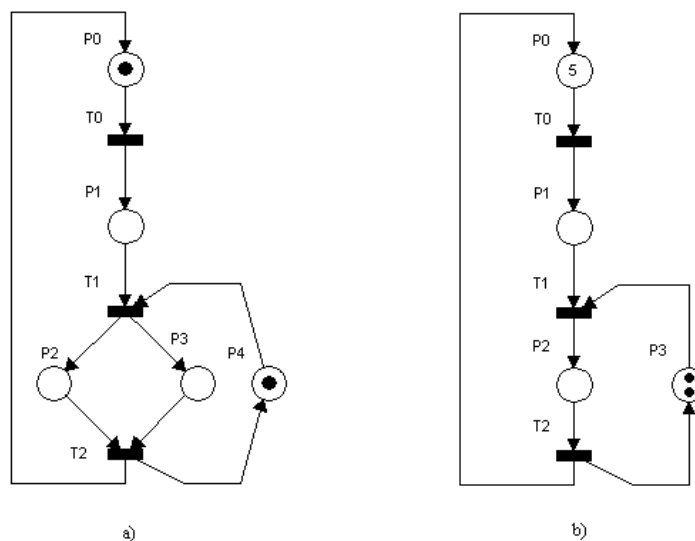
*C/E Petriho síť* (Condition/Event Petri Net) je z hlediska vyjadřovací síly nejslabší. Odpovídá vyjadřovací síle konečných automatů. Každé místo může obsahovat nejvýše jeden token.

*P/T Petriho síť* (Place/Transitions Petri Net) umožňuje do každého místa umístit více než jeden token.

### Příklad 1.1.

Následující obrázek jsou zobrazeny 2 modely Petriho sítě – C/E Petriho síť a P/T Petriho síť. Význam jednotlivých míst a přechodů v případě C/E Petriho sítě může být následující: místo P0 může reprezentovat stav systému, kdy proces (token v P0, nepotřebuje přístup ke zdroji, nacházejícímu se v místě P4. Pokud procesu vznikne požadavek na přidělení zdroje (T0), přejde token do P1, systém je ve stavu, kdy proces čeká na přidělení zdroje. Je-li token v místě P2, odpovídá to situaci, kdy proces využívá zdroj. Je-li token v P3, znamená to, že zdroj je využíván procesem. Token v místě P4 představuje situaci, kdy zdroj není využíván. Přechod T1 reprezentuje počátek využívání zdroje a přechod T2 ukončení využívání zdroje.

Obdobný význam mohou mít i místa a přechody v uvedené P/T síti s tím rozdílem, že v jednotlivých místech sítě může být více než jeden token. V tomto případě 5 procesů čas od času sdílí dva zdroje.

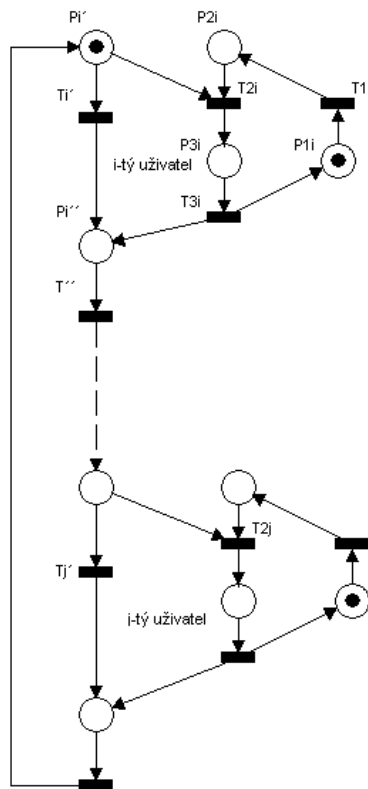


Obrázek 1.3: Příklad jednoduché C/E Petriho sítě a P/T Petriho sítě

Další typy Petriho sítě vznikly rozšířením P/T sítě:

- *Petriho síť s inhibičními hranami* (Petri Nets with Inhibitors) - zavedení inhibičních hran zvýšilo vyjadřovací sílu Petriho sítě na úroveň Turingova stroje.
- *Petriho síť s prioritami* (Petri Nets with Priorities) – ke každému přechodu je navíc přiřazeno celé nezáporné číslo udávající tzv. prioritu přechodu. Příklad sítě je možno vidět na obrázku 1.4. Jedná se o model komunikace v kruhové počítačové síti, kde právo ovládat komunikaci v síti je cyklicky nabízeno každému terminálu sítě. Má-li terminál právo k odeslání, pak zprávu odešle, jinak předá právo ovládnutí dalšímu.

- *Časované Petriho sítě* (Timed Petri Nets) - obohatily aparát Petriho sítí o pojem času a možnost modelovat děje spotřebovávající více či méně času. Tímto obohacením se významně rozšiřují modelovací možnosti Petriho sítí. Trvání dějů můžeme charakterizovat buď deterministicky (konstantní doba trvání), stochasticky (náhodná doba trvání) nebo kombinovaným způsobem (doby trvání pro některé přechody jsou konstanty a pro jiné náhodné veličiny).



Obrázek 1.4: Příklad PN sítě s prioritami

- *Barevné Petriho sítě* (Coloured Petri Nets) – v těchto sítích existují různé typy tokenů. V rámci daného typu mohou tokeny nabývat různých hodnot (barev). Pro zpracování tokenů různých barev jsou Petriho sítě rozšířeny o další prvky jako proměnné, deklarace typů, inskripční výrazy hran či stráže a akce přechodů. V místech se mohou nacházet multimnožiny tokenů různých barev, ale vždy jen jediného typu, který je danému místu přiřazen. Přechody mohou být ohodnoceny podmínkami, bez jejichž splnění není možné provedení přechodu. Hrany jsou ohodnoceny multimnožinami tokenů, jejichž barvy patří do množiny barev přiřazené místu, které je s danou hranou incidentní.
- *Hierarchické Petriho sítě* (Hierarchical Petri Nets) – zavedly do Petriho sítě možnost hierarchického strukturování. Hierarchická Petriho síť představuje částečně uspořádanou množinu nehierarchických Petriho sítí, tzv. stránek (pages). Nehierarchické Petriho sítě mohou být C/E, P/T, síť s inhibitory, s prioritami či barevné. Při tomto rozvíjení prvků sítě lze použít tzv. hierarchizační konstrukty (hierarchy constructs) jakými jsou substituce míst, substituce přechodů, volání přechodů (invocation of transitions), slučování míst (fusion of places) a slučování přechodů.
- *Objektové Petriho sítě* (Object-Oriented Petri Nets) - rozšiřují Petriho sítě o koncept objektové orientace. Struktura těchto sítí je opět tvořena místy a přechody, propojených hranami, které vyjadřují vstupní a výstupní podmínky přechodů. Místo sítě může obsahovat tokeny, přičemž token může reprezentovat primitivní objekt (číslo, symbol, řetězec apod.),

jméno objektu (neprimitivního uživatelem definovaného), jméno třídy nebo n-tici z nich složenou. Hrany jsou ohodnoceny hranovými výrazy, které po navázání proměnných reprezentují multimnožiny prvků univerza. Přejít obsahuje *stráž* a *akci*. Stráž je tvořena výrazy a je splněna právě tehdy, když jsou všechny tyto výrazy vyhodnoceny jako true. Akce je zaslání zprávy s možností přiřadit výsledek do proměnné. Zaslání zprávy v akci přechodu se interpretuje za běhu podle typu adresáta a selektoru zprávy buď jako primitivní zaslání zprávy, nebo jako vytvoření nového neprimitivního objektu, nebo jako žádost o provedení operace objektu s čekáním na výsledek.

## 1.5 Výhody Petriho sítí

Petriho síť je univerzální grafický a matematický nástroj pro návrh, modelování a formální analýzu dynamických systémů. Výhody použití Petriho sítí jsou nesporné:

- PN jsou bipartitními orientovanými grafy, kde uzly reprezentují stavy a akce, zatímco hrany popisují, jakým způsobem může systém přejít z jednoho stavu do druhého provedením určité akce. Díky této grafické reprezentaci jsou srozumitelné i člověku, který není obeznámen s detaily teorie Petriho sítí.
- PN jsou dostatečně obecné a mohou být použity pro popis velkého množství rozličných systémů.
- Petriho síť mají dobře definovanou sémantiku, která definuje chování každé PN.
- Je možné implementovat simulátory chování PN a formulovat metody formální analýzy.
- Umožňují explicitní popis jak stavů, tak akcí, což je v kontrastu s většinou ostatních jazyků pro popis systémů, které popisují jen stavy nebo jen akce a nikoli obojí.
- Nabízejí možnost hierarchického popisu, tzn. možnost konstruovat rozsáhlé PN modely pomocí menších PN modelů.
- Při menších modifikacích modelovaného systému nemusíme měnit kompletně strukturu PN modelu.
- Nabízejí interaktivní simulaci, kde výsledky jsou prezentovány přímo v PN diagramu.
- Graf, kterým je Petriho síť popsána, dovoluje poměrně snadné vyjádření jevů, jakými jsou synchronizace, vzájemné vyloučení, paralelní výpočty.
- V současné době existuje celá škála typů Petriho sítí s různou vyjadřovací silou a modelovacími schopnostmi. Zmíněné typy vždy nějakou svou vlastností rozšiřují základní matematický model Petriho sítě.

S rostoucí oblibou Petriho sítí se začala objevovat aplikačně specifická rozšíření Petriho sítí, jako je zavedení času v časovaných Petriho sítích, pravděpodobnosti ve stochastických PN [1, 2, 11], řídicích signálů v signálových Petriho sítích nebo objektové orientace v objektově orientovaných PN.

### Shrnutí

Pojem modelování označuje proces tvorby modelu. Model je zjednodušením reálného systému. Simulace je provádění experimentů s modelem za účelem lepšího pochopení chování studovaného systému.

Petriho síť je bipartitní orientovaný graf se dvěma typy uzlů: místy a přechody. Místo je znázorněno kružnicí, přechod úsečkou nebo obdélníkem, vstupní funkce orientovanými hranami vedoucími z míst do přechodů. Místa a přechody jsou vzájemně propojeny orientovanými hranami.

Stav sítě je dán značením, tj. počtem tokenů v jednotlivých místech. Změny stavu nastávají v důsledku provádění přechodů. V daném stavu sítě jsou jen některé přechody proveditelné.

### Pojmy k zapamatování

- Modelování,
- model,
- simulace,
- kvalita modelu,
- struktura Petriho sítě.

### Kontrolní otázky

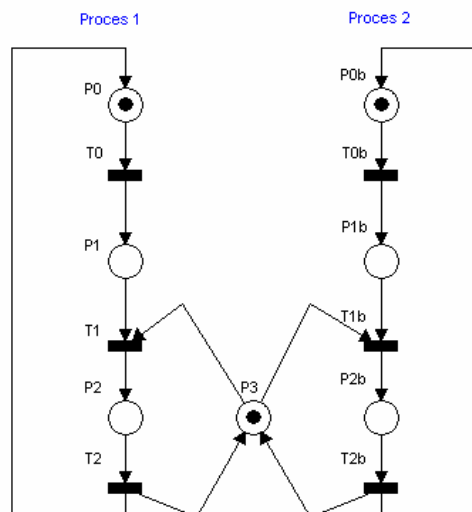
1. Jak se posuzuje kvalita modelu?
2. Čím je v Petriho síti určen okamžitý stav systému?
3. Jaké jsou výhody použití Petriho sítí pro modelování dynamických systémů?

### Cvičení

1. Navrhněte model C/E Petriho sítě umožňující využívání sdíleného zdroje dvěma procesy.

### Řešení

1. Model C/E PN, kdy dvěma procesy využívají jeden zdroj.



Obrázek 1.5: Model C/E Petriho sítě

## 2 P/T Petriho síť

V této kapitole budou formálně definovány P/T Petriho síť a jejich vlastnosti. Pojem P/T síť je zde zobecněn tak, že dovoluje používání inhibičních hran a neuvažuje kapacity míst, tj. v místech se mohou nacházet libovolné počty tokenů. Pokud v této kapitole hovoříme o Petriho sítích, máme tu vždy na mysli P/T síť s uvedeným zobecněním. První zobecnění je motivováno tím, že zavedení inhibičních hran podstatně rozšiřuje modelovací možnosti Petriho sítí. Druhé pak je motivováno tím, že užívání kapacitních omezení míst poněkud komplikují analýzu Petriho sítí a přitom nijak nerozšiřují jejich modelovací schopnost.

### 2.1 Struktura P/T sítí

**Studijní cíle:** Po prostudování této podkapitoly bude studující schopen formálně popsat strukturu a systém Petriho sítě.

**Klíčová slova:** Struktura Petriho sítě, systém Petriho sítě.

**Potřebný čas:** 30 minut

Statická struktura Petriho sítě bude popsána na třech úrovních abstrakce jako tzv.:

- struktura Petriho sítě,
- systém Petriho sítě,
- parametrizovaný systém Petriho sítí.

Bude-li z kontextu zřejmé, na jaké abstrakční úrovni se pohybujeme, pak budeme jednoduše hovořit o Petriho síti.

#### Definice 2.1.

*Struktura Petriho sítě* (PN-struktura) je pětice  $\langle P, T, I, O, H \rangle$ , kde

- $P$  je konečná množina míst,
- $T$  je konečná množina přechodů,  $T \cap P = \emptyset$ ,
- $I, O, H$  jsou zobrazení typu  $T \rightarrow P_{MS}$ , po řadě tzv. vstupní funkce, výstupní funkce a vstupní inhibiční funkce.

$P_{MS}$  je množina všech multimnožin nad množinou  $P$ .

*Struktura  
Petriho sítě*

#### Průvodce studiem

PN-strukturu zobrazujeme diagramem, ve kterém místa znázorňujeme kružnicemi, přechody úsečkami nebo obdélníky, vstupní funkce hranami mířícími do přechodů (přitom orientované hrany zobrazující vstupní inhibiční funkci jsou opatřeny malým kroužkem namísto šipkou) a výstupní funkce hranami mířícími z přechodů.

Často je uvažován speciální případ, kdy inhibiční funkce přiřazuje všem přechodům  $t \in T$  prázdnou multimnožinu z  $P_{MS}$ . V tomto případě není třeba inhibiční funkci  $H$  v definici struktury PN vůbec uvádět.

Dále se budeme používat označení uvedená v následující tabulce:

$I(t)$	multimnožina vstupních míst přechodu $t$
$O(t)$	multimnožina výstupních míst přechodu $t$
$H(t)$	multimnožina inhibičních míst přechodu $t$
$I(t,p)$	násobnost prvku $p$ v multimnožině $I(t)$ , násobnost hrany z místa $p$ do přechodu $t$
$O(t,p)$	násobnost prvku $p$ v multimnožině $O(t)$ , násobnost hrany z přechodu $t$ do místa $p$
$H(t,p)$	násobnost prvku $p$ v multimnožině $H(t)$ , násobnost inhibiční hrany z místa $p$ do přechodu $t$
$\cdot t$	množina vstupních míst přechodu $t$ , $\cdot t = \{p \in P: I(t,p) > 0\}$
$t^\bullet$	množina výstupních míst přechodu $t$ , $t^\bullet = \{p \in P: O(t,p) > 0\}$
$\circ t$	množina vstupních inhibičních míst přechodu $t$ , $\circ t = \{p \in P: H(t,p) > 0\}$
$\cdot p$	množina vstupních přechodů místa $p$ , $\cdot p = \{t \in T: O(t,p) > 0\}$
$p^\bullet$	množina výstupních přechodů místa $p$ , $p^\bullet = \{t \in T: I(t,p) > 0\}$

Množiny  $\cdot t$ ,  $t^\bullet$ ,  $\circ t$  a množiny  $\cdot p$ ,  $p^\bullet$  nemusí být nutně disjunktní. Na funkce  $I$ ,  $O$ ,  $H$  se lze též dívat jako na matice  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{H}$  typu  $|T| \times |P|$  s prvky  $I(t,p)$ ,  $O(t,p)$ ,  $H(t,p)$ .

### Definice 2.2.

*Systém Petriho sítě* (PN systém) je šestice  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$ , kde

*Systém Petriho sítě*

- $\langle P, T, I, O, H \rangle$  je struktura Petriho sítě,
- $M_0$  je zobrazení typu  $P \rightarrow \mathbb{N}$ , tzv. *počáteční značení*, kde  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  je množina přirozených čísel.

Zápisem  $M_0(p)$  rozumíme přirozené číslo přiřazené místu  $p$  a říkáme, že místo  $p$  obsahuje  $M_0(p)$  *tokenů*. Je-li počet tokenů přiřazený danému místu malý, zobrazujeme je tučnými tečkami uvnitř kružnice zobrazující dané místo. Je-li počet tokenů větší, vpisujeme do kružnice přímo číslo  $M_0(p)$ . Je-li speciálně  $M_0(p)=0$  pro všechna  $p \in P$ , pak PN systém představuje pouze PN strukturu. Obecně symbolem  $M$  označujeme jakékoliv zobrazení  $P \rightarrow \mathbb{N}$  a symbolem  $M(p)$  přirozené číslo přiřazené tímto zobrazením místu  $p \in P$ . Značení sítě lze také pojímat jako následující multimnožinu nad množinou míst:

$$\sum_{p \in P} M(p) \cdot p = M(p_1) \cdot p_1 + M(p_2) \cdot p_2 + \dots + M(p_{|P|}) \cdot p_{|P|}$$

### Definice 2.3.

*Parametrizovaný systém Petriho sítě* (parametrizovaný PN systém) je osmice  $\langle P, T, I, O, H, PAR, COND, MP \rangle$ , kde

*Parametrizovaný systém Petriho sítě*

- $\langle P, T, I, O, H \rangle$  je struktura Petriho sítě,
- $PAR$  je množina parametrů,
- $COND$  je množina podmínek omezujících obory, které mohou probíhat hodnoty parametrů,

- MP je zobrazení typu  $P \rightarrow N \cup \text{PAR}$ , tzv. počáteční parametrické značení, přiřazující každému místu buď přirozené číslo, nebo parametr, jehož hodnota probíhá nějakou podmnožinou množiny přirozených čísel (podmnožinu vymezenou predikáty z PRED).

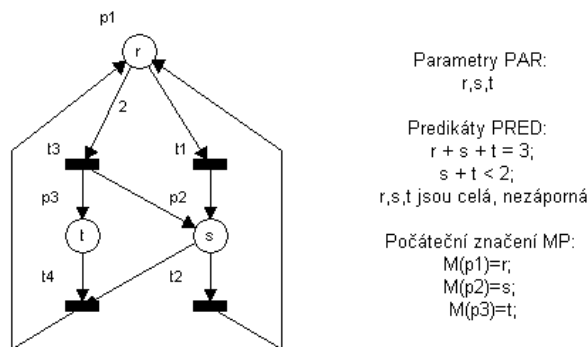
Je-li speciálně množina parametrů prázdná ( $\text{PAR} = \emptyset$ ), pak definování COND nemá smyslu a MP se redukuje na  $M_0$ . Parametrizovaný systém pak představuje pouhý systém Petriho sítě.

### Průvodce studiem

Parametrizovaný systém je vlastně třída systémů, jejichž počáteční značení vyhovuje daným podmínkám. Na strukturu Petriho sítě se pak můžeme dívat jako nejobecnější parametrizovaný systém s prázdnou množinou podmínek (všechna počáteční značení jsou možná).

### Příklad 2.1.

Na obrázku 2.1 je zobrazen jednoduchý parametrizovaný PN systém. Představuje třídu PN systémů s počátečními značeními:  $(3,0,0)$ ,  $(2,1,0)$ ,  $(2,0,1)$ . Odmyslíme-li si počáteční značení, dostáváme PN strukturu. V tabulce 2.1 jsou zobrazeny vstupní, výstupní a vstupní inhibiční funkce I, O, H ve tvaru matic  $I(t,p)$ ,  $O(t,p)$ ,  $H(t,p)$ . Z tabulek např. vyplývá:  $I(t_3) = 2 \cdot p_1$ ,  $O(t_3) = 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3$ ,  $H(t_4) = 1 \cdot p_2$ .



Obrázek 2.1: Parametrizovaný PN systém

I	P1	P2	P3	O	P1	P2	P3	H	P1	P2	P3
T1	1	0	0	T1	0	1	0	T1	0	0	0
T2	0	1	0	T2	1	0	0	T2	0	0	0
T3	2	0	0	T3	0	1	1	T3	0	0	0
T4	0	0	1	T4	1	0	0	T4	0	1	0

Tab.2.1: Vstupní, výstupní a vstupní inhibiční funkce

## 2.2 Dynamika P/T sítí

**Studijní cíle:** Definovat dynamiku Petriho sítí, tj. stanovit pravidla změny stavu sítě.

**Klíčová slova:** Provedení přechodu, množina dosažitelnosti, graf dosažitelnosti.



**Potřebný čas:** 45 minut.

Stav sítě je dán značením, tj. počtem tokenů v jednotlivých místech. Změny stavu nastávají v důsledku provádění přechodů. V daném stavu síť jsou jen některé přechody proveditelné. Dynamika Petriho sítě je tedy popsána dvěma pravidly:

- pravidlo stanovující podmínky proveditelnosti přechodu (enabling rule),
- pravidlo popisující změnu stavu sítě po provedení přechodu (firing rule).

**Definice 2.4.**

*Přechod t je proveditelný (enabled) při značení M, jestliže platí*

$$(\forall p \in \bullet t) [M(p) \geq I(t,p)] \wedge (\forall p \in \circ t) [M(p) < H(t,p)].$$

*Proveditelnost  
a provedení  
přechodu*

Množinu přechodů proveditelných při značení M označíme jako E(M). Značení M, při kterém žádný přechod není proveditelný, tj. pro které platí E(M) = ∅, nazýváme *uzamčením* (deadlock).

*Provedení přechodu t (transition firing), proveditelného při značení M, vede od značení M k značení M' takovému, že platí*

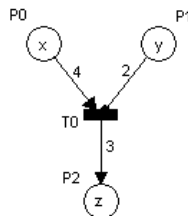
$$M' = M + O(t) - I(t),$$

(M', M, O(t), I(t) jsou multimnožiny) neboli rozepsáno

$$(\forall p \in P) [M'(p) = M(p) + O(t,p) - I(t,p)].$$

**Příklad 2.2.**

Na obrázku 2.2 a v tab.2.2 je ilustrováno pravidlo proveditelnosti a provedení přechodu.



Obrázek 2.2: Proveditelnost a provedení přechodu

M			M'		
x = M(P0)	y = M(P1)	z = M(P2)	x' = M'(P0)	y' = M'(P1)	z' = M'(P2)
5	1	3	1	1	6
4	1	2	0	1	5
4	2	1	-	-	-

Tab.2.2.: Značení před a po provedení přechodu

**Průvodce studiem**

Skutečnost, že provedení (proveditelného) přechodu t vede od značení M ke značení M' zapisujeme stručně  $M[t \triangleright M'$  nebo také  $M \rightarrow^t M'$ . Říkáme, že značení M' je bezprostředně dosažitelné (directly reachable) ze značení M.

Zobecněním pojmu provedení přechodu je pojem *provedení posloupnosti přechodů*. Posloupnost přechodů  $\sigma = t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(k)}$  může startovat ze značení  $M$  právě tehdy, jestliže existuje posloupnost značení  $M = M_{(1)}, M_{(2)}, \dots, M_{(k+1)} = M'$  taková, že pro  $i = 1, 2, \dots, k$  platí

$$M_{(i)} [t_{(i)} > M_{(i+1)}.$$

Tuto skutečnost označujeme  $M[\sigma > M']$  (nebo také  $M \rightarrow^\sigma M'$ ) a říkáme, že značení  $M'$  je *dosažitelné* (reachable) ze značení  $M$ .

Většinou předpokládáme, že PN-systém je navržen tak, že provedení dvou různých přechodů vede z daného stavu sítě k různým výsledným stavům, tj.

$$M[t_1 > M_1 \wedge M[t_2 > M_2 \Rightarrow M_1 \neq M_2.$$

### Definice 2.5.

*Množina dosažitelnosti* (reachability set) PN systému  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$ , je množina  $RS(M_0)$  definovaná induktivně takto:

*Množina  
dosažitelnosti*

- $M_0 \in RS(M_0)$
- $M \in RS(M_0) \wedge (\exists t \in T) \{M[t > M'\} \Rightarrow M' \in RS(M_0)$

Vedle zápisu  $RS(M_0)$  bývá také často používán zápis  $[M_0 >$ .

#### Průvodce studiem

Induktivní definice množiny dosažitelnosti  $RS(M_0)$  představuje vlastně algoritmus konstrukce této množiny. Postup:

- (1) Položíme  $X = \{M_0\}$ .
- (2) Přidáme k množině  $X$  všechna značení, která jsou bezprostředně dosažitelná ze značení, která jsou již v  $X$  obsažena.
- (3) Zvětšila-li se množina  $X$  v kroku (2), pak se krok (2) opakuje. V opačném případě je  $RS(M_0) = X$ .

Grafickým zobrazením popsané konstrukce množiny dosažitelnosti je tzv. strom dosažitelnosti (reachability tree).

### Definice 2.6.

*Graf dosažitelnosti* (reachability graph) PN systému s množinou dosažitelnosti  $RS(M_0)$  je hranově ohodnocený orientovaný graf  $RG(M_0)$  s následujícími vlastnostmi:

*Graf  
dosažitelnosti*

- $RG(M_0)$  je množina uzlů grafu,
- množina hran  $A$  grafu je definována takto:
  - $A \subseteq RS \times RS \times T$ ,
  - $\langle M_i, M_j, t \rangle \in A \Leftrightarrow M_i[t > M_j$ ,
- $M_0$  je počáteční uzel grafu.

Pokud je  $M_0$  pevně dáno, budeme psát místo  $RG(M_0)$  jednoduše  $RG$ .

### Průvodce studiem

Množina dosažitelných značení může být nekonečná. To odpovídá situaci, kdy některá místa v síti mohou neomezeně zvětšovat počet tokenů v nich obsažených. V tomto případě je nekonečný i graf dosažitelnosti. Tento nekonečný graf může být reprezentován s jistou ztrátou informace, ale konečným způsobem, pomocí tzv. stromu pokrytí (coverability tree), který vznikne ze stromu dosažitelnosti vypuštěním těch značení (tj. odpovídajících vrcholů stromu), která pokrývají některé jiné značení

Graf dosažitelnosti PN systému je reprezentací částečného konečného (nebo i nekonečného) automatu, kde

*Konečný  
automat*

- $M_0$  je počáteční stav,
- $RS = RS(M_0)$  je množina stavů,
- $T$  je vstupní abeceda,
- přechodová funkce  $\delta$  je částečné zobrazení  $RS \times T \rightarrow RS$  definované takto:

$$\delta(M, t) = M' \Leftrightarrow M[t > M'] .$$

Zobecněná přechodová funkce  $\delta^*$  je částečné zobrazení  $RS \times T^* \rightarrow RS$  definované induktivně takto:

- $\delta(M, e) = M$ , kde  $e$  je prázdné slovo nad  $T$ ,
- $\delta^*(M, t\sigma) = \delta^*(\delta(M, t), \sigma)$ , kde  $\sigma$  je libovolné slovo nad  $T$ .

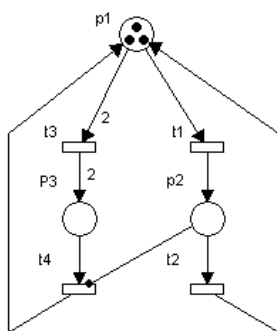
Slovo  $\sigma$ , pro které je definována přechodová funkce  $\delta^*(M_0, \sigma)$ , nazýváme *výpočetní posloupností PN-systému* (firing sequence). Množina všech výpočetních posloupností charakterizuje chování PN systému, podobně jako množina všech dosažitelných značení PN systému charakterizuje množinu všech jeho stavů).

### Průvodce studiem

Je-li posloupnost přechodů  $\sigma$  výpočetní posloupností daného PN-systému, pak také každý počáteční úsek posloupnosti  $\sigma$  je jeho výpočetní posloupností. Každá výpočetní posloupnost PN-systému je v grafu dosažitelnosti jednoznačně zobrazena orientovanou cestou vycházející z počátečního vrcholu.

### Příklad 2.3.

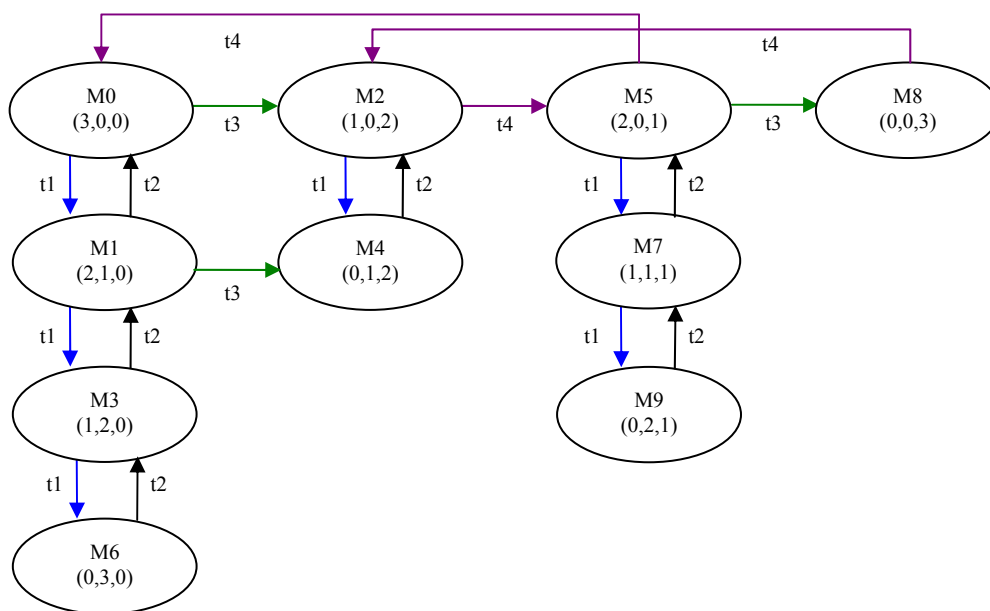
Na obrázku 2.3 je zobrazen jednoduchý PN-systém. V tabulce 2.3 je uvedena množina dosažitelných značení. Tabulku vyplňujeme po sloupcích zleva doprava. V posledním řádku tabulky jsou uvedeny přechody, které jsou v tom či onom značení proveditelné a také následná značení ke kterým provedení přechodů vede. Na základě této tabulky je potom na obr.2.4. zkonstruován graf dosažitelnosti Petriho sítě.



Obrázek 2.3: Příklad jednoduchého PN systému

	M0	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
p1	3	2	1	1	0	2	0	1	0	0
p2	0	1	0	2	1	0	3	1	0	2
p3	0	0	2	0	2	1	0	1	3	1
	t1→M1 t3→M2	t1→M3 t2→M0 t3→M4	t1→M4 t4→M5	t1→M6 t2→M1	t2→M2	t1→M7 t3→M8 t4→M0	t2→M3	t1→M9 t2→M5	t4→M2	t2→M7

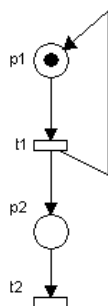
Tab.2.3: Množina dosažitelných značení



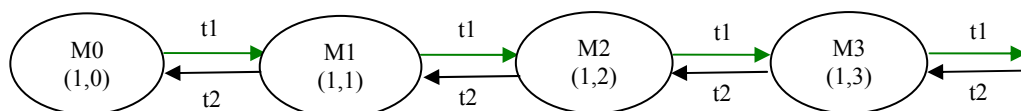
Obrázek 2.4: Graf dosažitelnosti PN systému

#### Příklad 2.4.

Na obrázku 2.5 je zobrazen PN systém s nekonečnou množinou dosažitelných značení. Na obrázku 2.6 je zobrazen nekonečný graf dosažitelnosti tohoto systému.



Obrázek 2.5: PN systém s nekonečnou množinou dosažitelnosti



Obrázek 2.6: Graf dosažitelnosti pro PN systém z obr.2.5

V dalším zobecníme pojem proveditelnosti přechodu zavedením pojmu stupně proveditelnosti přechodu. To nám umožní definovat na množině všech přechodů PN systému, proveditelných při daném značení  $M$ , tyto relace:

- přechody jsou v konfliktu,
- přechody jsou souběžné,
- přechody jsou v kauzální závislosti,
- přechody se vzájemně vylučují.

**Definice 2.7.**

*Stupeň proveditelnosti* (enabling degree)  $ED(t,M)$  přechodu  $t$  při značení  $M$  je přirozené číslo  $k$  udávající kolikrát je přechod  $t$  proveditelný při značení  $M$ .

*Stupeň proveditelnosti přechodu*

Je-li množina vstupních míst přechodu je disjunktní s množinou výstupních míst ( $t_j \bullet \cap t^* = \emptyset$ ), lze skutečnost  $ED(t,M) = k$  vyjádřit formulí predikátové logiky:

$$(\forall p \in \bullet t) [M(p) \geq k \cdot I(t,p)] \wedge (\exists p \in \bullet t) [M(p) < (k+1) \cdot I(t,p)] \wedge (\forall p \in \circ t) [M(p) < H(t,p)].$$

Uvažujme dva různé přechody  $t_i, t_k$  PN-systému. Přechod  $t_i$  je v *efektivním konfliktu* (effective conflict) s přechodem  $t_k$  při značení  $M$ , jestliže platí

$$M[t_i > M'] \wedge (ED(t_k, M') < ED(t_k, M)).$$

Skutečnost, že přechod  $t_i$  je v efektivním konfliktu s přechodem  $t_k$  při značení  $M$  označujeme relačním zápisem  $t_i EC(M) t_k$ .

Přechody  $t_i, t_k$  jsou ve *strukturním konfliktu* (structural conflict), jestliže mají společné vstupní místo.

**Průvodce studiem**

Proveditelný přechod je přechod se stupněm proveditelnosti  $n \geq 1$ . Nproveditelný přechod má stupeň proveditelnosti rovný 0.

Konflikt je situace, při které provedení jednoho přechodu snižuje stupeň proveditelnosti druhého přechodu.

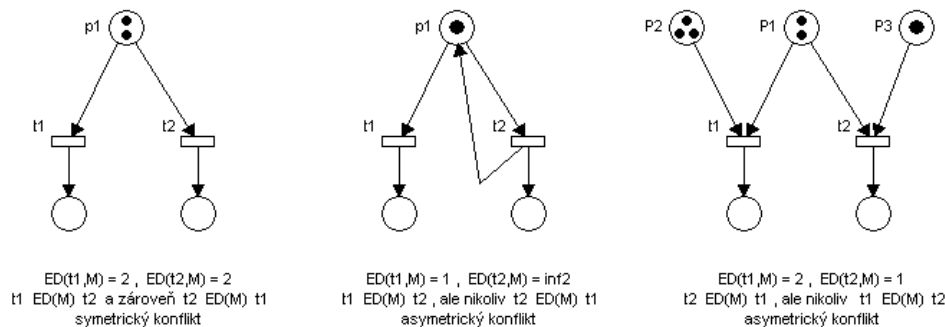
Konflikt (efektivní) je symetrický, jestliže provedení kteréhokoliv ze dvou přechodů snižuje stupeň proveditelnosti druhého přechodu.

Konflikt je asymetrický, jestliže provedení jednoho přechodu snižuje stupeň proveditelnosti druhého přechodu, ale nikoliv naopak.

### Příklad 2.5.

Na následujícím obrázku jsou zobrazeny typické příklady (efektivních) konfliktů mezi dvěma přechody  $t_1$ ,  $t_2$ :

- symetrický konflikt – provedení přechodu  $t_1$  snižuje stupeň proveditelnosti  $t_2$  a provedení přechodu  $t_2$  snižuje stupeň proveditelnosti  $t_1$ ,
- asymetrický konflikt podmíněný strukturou sítě – provedení přechodu  $t_2$  nesnižuje stupeň proveditelnosti  $t_1$ , provedení  $t_1$  znemožňuje provedení  $t_2$ ,
- asymetrický konflikt podmíněný značením sítě – provedení přechodu  $t_2$  snižuje stupeň proveditelnosti  $t_1$ , provedení přechodu  $t_1$  nesnižuje stupeň proveditelnosti  $t_2$  (pro značení  $M: 2'p_1+3'p_2+1'p_3$  se stává konflikt symetrickým).



Obrázek 2.7: Konflikty symetrické a asymetrické

### Definice 2.8.

Přechody  $t_i$ ,  $t_k$  nazýváme *souběžné* (concurrent) při značení  $M$ , jestliže

$$t_i, t_k \in E(M) \Rightarrow \neg(t_i EC(M)t_k) \wedge \neg(t_k EC(M)t_i).$$

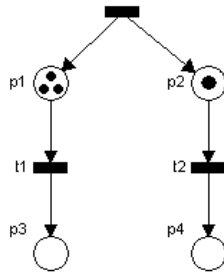
*Souběžnost  
přechodů*

### Průvodce studiem

Přechody  $t_i$ ,  $t_k$  jsou při značení  $M$  souběžné, jestliže jsou oba proveditelné při značení  $M$  a přitom nejsou v konfliktu. Na rozdíl od konfliktu, je souběžnost charakterizována paralelismem činností.

### Příklad 2.6.

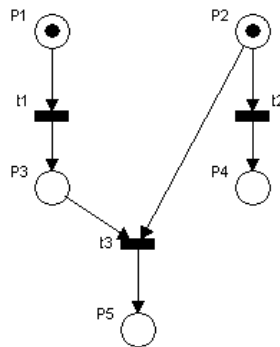
Na následujícím obrázku je zobrazena Petriho síť se dvěma souběžnými aktivitami  $t_1$ ,  $t_2$ . Přechody  $t_1$ ,  $t_2$  jsou souběžné, jsou oba proveditelné a nejsou v konfliktu.



Obrázek 2.8: Souběžné činnosti

**Příklad 2.7.**

Na obr. 2.9 je zobrazena situace, kde je souběžnost přechodů t1,t2 kombinována s konfliktem přechodů t2,t3. Při daném značení jsou přechody t1,t2 souběžné, přesto záleží na tom, který z nich bude proveden jako první. Takovou situaci označujeme jako konfúzi (confusion). Bude-li proveden jako první přechod t1, potom t2 je v konfliktu s t3. Bude-li jako prvý proveden přechod t2, potom žádný konflikt nevzniká.



Obrázek 2.9: Konfúze

**Definice 2.9.**

O přechodech  $t_i, t_k$  říkáme, že jsou v *kauzálním vztahu* (causal connection) při značení  $M$  a značíme  $t_i CC(M) t_k$ , jestliže

*Kauzální závislost*

$$M[t_i > M'] \Rightarrow ED(t_k, M') > ED(t_k, M).$$

**Průvodce studiem**

Přechod  $t_i$  je v kauzálním vztahu s přechodem  $t_k$ , jestliže provedení přechodu  $t_i$  zvyšuje stupeň proveditelnosti přechodu  $t_k$ .

**Definice 2.10.**

O přechodech  $t_i, t_k$  říkáme, že se *vzájemně vylučují* (transitions are mutually exclusive), jestliže

*Vzájemné vylučování*

$$\neg (\exists M \in RS(M_0)) [t_i \in E(M) \wedge t_k \in E(M)].$$

O místech  $p_i, p_k$  říkáme, že se *vzájemně vylučují* (places are mutually exclusive), jestliže

$$\neg (\exists M \in RS(M_0)) [M(p_i) > 0 \wedge M(p_k) > 0].$$

### Průvodce studiem

Dva přechody se vzájemně vylučují, jestliže neexistuje značení (dosažitelné z počátečního značení), při kterém by oba přechody byly současně proveditelné.

Dvě místa se vzájemně vylučují, jestliže neexistuje značení (dosažitelné z počátečního značení) při kterém by obě místa měla současně nenulová značení.

Relace vzájemné výlučnosti, na rozdíl od dříve diskutovaných relací (konfliktu, souběžnosti, konfúze a kauzálního vztahu), není relací vztahující se k jednotlivému konkrétnímu značení PN systému, ale relací vztahující se ke všem možným dosažitelným značením PN systému.

### Shrnutí

Struktura Petriho sítě se zobrazuje diagramem, kde místo je znázorněno kružnicí, přechod úsečkou nebo obdélníkem, vstupní funkce orientovanými hranami vedoucími z míst do přechodů (orientované hrany inhibiční funkce mají místo šipky kroužek), vstupní inhibiční funkce, výstupní funkce orientovanými hranami mířícími z přechodu do míst.

Stav sítě je dán značením, tj. počtem tokenů v jednotlivých místech. Změny stavu nastávají v důsledku provádění přechodů. V daném stavu sítě jsou jen některé přechody proveditelné. Při daném značení  $M$  je možné zjišťovat stupeň proveditelnosti daného přechodu.

Na množině všech přechodů PN systému, proveditelných při daném značení  $M$ , je možné definovat relace mezi přechody: konflikt přechodů, souběžnost, kauzální závislost a vzájemné vylučování přechodů.

### Pojmy k zapamatování

- Struktura Petriho sítě,
- systém Petriho sítě,
- proveditelnost a provedení přechodu,
- množina dosažitelných značení,
- graf dosažitelných značení,
- stupeň proveditelnosti přechodu,
- konflikt přechodů,
- souběžnost přechodů,
- kauzální závislost,
- vzájemné vyloučení přechodů.

### Kontrolní otázky

1. Z čeho je tvořena struktura P/T Petriho sítě?
2. Jak zkonstruujeme graf dosažitelnosti?

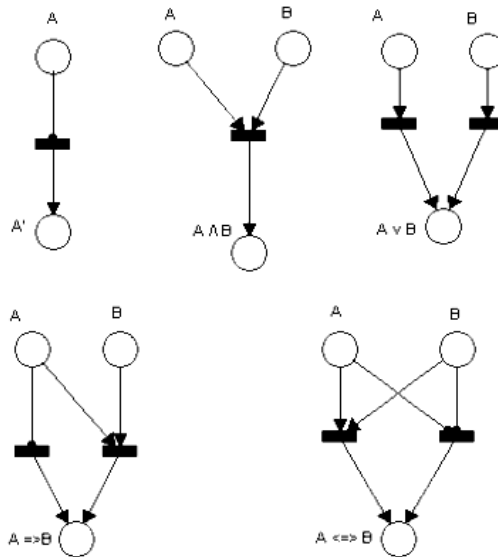
### Cvičení

1. Navrhněte Petriho sítě k booleovským operacím  $\neg A$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \Rightarrow B$ ,  $A \Leftrightarrow B$ .

### Řešení

1. Petriho sítě k jednotlivým booleovským operacím:





Obrázek 2.10: Řešení cvičení - Petriho sítě k booleovským operacím

## 2.3 Vlastnosti a stavová analýza P/T sítí

**Studijní cíle:** Po prostudování podkapitoly bude student schopen stanovit stavové vlastnosti libovolné P/T sítě.

**Klíčová slova:** Dosažitelné značení, reverzibilita, živost PN-systému, omezenost PN-systému.

**Potřebný čas:** 60 minut.

V této kapitole jsou popsány nejdůležitější vlastnosti Petriho sítí, které je účelné zjišťovat. Výběr těchto vlastností je motivován praktickými potřebami při studiu diskretních systémů modelovaných Petriho sítěmi. Dále je zde uvedena základní metoda ověřování těchto vlastností, metoda stavové analýzy.

### Definice 2.11.

Značení  $M'$  je *dosažitelné* (reachable) ze značení  $M$ , jestliže existuje posloupnost přechodů, která je proveditelná ve značení  $M$ , a která převádí Petriho síť ze značení  $M$  do značení  $M'$ , tj.

$$(\exists \sigma_M \in T^*) [ M[\sigma_M > M'] ].$$

*Dosažitelné značení*

Značení  $M$  Petriho sítě  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  se nazývá *vždy dosažitelným* (home state marking), jestliže je dosažitelné z každého dosažitelného značení, tj. platí-li

$$(\forall M' \in RS(M_0)) [ M \in RS(M') ].$$

Připomeňme, že  $RS(M)$  je množina všech značení dosažitelných ze značení  $M$ , tj.

$$RS(M) = \{ M' : (\exists \sigma_M \in T^*) [ M[\sigma_M > M'] ].$$

PN-systém  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  se nazývá *reverzibilní* (reversible), je-li počáteční značení vždy dosažitelné, tj. platí-li

$$(\forall M \in RS(M_0)) [ M_0 \in RS(M) ].$$

### Průvodce studiem

V reversibilním systému je libovolné dosažitelné značení dosažitelné z libovolného dosažitelného značení:  $(\forall M' \in RS(M)) [ M \in RS(M') ]$ .

Typickým problémem analýzy Petriho sítí je problém dosažitelnosti: je dán PN-systém a značení  $M$  a ptáme se, zda značení  $M$  je dosažitelné, tj. zda platí  $M \in RS(M_0)$

Zobecněním problému dosažitelnosti je problém pokrytí (coverability problem): je dán PN-systém a značení  $M$  a ptáme se, zda existuje dosažitelné značení, které značení  $M$  pokrývá, tj. zda existuje značení  $M' \in RS(M_0)$  takové, že  $M \leq M'$ .

### Definice 2.12.

PN-systém  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  se nazývá *systémem bez uzamčení* (deadlock-free), jestliže z počátečního značení  $M_0$  není dosažitelné žádné značení, ve kterém není žádný přechod proveditelný, tj. platí-li

$$\neg(\exists M \in RS(M_0)) [ E(M) = \emptyset ].$$

Připomeňme, že  $E(M)$  je množina všech přechodů proveditelných při značení  $M$ .

*Systém bez uzamčení*

### Průvodce studiem

Existence uzamčení je někdy žádoucí a jindy nežádoucí. Například popisuje-li model Petriho sítě program, o kterém se předpokládá, že skončí, pak je nejen žádoucí, aby uzamčení v systému existovalo, ale také aby bylo vždy (tj. ze všech značení) dosažitelné.

Jestliže model Petriho sítě popisuje program nepřetržitě běžící v reálném čase (např. operační systém), pak je nepřijatelné, aby obsahoval uzamčení.

Obsahuje-li PN-systém uzamčení, pak:

**PN-systém je reverzibilní  $\Leftrightarrow$  počáteční značení je uzamčením.**

### Definice 2.13.

- Přechod  $t$  je *mrtvý při značení  $M$* , jestliže přechod není proveditelný v žádném značení dosažitelném ze značení  $M$ , tj. platí-li

$$(\forall M' \in [M \rangle) [ \neg M' [t \rangle ], \text{ neboli } (\forall M' \in RS(M)) [ t \notin E(M) ].$$

- Přechod  $t$  je *živý při značení  $M$* , jestliže není mrtvý v žádném značení dosažitelném ze značení  $M$ , tj. platí-li

$$(\forall M' \in [M \rangle) (\exists M'' \in [M' \rangle) [ M'' [t \rangle ], \text{ neboli } (\forall M' \in RS(M)) (\exists M'' \in RS(M')) [ t \in E(M'') ].$$

- *Přechod  $t$  je v daném PN-systému mrtvý*, je-li mrtvý při počátečním značení, tj. platí-li

$$(\forall M \in [M_0 \rangle) [ \neg M [t \rangle ], \text{ neboli } (\forall M' \in RS(M_0)) [ t \notin E(M) ].$$

- *Přechod  $t$  je v daném PN systému živý*, je-li živý při počátečním značení, tj. platí-li

$$(\forall M \in [M_0 \rangle) (\exists M' \in [M \rangle) [ M' [t \rangle ], \text{ neboli } (\forall M' \in RS(M_0)) (\exists M'' \in RS(M')) [ t \in E(M'') ].$$

*Mrtvý a živý přechod v PN-systému*

- *PN-systém je mrtvý*, jsou-li všechny jeho přechody mrtvé,  
 $(\forall t \in T) ((\forall M \in [M_0 >]) [\neg M[t >]],$  neboli  $(\forall t \in T) (\forall M \in RS(M_0)) [t \notin E(M)].$
- *PN-systém je živý*, jsou-li všechny jeho přechody živé, tj. platí-li  
 $(\forall t \in T) ((\forall M \in [M_0 >])(\exists M' \in [M >])[M'[t >]],$  neboli  
 $(\forall t \in T) (\forall M \in RS(M_0))(\exists M' \in RS(M))[t \in E(M')]$

### Průvodce studiem

PN-systém je živý, jestliže při vývoji systému žádný přechod nikdy neztrácí možnost, že bude někdy v budoucnu znovu proveden.

Pro každou PN-strukturu lze definovat odpovídající PN-systém, který není živý. Např. volbou nulového počátečního značení, které každému místu přiřazuje nulový počet tokenů.

Obsahuje-li PN-systém aspoň jeden živý přechod, pak neobsahuje uzamčení. Na druhé straně neexistence uzamčení nezaručuje živost PN-systému.

Pojem živosti přechodu v PN-systému lze zobecnit - Přechod  $t$  PN-systému je  $k$ -živý ( $k$ -live), jestliže z každého dosažitelného značení je dosažitelné značení, ve kterém je přechod  $t$  alespoň  $k$ -proveditelný, tj. platí-li  $(\forall M \in RS(M_0))(\exists M' \in RS(M))[ED(t, M') \geq k]$ . Přechod je živý, je-li 1-živý.

Definici živosti PN-systému je možné formulovat také takto: z každého dosažitelného značení je možné spustit výpočetní posloupnost obsahující všechny přechody.

### Definice 2.14.

Místo  $p$  PN-systému se nazývá  $k$ -omezené ( $k$ -bounded), jestliže pro každé dosažitelné značení je počet tokenů v tomto místě nanejvýše rovný  $k$ , tj.

$$(\forall M \in RS(M_0)) [M(p) \leq k].$$

PN-systém se nazývá  $k$ -omezený, jestliže všechna jeho místa jsou  $k$ -omezená, tj. platí-li

$$(\forall p \in P)(\forall M \in RS(M_0)) [M(p) \leq k].$$

PN-systémy se nazývají bezpečnými (safe), jestliže jsou 1-omezené.

*Omezenost  
místa a PN-  
systému*

### Průvodce studiem

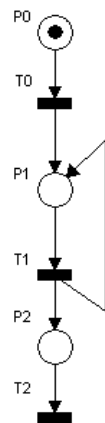
Důležitým důsledkem omezenosti PN-systému je konečnost jeho stavového prostoru (množiny všech dosažitelných značení). Je-li  $|P|$  počet míst  $k$ -omezeného PN-systému, pak počet stavů (značení) nemůže přesáhnout číslo  $(k+1)^{|P|}$ .

Omezenost, živost a reversibilita jsou navzájem nezávislé (ortogonální) vlastnosti. Všechny 8 kombinací těchto vlastností je možných.

V naprosté většině případů požadujeme omezenost PN-modelů. Bezpečnost požadujeme tehdy, kdy všechna místa modelují logické podmínky.

### Příklad 2.8.

Na následujících obrázcích jsou zobrazeny PN-systémy se všemi možnými kombinacemi vlastností omezenosti, živosti a reverzibility.

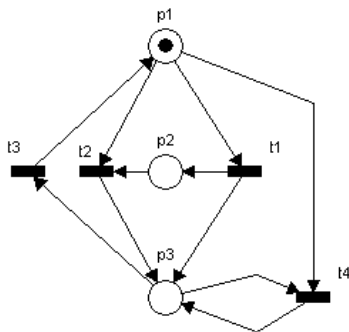


Po provedení T0 :

T0 se stane mrtvým,

$M(P1) = 1$ ,  $M(P2)$  roste neomezeně

Obrázek 2.11: Neomezený, neživý a nereverzibilní PN-systém



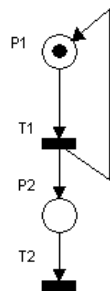
Přechod t4 je mrtvý

$M(p1) + M(p3) = 1$

provedení t1 zvětšuje počet tokenů v p2

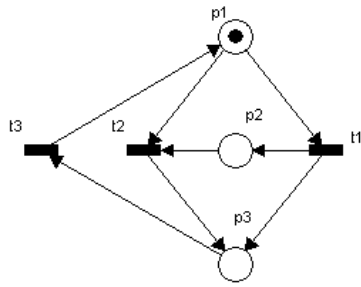
provedení t2 zmenšuje počet tokenů v p2

Obrázek 2.12: Neomezený, neživý a reverzibilní PN-systém



$M(P2)$  roste neomezeně

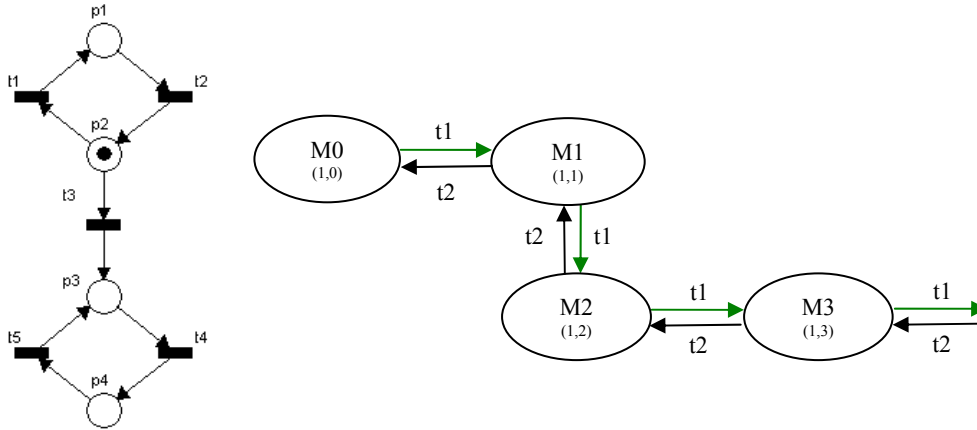
Obrázek 2.13: Neomezený, živý a nereverzibilní PN-systém



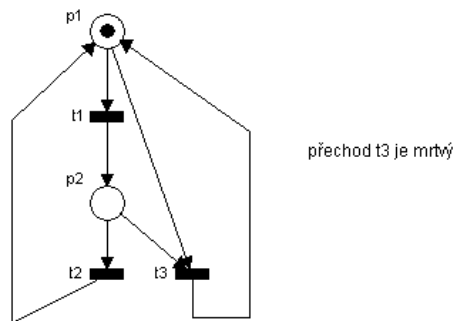
$$M(p1) + M(p3) = 1$$

provedení t1 zveštuje počet tokenů v p2  
provedení t2 zmenšuje počet tokenů v p2

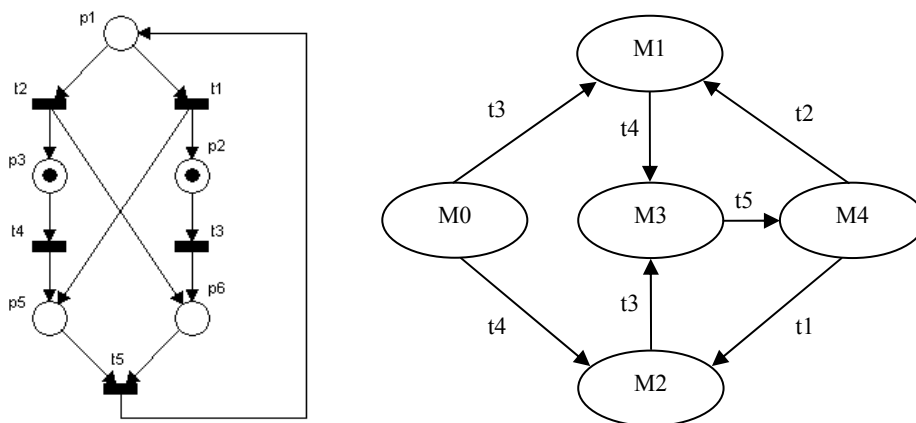
Obrázek 2.14: Neomezený, živý a reverzibilní PN-systém



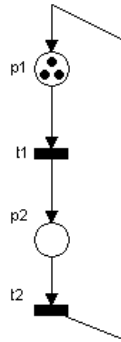
Obrázek 2.15: Omezený, neživý a nereverzibilní PN-systém



Obrázek 2.16: Omezený, neživý a reverzibilní PN-systém



Obrázek 2.17: Omezený, živý a nereverzibilní PN-systém



Obrázek 2.18: Omezený, živý a reverzibilní PN-systém

Metoda stavové analýzy PN-systému  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  je založena na konstrukci množiny dosažitelných značení  $RS(M_0)$  a grafu dosažitelnosti  $RG$ . Algoritmus konstrukce grafu dosažitelnosti je jednoduchý a byl popsán v kapitole 2.2.

V dalším budeme předpokládat, že algoritmus konstrukce grafu  $RG$  ukončí svou práci po konečném počtu kroků a že tedy množina  $RS(M_0)$  i graf  $RG$  jsou konečné. V opačném případě (existuje nekonečná množina značení – stavů sítě) nemá většinou analyzovaný PN-systém praktický význam.

#### Průvodce studiem

Máme-li popsán PN-systém grafem dosažitelnosti, redukuje se problém analýzy PN-systému na problém analýzy orientovaného grafu, což ukazuje následující věta.

#### Věta 2.1.

1. Značení  $M'$  je v PN-systému dosažitelné ze značení  $M$ .  $\Leftrightarrow$  V grafu  $RG$  vede orientovaná cesta z uzlu  $M$  do uzlu  $M'$ .
2. Značení  $M$  je v PN-systému vždy dosažitelným stavem.  $\Leftrightarrow$  Z každého uzlu grafu  $RG$  vede orientovaná cesta do uzlu  $M$ .
3. PN-systém  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  je reversibilní.  $\Leftrightarrow$  V grafu  $RG$  vede z každého uzlu orientovaná cesta do uzlu  $M_0$ .  $\Leftrightarrow$  V  $RG$  grafu vede orientovaná cesta z každého uzlu do každého (tj. graf  $RG$  je silně souvislý).
4. PN-systém neobsahuje uzamčení.  $\Leftrightarrow$  V  $RG$  grafu neexistuje uzel, ze kterého by nevedla žádná hrana.
5. PN-systém je živý.  $\Leftrightarrow$  Pro všechny koncové (finální) silně souvislé komponenty  $RG$  grafu platí, že každý přechod ohodnocuje aspoň jednu hranu komponenty.
6. PN-systém je omezený.  $\Leftrightarrow$  Graf  $RG$  je konečný.

#### Důkaz:

Všechna tvrzení vyplývají ihned z porovnání definic jednotlivých vlastností PN-systémů a definice  $RG$ -grafu.

#### Průvodce studiem

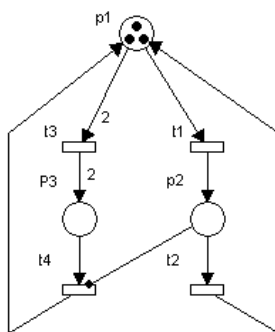
Metoda stavové analýzy, založená na konstrukci grafu dosažitelnosti, je v principu jednoduchá metoda, která umožňuje snadno zjistit všechny důležité vlastnosti PN-systémů. V mnoha praktických případech však bývá množina  $RS(M_0)$  natolik početná, že

paměťová a časová náročnost konstrukce a následného studia RG-grafu přesahuje přijatelné meze.

Podrobnější prohlídka grafu dosažitelnosti umožňuje také identifikovat vzájemnou výlučnost míst, vzájemnou výlučnost přechodů, značení, při kterých vznikají efektivní konflikty a některá další fakta o situacích při evoluci PN-systému.

### Příklad 2.9.

PN-systém z příkladu 2.3 zadaný diagramem z obrázku 2.3 a s grafem dosažitelnosti RG zobrazeným uvedeným v kapitole 2.2 na obrázku 2.4 je podle výše uvedené věty:



Obrázek 2.19: Příklad Petriho sítě

- reversibilní, neboť z každého uzlu grafu RG vede orientovaná cesta do uzlu  $M_0$  a tedy také do každého jiného uzlu (graf RG je silně souvislý),
- bez uzamčení, neboť v RG neexistuje uzel, ze kterého by nevedla žádná hrana,
- živý, neboť graf RG je silně souvislý a každý přechod PN-systému je ohodnocením aspoň jedné hrany grafu RG,
- omezený, protože graf RG je konečný.

Z hodnot souřadnic dosažitelných značení (viz obrázek 2.3 nebo tab.2.3) vyplývá, že systém je 3-omezený.

### Definice 2.15.

*Strom dosažitelnosti* (reachability tree) daného PN-systému (RT graf) je grafová reprezentace množiny  $RS(M_0)$  daného PN-systému spolu s relací bezprostřední dosažitelnosti mezi prvky této množiny. Tato grafová reprezentace je typu strom a její konstrukce probíhá podle indukční definice množiny  $RS(M_0)$ . Konstrukce každé větve stromu je ukončena, jakmile koncový uzel větve má značení shodné se značením některého předchozího (dříve ustanoveného) uzlu (včetně kořenu  $M_0$ ).

*Graf dosažitelnosti* (reachability graph) daného PN-systému (RG graf) vznikne z RT grafu odstraněním koncových zdvojených uzlů a jejich náhradou zpětnými hranami dvojnícům.

*Strom pokrytí* (coverability tree) daného PN-systému (CT graf) je zobecnění pojmu RT grafu, které umožňuje konečnou grafovou reprezentaci PN-systému a to i v případě, kdy PN-systém je neomezený a množina dosažitelných značení  $RS(M_0)$  nekonečná. Toho se docílí rozkladem nekonečné množiny  $RS(M_0)$  na konečný systém tříd takový, že v každé třídě se nacházejí všechna značení, která jsou pokryta (dominována) nějakým shora neomezeným značením (tj. značením vyznačujícím se tím, že v jednom nebo více místech se může vyskytovat neomezený počet tokenů).

*Graf pokrytí* (coverability graph) daného PN-systému (CG graf) je alternativní zobrazení stromu pokrytí, které získáme ze stromu pokrytí stejným způsobem jako graf dosažitelnosti ze stromu dosažitelnosti, tj. odstraněním dublujících koncových uzlů a jejich náhradou zpětnými hranami k uzlům dublovaným.

### Průvodce studiem

RT graf a RG graf jsou dvě navzájem ekvivalentní reprezentace množiny dosažitelných značení  $RS(M_0)$  daného PN-systému a relace dosažitelnosti mezi prvky této množiny. Tyto reprezentace jsou nekonečné v případě neomezených PN-systémů.

CT graf a CG graf jsou dvě navzájem ekvivalentní reprezentace množiny dosažitelných značení  $RS(M_0)$  daného PN-systému a relace dosažitelnosti mezi prvky této množiny. Tyto reprezentace jsou vždy konečné (tj. i v případě neomezených PN-systémů).

CT a CG grafy jsou zobecněním RT a RG grafů. V případě omezených PN-systému přechází CT a CG grafy automaticky v RT a RG grafy. Třídy rozkladu množiny  $RS(M_0)$  jsou pak jednoprvkové.

Uvedeme konstruktivní definici stromu pokrytí (CT grafu). Nejprve připomeňme několik pojmů.

Značení PN-systému je dáno vektorem  $M=(m_1, m_2, \dots, m_{|P|})$ , kde  $|P|$  je početnost množiny míst  $P$ . Značení  $M$  dominuje (pokrývá) značení  $N=(n_1, n_2, \dots, n_{|P|})$ , jestliže

$$(\forall i) [m_i \geq n_i] \wedge (\exists i) [m_i > n_i].$$

Jestliže počet tokenů v místě  $p_i$  může nabývat libovolně velkých hodnot, pak klademe  $m_i = \omega$ . Pro počítání se symbolem  $\omega$ , symbolizující nekonečno, platí:

$$(\forall k)[\omega + k = \omega = \omega - k], \quad (\forall k)[\omega > k], \quad \text{kde } k \text{ je celé nezáporné číslo.}$$

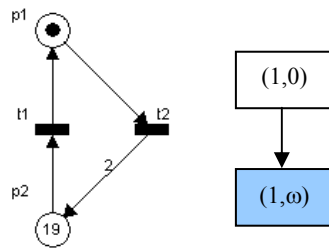
### Algoritmus konstrukce stromu pokrytí:

- 1) Kořenem stromu ustanovíme počáteční značení  $M_0$ .
- 2) Pro každé nově ustanovené značení  $M$  provedeme:
  - a) Je-li  $E(M) = \emptyset$  (tj. není-li ve značení  $M$  proveditelný žádný přechod,  $M$  je uzamčením), pak  $M$  je terminálním uzlem (listem) stromu.
  - b) Je-li  $E(M) \neq \emptyset$ , pak pro všechna  $t \in E(M)$  najdi bezprostředně následující uzly uzlu  $M$  (se značeními  $M'$ ) podle těchto pravidel:
    - i) Jestliže  $m_i = \omega$  pro nějaké  $i \in \{1, 2, \dots, |P|\}$ , pak také  $m'_i = \omega$ .
    - ii) Jestliže v dosud vytvořeném stromě na cestě od kořene (tj. uzlu  $M_0$  a včetně uzlu  $M_0$ ) do uzlu  $M'$  existuje uzel  $N$ , který je dominován (pokryt) uzlem  $M'$ , pak polož  $m'_i = \omega$  pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, |P|\}$  taková, že  $m'_i > n_i$ .
    - iii) Jinak značení nového uzlu  $M'$  vypočti obvyklým způsobem podle pravidla provedení přechodu (firing rule),  $M[t \triangleright M']$ .
- 3) Rozšiřování stromu se ukončí, jakmile všechny koncové uzly jsou buď uzamčením (dead), a nebo se na své větvi stromu vyskytují již po druhé (duplicated).

### Příklad 2.10.

Konstrukce stromu pokrytí k neomezené Petriho síti.





Obrázek 2.20: Neomezená Petriho síť a její strom pokrytí

## Shrnutí

Značení  $M'$  je dosažitelné ze značení  $M$ , jestliže existuje posloupnost přechodů, která je proveditelná ve značení  $M$ , a která převádí Petriho síť ze značení  $M$  do značení  $M'$ . Značení  $M$  Petriho sítě se nazývá vždy dosažitelným, jestliže je dosažitelné z každého dosažitelného značení.

PN-systém je reversibilní, je-li počáteční značení vždy dosažitelné. V reversibilním systému je libovolné dosažitelné značení dosažitelné z libovolného dosažitelného značení.

Zobecněním problému dosažitelnosti je problém pokrytí.

PN-systém je systémem bez uzamčení, jestliže z počátečního značení  $M_0$  není dosažitelné žádné značení, ve kterém není žádný přechod proveditelný.

Přechod  $t$  je mrtvý při značení  $M$ , jestliže přechod není proveditelný v žádném značení dosažitelném ze značení  $M$ . PN-systém je mrtvý, jsou-li všechny jeho přechody mrtvé.

Přechod  $t$  je živý při značení  $M$ , jestliže není mrtvý v žádném značení dosažitelném ze značení  $M$ . PN-systém je živý, jsou-li všechny jeho přechody živé.

Místo  $p$  je  $k$ -omezené, jestliže pro každé dosažitelné značení je počet tokenů v tomto místě nanejvýše roven  $k$ . PN-systém je  $k$ -omezený, jestliže všechna jeho místa jsou  $k$ -omezená. PN-systém je bezpečný, je-li 1-omezený. Omezenost, živost a reversibilita jsou navzájem nezávislé vlastnosti.

Metoda stavové analýzy PN-systému je založena na konstrukci množiny dosažitelných značení  $RS(M_0)$  a grafu dosažitelnosti  $RG$ . Máme-li popsán PN-systém grafem dosažitelnosti, redukuje se problém analýzy PN-systému na problém analýzy orientovaného grafu.

## Pojmy k zapamatování

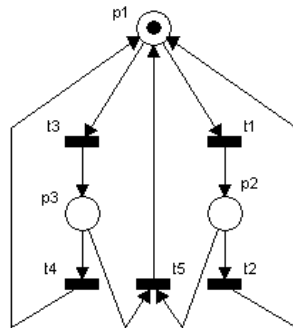
- Dosažitelné značení,
- systém bez uzamčení,
- omezenost, živost a reversibilita,
- metoda stavové analýzy,
- strom pokrytí,
- graf pokrytí.

## Kontrolní otázky

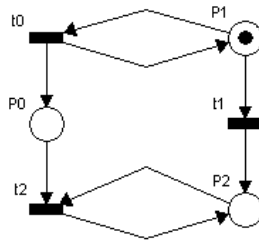
1. Co znamená, když se řekne, že daný PN-systém je bez uzamčení?
2. Kdy je PN-systém  $k$ -omezený?
3. Jaký je rozdíl mezi stromem dosažitelnosti a stromem pokrytí?

## Cvičení

1. Zjistěte vlastnosti (živost, omezenost, reverzibilita) následující Petriho sítě. Nalezněte množinu dosažitelných značení a nakreslete graf dosažitelnosti.

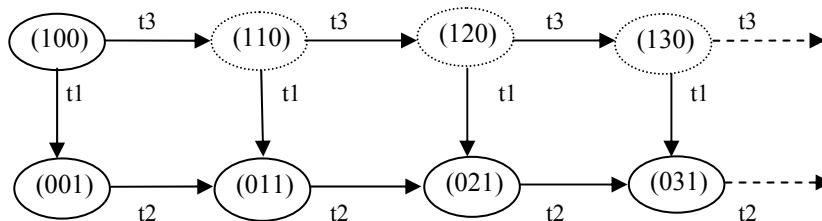


2. Analyzujte vlastnosti následujícího PN-systému.



## Řešení

1. Uvedená Petriho síť není živá, je omezená a je reverzibilní.
2. Je zřejmé, že uvedený PN-systém je neomezený: opakovaným prováděním přechodu  $t_0$  roste neomezeně počet tokenů v místě  $p_2$ . Provedením přechodu  $t_1$  se nevratně mění režim inkrementace počtu tokenů v místě  $p_2$  v režim dekrementace. Opakované provádění přechodu  $t_2$  dekrementuje počet tokenů v místě  $p_2$  až na nulu, kdy dochází k uzamčení systému.



Obrázek 2.21: Graf dosažitelnosti pro daný PN-systém

## 2.4 Strukturní analýza P/T sítí

**Studijní cíle:** Seznámit se s metodami strukturní analýzy Petriho sítí.

**Klíčová slova:** Incidenční matice, p-invariant, t-invariant.

**Potřebný čas:** 90 minut

Studium struktury Petriho sítí je zajímavé z toho důvodu, že všechny vlastnosti Petriho sítí dokázané pouze na základě struktury jsou platné pro všechny PN-systémy, které lze získat z PN-struktury přidáním libovolného počátečního značení. K strukturní analýze se uchylujeme zejména v případech, kdy selhává stavová analýza Petriho sítí založená na pojmu grafu dosažitelnosti. K takovému selhání dochází ve dvou případech:

- PN-systém je neomezený a množina dosažitelných značení a tedy i graf dosažitelnosti jsou nekonečné.
- PN-systém je omezený, ale množina dosažitelných značení je tak početná, že analýza grafu dosažitelnosti je mimo možnosti současných počítačů (state explosion problem).

Metody strukturní analýzy lze rozdělit do dvou skupin:

- metody lineární algebry (pracují s maticovou reprezentací PN-struktur),
- grafové metody (pracují přímo s grafovým popisem Petriho sítí).
  - metody redukce PN-systémů
  - metody využívající vlastností zámků a pastí
  - studium vlastností speciálních typů PN-struktur.

### 2.4.1 Algebraické metody strukturní analýzy

Nejprve se podíváme na maticovou reprezentaci Petriho sítě.

#### **Definice 2.16.**

*Incidenční matice* (incidence matrix, change matrix) PN-struktury  $\langle P, T, I, O, H \rangle$  je matice  $C = \{C(p, t)\}$  typu  $|P| \times |T|$

*Incidenční matice*

$$C = O^T - I^T,$$

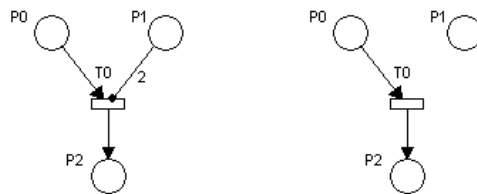
kde  $O = \{O(t, p)\}$  a  $I = \{I(t, p)\}$  jsou matice typu  $|T| \times |P|$  reprezentující vstupní a výstupní funkci  $O, I$ .

#### **Průvodce studiem**

Prvek  $C(p, t)$  matice  $C$  udává změnu počtu tokenů (kladnou, zápornou nebo nulovou) v místě  $p$  při provedení přechodu  $t$ . Sloupec matice  $C$  udává změnu počtu tokenů v jednotlivých místech sítě při provedení přechodu  $t$ . Řádek matice  $C$  udává změnu značení místa  $p$  při provedení jednotlivých přechodů sítě.

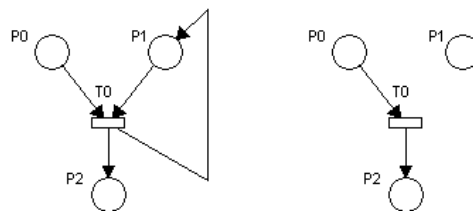
Při zobrazení struktury Petriho sítě pomocí incidenční matice může docházet ke ztrátě informace a to v případě použití inhibičních nebo testovacích hran:

- Existence inhibičních hran se nijak neprojeví na incidenční matici. Strukturně různé PN-systémy na obrázku 2.22. mají stejnou incidenční matici.



Obrázek 2.22: PN-systémy se stejnou incidenční maticí – vliv inhibičních hran

- Hrany  $(p_2, t_0)$ ,  $(t_0, p_2)$  na obrázku 2.23.a. jsou tzv. testovací hrany - pomocí nich přechod  $t$  testuje přítomnost tokenu v místě  $p_2$  aniž by změnil počet tokenů v tomto místě. Strukturně různé PN-systémy na obrázku 2.23. mají stejnou incidenční matici - existence "testovacích" hran se nijak neprojeví na incidenční matici.

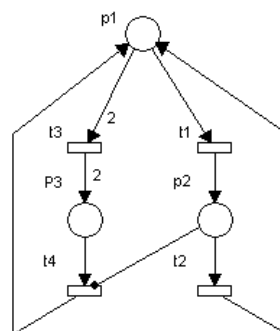


Obrázek 2.23: PN-systémy se stejnou incidenční maticí – vliv testovacích hran

- Petriho sítě, ve kterých se nevyskytují jednoduché smyčky typu  $p_2-t$  zobrazené na obrázku 2.23.a tj. sítě, pro něž  $t \cap t^* = \emptyset$ , se nazývají *čisté* (pure). Struktura čistých sítí bez inhibičních hran je incidenční maticí popsána úplně a jednoznačně.

### Příklad 2.11.

Uvažujme PN-strukturu zobrazenou na obrázku 2.24.



Obrázek 2.24: PN-struktura k příkladu 2.11.

Incidenční matice Petriho sítě je

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}^T - \mathbf{I}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & p_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & p_3 \end{matrix}$$

Řádky v maticích  $\mathbf{O}$ , resp.  $\mathbf{I}$ , tj. sloupce v maticích  $\mathbf{O}^T$ , resp.  $\mathbf{I}^T$  jsou tvořeny koeficienty multimnožin  $\mathbf{O}(t)$ , resp.  $\mathbf{I}(t)$ .

### Definice 2.17.

Uvažujme posloupnost (sekvenci) přechodů  $\sigma = t_{(1)}t_{(2)} \dots t_{(k)}$  chápanou jako slovo nad abecedou  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$ , tj.  $\sigma \in T^*$ . *Charakteristickým vektorem* (transition count vector) sekvence  $\sigma$  nazveme vektor

*Charakteristický vektor*

$$\mathbf{V}_\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_{|T|})^T,$$

kde  $v_i$  označuje počet výskytů přechodu  $t_i$  v sekvenci  $\sigma$ .

Charakteristický vektor  $\mathbf{V}$  je pro značení  $\mathbf{M}$  *realizovatelný* (possible), existuje-li sekvence spustitelná ze značení  $\mathbf{M}$  taková, že  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\sigma$ .

#### Průvodce studiem

Speciálně charakteristickým vektorem přechodu  $t_i$  je vektor  $\mathbf{V}_{t_i} = (v_1, v_2, \dots, v_{|T|})^T$ , s jedinou nenulovou souřadnicí  $v_i = 1$  a s  $v_k = 0$  pro všechna  $k \neq i$ .

Stejně sekvence mají přirozeně tentýž charakteristický vektor, ale témuž charakteristickému vektoru může odpovídat mnoho různých sekvencí, z nichž některé mohou být realizovatelné a jiné nikoliv.

### Věta 2.2.

Nechť  $\sigma$  je sekvence přechodů převádějící PN-systém ze značení  $\mathbf{M}$  do značení  $\mathbf{M}'$ , tj.  $\mathbf{M}[\sigma] > \mathbf{M}'$ . Potom platí

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma, \quad (*)$$

kde značení  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}'$  chápeme jako matice typu  $|P| \times 1$  (sloupcové vektory),  $\mathbf{C}$  je incidenční matice typu  $|P| \times |T|$  a charakteristický vektor  $\mathbf{V}_\sigma$  jako matici typu  $|T| \times 1$  (sloupcový vektor). Vztah (\*) bývá někdy nazýván *fundamentální rovnicí* (fundamental equation, state equation, marking equation).

### Důkaz:

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle délky  $k$  posloupnosti  $\sigma$ .

(1) Nechť  $k = 1$ , tj.  $\sigma = t$ . V tomto případě vztah (\*) platí, neboť:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C}(\cdot, t) = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_t = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma$$

(2) Dokážeme, že z platnosti tvrzení pro sekvence délky  $k$  vyplývá platnost tvrzení pro sekvence délky  $k+1$ . Uvažujme sekvenci  $\tau = \sigma t$  délky  $k+1$  převádějící PN-systém ze značení  $\mathbf{M}$  do značení  $\mathbf{M}'$ . Přitom sekvence  $\sigma$  délky  $k$  převádí systém ze značení  $\mathbf{M}$  do značení  $\mathbf{M}''$  a sekvence  $t$  délky 1 ze značení  $\mathbf{M}''$  do značení  $\mathbf{M}'$ . Platí

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'' + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_t = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{V}_\sigma + \mathbf{V}_t) = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\tau$$

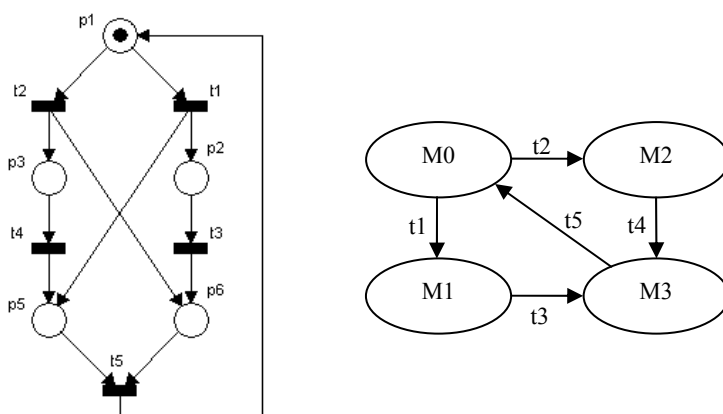
### Průvodce studiem

Platnost fundamentální rovnice (\*) je pouze nutnou podmínkou pro dosažitelnost  $M[\sigma \rightarrow M']$ , nikoliv však podmínkou postačující. Viz poslední odstavec textu následujícího příkladu 2.12.

Jsou-li dvě různé sekvence  $\sigma, \tau$  se společným charakteristickým vektorem  $V_\sigma = V_\tau$  spustitelné ze značení  $\mathbf{M}$ , pak provedení obou sekvencí vede vždy ke stejnému konečnému značení  $\mathbf{M}'$ .

### Příklad 2.12.

Na obrázku 2.25 je zobrazen jednoduchý PN-systém a jeho graf dosažitelnosti. Algebraický výpočet grafu dosažitelnosti (na základě incidenční matice, tj. rovnice  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C}(\cdot, t)$ ) je proveden v tabulce 2.4.



Obrázek 2.25: Jednoduchý PN-systém a jeho graf dosažitelnosti

	t1	t2	t3	t4	t5	M0	M1	M2	M3
p1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	0
p2	1	0	-1	0	0	0	1	0	0
p3	0	1	0	-1	0	0	0	1	0
p4	0	1	1	0	-1	0	0	1	1
p5	1	0	0	1	-1	0	1	0	1
	Incidenční matice C					t1 → M1 t2 → M2	t3 → M3	t4 → M3	t5 → M0

Tab.2.4: Incidenční matice a dosažitelná značení

PN systém je bezpečný, živý a reversibilní. Pro všechna dosažitelná značení  $\{\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3\}$  má rovnice  $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$  řešení (řešením jsou charakteristické vektory sekvencí, které převádějí PN-systém z počátečního stavu  $\mathbf{M}_0$  do stavu  $\mathbf{M}$ ).

Rovnice  $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$  má však často řešení i pro nedosažitelná značení. Tak např. pro značení  $\mathbf{M} = (0, 1, 1, 0, 0)^T$ , které není dosažitelné, má fundamentální rovnice řešení  $\mathbf{X} = (1, 1, 0, 0, 1)^T$ .

### Definice 2.18.

*P*-invariantem struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  (*p*-semiflow) nazýváme vektor  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{|P|})^T$ ,  $y_i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , který anulují zleva incidenční matici  $C$ , tj. vektor, pro který platí

$$Y^T \cdot C = \mathbf{0}^T.$$

Množina  $P_Y = \{p_i \in P: y_i > 0\}$  se nazývá *nosičem p-invariantu Y*.

Je-li aspoň jedno  $y_i > 0$ , pak *p*-invariant nazýváme *netriviálním*. Triviální nulový invariant  $Y = \mathbf{0}$  nemá žádný praktický význam. Jsou-li všechna  $y_i \in \{0, 1\}$ , pak *p*-invariant nazýváme *binárním*.

### Věta 2.3.

Nechť  $Y_1, Y_2$  jsou *p*-invarianty a  $k_1, k_2$  celá nezáporná čísla. Potom platí:

(1) Lineární kombinace  $k_1 Y_1 + k_2 Y_2$  je rovněž *p*-invariantem a jeho nosičem je sjednocení nosičů *p*-invariantů  $Y_1, Y_2$ .

(2) Je-li  $Y_1 - Y_2 \geq 0$ , pak  $Y_1 - Y_2$  je rovněž *p*-invariantem.

### Důkaz:

$$1. (k_1 Y_1 + k_2 Y_2)^T \cdot C = (k_1 Y_1^T + k_2 Y_2^T) \cdot C = k_1 Y_1^T C + k_2 Y_2^T C = k_1 \mathbf{0}^T + k_2 \mathbf{0}^T = \mathbf{0}^T$$

$$2. (Y_1 - Y_2)^T \cdot C = (Y_1^T - Y_2^T) \cdot C = Y_1^T C - Y_2^T C = \mathbf{0}^T - \mathbf{0}^T = \mathbf{0}^T$$

### Průvodce studiem

**Petriho síť je pokryta *p*-invarianty**, jestliže každé místo patří do nosiče nějakého *p*-invariantu PN-struktury. Je-li Petriho síť pokryta *p*-invarianty, pak existuje *p*-invariant, který pokrývá celou síť (jeho nosičem je množina všech míst).

Množina všech *p*-invariantů dané PN-struktury představuje speciální druh lineárního (vektorového) prostoru, ve kterém koeficienty lineárních kombinací mohou být pouze celá nezáporná čísla.

*P*-invariant  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{|P|})^T$  je v *kanonickém tvaru*, jestliže jeho souřadnice  $y_i$  jsou nesoudělné (jejich největší společný dělitel je 1). *P*-invariant  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{|P|})^T$  je *minimální*, jestliže neexistuje žádný jiný *p*-invariant  $Y'$  (téže dané struktury) pro který by platilo  $Y' \leq Y \wedge Y' \neq Y$ . Systém *p*-invariantů (dané struktury) je *úplný*, jestliže každý *p*-invariant (téže dané struktury) je vyjádřitelný jako jejich lineární kombinace.

### Algoritmus výpočtu úplného systému minimálních *p*-invariantů:

Vstup: Incidenční matice  $C$  typu  $(m, n) = (|P|, |T|)$ .

Výstup: Množina všech minimálních *p*-invariantů.

Stavová veličina: složená matice  $[A|B]$

Postup:

1. Inicializace:  $A = C$ ,  $B = I_m$ , ( $I_m$  je jednotková matice řádu  $m = |P|$ ).
2. Pro  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $n = |T|$ ) prováděj:
  - 2.1. Přidej ke složené matici  $[B|A]$  všechny řádky, které jsou lineárními kombinacemi s přirozenými koeficienty dvojic řádků z matice  $[B|A]$  a které současně anulují  $j$ -tý sloupec matice  $A$ .

- 2.2. Vyškrtej z matice  $[B|A]$  všechny řádky s nenulovým prvkem v  $j$ -tém sloupci matice  $A$ .
3. Všechny řádky matice  $B$  převed' do kanonického tvaru (tj. vyděl každý řádek největším společným dělitelem všech jeho prvků).
  4. Odstraň z matice  $B$  všechny neminimální  $p$ -invarianty (tj. vyškrtej z matice  $B$  všechny ty řádky, které pokrývají nějaký jiný řádek matice  $B$ ).
  5. Řádky matice  $B$  představují úplný soubor minimálních  $p$ -invariantů PN struktury zadané incidenční maticí  $C$ .

#### Věta 2.4.

Nechť  $Y$  je  $p$ -invariantem PN-struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$ . Potom pro všechny PN-systémy  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  platí:

$$(\forall M \in RS(M_0) [Y^T M = Y^T M_0].$$

#### Důkaz:

Podle věty 2.2 platí pro libovolná značení  $M, M'$  implikace

$$M[\sigma]M' \Rightarrow M' = M + CV_\sigma,$$

neboli speciálně také

$$M_0[\sigma]M \Rightarrow M = M_0 + CV_\sigma.$$

Vynásobíme-li poslední maticovou rovnici vektorem (řádkovou maticí)  $Y^T$  dostaneme vztah

$$Y^T M = Y^T M_0 + Y^T CV_\sigma.$$

Podle předpokladu věty je  $Y$   $p$ -invariantem příslušné PN-struktury.

Platí tedy  $Y^T C = 0^T$  a poslední rovnice se redukuje na vztah  $Y^T M = Y^T M_0$ , který měl být dokázán.

#### Definice 2.19.

Vztah  $Y^T M = Y^T M_0$  platný podle věty 2.3 pro všechna značení  $M$  dosažitelná z počátečního značení  $M_0$ , nazýváme  $p$ -invariantem PN-systému  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  (conservation law).  $P$ -invariant  $Y$  příslušné struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  má zde význam váhového vektoru: jeho souřadnice  $y_i$  jsou konstanty, udávající váhu značení  $m_i = M(p_i)$  jednotlivých míst  $p_i$ . Rozepsáním maticového zápisu do skalární podoby, dostáváme vztah

$$\sum y_i \cdot m_i = k, \text{ (sumace probíhá pro } i=1,2,\dots,|P|),$$

kde  $k$  je konstanta určená vztahem

$$k = Y^T M_0 = \sum y_i \cdot m_{0i}.$$

Podsystém systému  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  indukovaný nosičem  $p$ -invariantu  $P_Y$  se nazývá *konzervativní komponentou* tohoto systému (spolu se všemi místy z nosiče  $P_Y$  patří do komponenty také všechny přechody, které jsou bezprostředními sousedy těchto míst a také všechny hrany spojující tato místa a přechody).

Systém  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  je *konzervativní*, jestliže existuje  $p$ -invariant takový, že  $P_Y = P$ . Systém je striktně *konzervativní*, jestliže navíc  $y_i = 1$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, |P|$ .

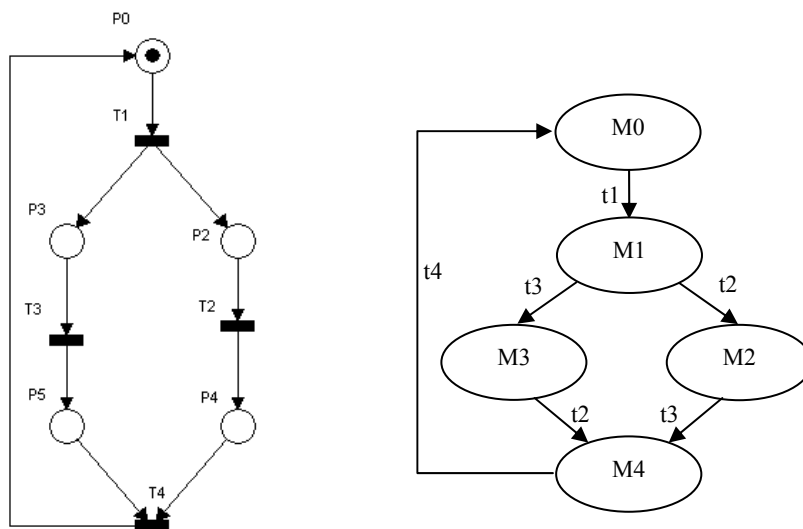


### Průvodce studiem

Je-li PN-systém konzervativní a je-li počáteční značení konečné, pak je PN-systém omezený.

#### Příklad 2.13.

Uvažujme PN-systém zobrazený na obrázku 2.26.a. V tabulce 2.5 je vypočtena množina dosažitelných značení a na obrázku 2.26.b je zobrazen graf dosažitelnosti.



Obrázek 2.26: PN-systém a jeho graf dosažitelnosti

	M0	M1	M2	M3	M4
$m_1=M(p_1)$	1	0	0	0	0
$m_2=M(p_2)$	0	1	0	1	0
$m_3=M(p_3)$	0	1	1	0	0
$m_4=M(p_4)$	0	0	1	0	1
$m_5=M(p_5)$	0	0	0	1	1
	$t_1 \rightarrow M1$	$t_1 \rightarrow M1$ $t_3 \rightarrow M3$	$t_3 \rightarrow M4$	$t_2 \rightarrow M4$	$t_4 \rightarrow M0$

Tab.2.5: Množina dosažitelných značení

Nejdříve nalezneme strukturální p-invarianty PN-systému zobrazenému na obrázku 2.25.a. a to jako nezáporná řešení systému rovnic  $Y^T \cdot C = 0$ , tj. systému

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tj. systému

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ -y_2 + y_4 &= 0, \\ -y_3 + y_5 &= 0, \\ y_1 - y_4 - y_5 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnici netřeba uvažovat, protože je lineární kombinací prvních tří. Ze zbylých rovnic je patrné, že jejich řešeními jsou vektory

$$\mathbf{Y}_1 = (1, 1, 0, 1, 0)^T,$$

$$\mathbf{Y}_2 = (1, 0, 1, 0, 1)^T$$

a všechna ostatní řešení jsou tvaru  $k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2$ ,  $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Ze složených p-invariantů je nejvýznamnější

$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = (2, 1, 1, 1, 1)^T.$$

Všechny uvedené invarianty jsou v kanonickém tvaru. Invarianty  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$  jsou minimální a tvoří úplný systém minimálních invariantů (tj. každý jiný invariant lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci s celočíselnými nezápornými koeficienty). Invariant  $\mathbf{Y}_3$  minimální není, protože např.  $\mathbf{Y}_3 \geq \mathbf{Y}_1$ .

Vzhledem k tomu, že existuje p-invariant pokrývající celou množinu P ( $P_{\mathbf{Y}_3} = P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ ), je PN-systém konzervativní, ale nikoliv striktně.

Strukturálním p-invariantům  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  odpovídají systémové p-invarianty

$$\mathbf{Y}_1^T \mathbf{M} = \mathbf{Y}_1^T \mathbf{M}_0, \mathbf{Y}_2^T \mathbf{M} = \mathbf{Y}_2^T \mathbf{M}_0, \mathbf{Y}_3^T \mathbf{M} = \mathbf{Y}_3^T \mathbf{M}_0,$$

které lze rozepsat do následujících rovnic

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_4 &= 1, \\ m_1 + m_3 + m_5 &= 1, \\ 2m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 &= 2. \end{aligned}$$

Platnost uvedených rovnic pro všechna značení dosažitelná z počátečního značení  $\mathbf{M}_0$  lze ověřit z tabulky dosažitelných značení 2.5, a nebo - díky jednoduchosti zvoleného příkladu - ověřit přímo z obrázku 2.26.

### Definice 2.20.

*T*-invariantem struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  (t-semiflow) nazýváme vektor  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{|T|})^T$ ,  $x_i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , který anulují zprava incidenční matici, tj. vektor pro který platí

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Množina  $\mathbf{T}_X = \{t_i \in T : x_i > 0\}$  se nazývá *nosičem t-invariantu X*. Je-li aspoň jedno  $x_i > 0$ , pak invariant nazýváme *netriviálním*, jsou-li všechna  $x_i \in \{0, 1\}$ , pak t-invariant nazýváme *binárním*.

### Věta 2.5.

Nechť  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  jsou t-invarianty a  $k_1, k_2$  celá nezáporná čísla. Potom platí:

1. Lineární kombinace  $k_1\mathbf{X}_1 + k_2\mathbf{X}_2$  je rovněž t-invariantem a jeho nosičem je sjednocení nosičů invariantů  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ .
2. Je-li  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \geq \mathbf{0}$ , pak  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$  je rovněž t-invariantem.

**Důkaz:**

Obdobný k důkazu věty 2.2.

**Průvodce studiem**

Petriho síť je pokryta t-invarianty, jestliže každé přechod patří do nosiče nějakého t-invariantu PN-struktury. Je-li Petriho síť pokryta t-invarianty, pak existuje t-invariant, který pokrývá celou síť (jeho nosičem je množina všech přechodů).

Množina všech t-invariantů dané PN-struktury představuje druh lineárního (vektorového) prostoru, ve kterém jsou přípustné pouze celočíselné a nezáporné lineární kombinace vektorů.

Pojmy kanonický tvar invariantu, minimální invariant, úplný systém invariantů jsou pro t-invarianty definovány stejným způsobem jako pro p-invarianty.

Výpočet úplného systému minimálních t-invariantů lze převést na výpočet úplného systému minimálních p-invariantů duální PN-struktury.

Pro výpočet t-invariantů lze použít téhož algoritmu jako pro výpočet p-invariantů, s jediným rozdílem - místo incidenční matice  $C$  použijeme její transpozici  $C^T$  (přesněji: v inicializačním kroku algoritmu klademe  $A = C^T$ ,  $B = I_n$ , kde  $I_n$  je jednotková matice řádu  $n = |T|$ ).

**Věta 2.6.**

Nechť  $X$  je t-invariantem PN-struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$ . Potom existuje PN-systém  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  takový že:

$$(\exists \sigma \in T^*) [M_0[\sigma] M_0 \wedge V_\sigma = X]$$

**Důkaz:**

Podle věty 2.3.1 platí pro libovolná značení  $M, M'$  implikace

$$M[\sigma] M' \Rightarrow M' = M + CV_\sigma,$$

neboli speciálně také

$$M_0[\sigma] M \Rightarrow M = M_0 + CV_\sigma. \quad (*)$$

Položíme-li  $V_\sigma = X$ , pak  $CV_\sigma = CX = O$  (neboť  $X$  je t-invariant) a tedy  $M = M_0$ .

Implikaci v (\*) nelze obrátit a tedy nikoliv jakákoliv posloupnost přechodů  $\sigma$  s daným charakteristickým vektorem  $V_\sigma = X$  musí být proveditelná při jakémkoliv značení  $M_0$ . S tím souvisí použití existenčních kvantifikátorů v tvrzení věty.

**Definice 2.21.**

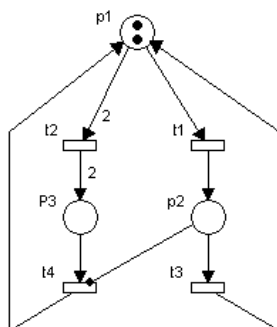
Posloupnost přechodů  $\sigma \in T^*$  pro kterou platí  $M_0[\sigma] M_0$  nazýváme *t-invariantem PN-systému*  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  (reproduction law).

Podsystém systému  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  indukovaný nosičem t-invariantu  $T_X$  se nazývá *repetiční komponentou* tohoto systému (spolu se všemi přechody z nosiče  $T_X$  patří do komponenty také všechna místa, které jsou bezprostředními sousedy těchto přechodů a také všechny hrany spojující tyto přechody a místa).

Systém  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  je *repetiční (konzistentní)*, jestliže existuje t-invariant takový, že  $T_X = T$ . Systém je striktně repetiční, jestliže navíc  $x_i = 1$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, |T|$ .

### Příklad 2.14.

Uvažujme PN-systém zobrazený na obrázku 2.27.



Obrázek 2.27: Příklad PN-systému

Nejdříve nalezneme strukturní t-invarianty PN-systému zobrazenému na obrázku 2.27. Incidenční matice je

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a t-invarianty nalezneme jako nezáporné celočíselné řešení rovnice  $C \cdot X = 0$ ,

tj. systému rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnici netřeba uvažovat, protože je lineární kombinací dalších dvou. Ze zbylých rovnic je ihned patrné, že řešeními jsou vektory

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, 1, 0)^T, \\ X_2 &= (0, 1, 0, 2)^T \end{aligned}$$

a všechny jejich lineární kombinace  $k_1 X_1 + k_2 X_2$ , např.

$$\begin{aligned} X_3 &= 2X_1 = (2, 0, 2, 0)^T, \\ X_4 &= X_1 + X_2 = (1, 1, 1, 2)^T. \end{aligned}$$

Strukturní t-invarianty  $X_1, X_2$  jsou minimální a množina  $\{X_1, X_2\}$  tvoří úplný systém. Invarianty  $X_3, X_4$  nejsou minimální. Invarianty  $X_1, X_2, X_4$  jsou v kanonickém tvaru, invariant  $X_3$  v kanonickém tvaru není.

Systémovými t-invarianty jsou např. následující posloupnosti přechodů:

- $t_1 t_3$  s charakteristickým vektorem  $X_1$  (realizace strukturního invariantu  $X_1$ )
- $t_2 t_4 t_4$  s charakteristickým vektorem  $X_2$  (realizace strukturního invariantu  $X_2$ )
- $t_1 t_1 t_3 t_3, t_1 t_3 t_1 t_3$  s charakteristickým vektorem  $X_3$  (realizace strukturního invariantu  $X_3$ )
- $t_1 t_3 t_2 t_4 t_4, t_1 t_2 t_3 t_4 t_4, \dots$  s charakteristickým vektorem  $X_4$  (realizace struktur. invariantu  $X_4$ )

Ze skutečnosti, že existuje t-invariant pokrývající celou množinu T (např. systémový invariant  $t_1 t_3 t_2 t_4$ , realizující strukturní invariant  $\mathbf{X}_4 = (1, 1, 1, 2)^T$ ), vyplývá, že PN-systém je repetiční (konzistentní), nikoliv však striktně repetiční.

Vzhledem k jednoduchosti uvažovaného PN-systému lze systémové t-invarianty odečítat přímo z obrázku 2.27.

### Definice 2.22.

Předpokládejme PN-struktury bez inhibičních hran. Potom PN-struktura  $\langle P', T', I', O' \rangle$  je duální ke struktuře  $\langle P, T, I, O \rangle$ , jestliže platí:

$$P' = T \wedge T' = P \wedge I' = O \wedge O' = I$$

*Duální  
struktura*

#### Průvodce studiem

Duální struktura vznikne z původní vzájemnou záměnou míst a přechodů a změnou orientace všech hran při zachování je jich násobností.

Z definice vyplývá: je-li struktura  $\langle P', T', I', O' \rangle$  duální ke struktuře  $\langle P, T, I, O \rangle$ , pak také  $\langle P, T, I, O \rangle$  je duální k  $\langle P', T', I', O' \rangle$ . Uvedené struktury jsou tedy duální navzájem.

### Věta 2.7.

Nechť  $\langle P', T', I', O' \rangle$ ,  $\langle P, T, I, O \rangle$  jsou vzájemně duální sítě s incidenčními maticemi  $\mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{C}$ . Potom platí:

1.  $\mathbf{C}' = \mathbf{C}^T$ ,
2. p-invariant struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  je t-invariantem struktury  $\langle P', T', I', O' \rangle$ ,
3. t-invariant struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  je p-invariantem struktury  $\langle P', T', I', O' \rangle$ .

#### Důkaz:

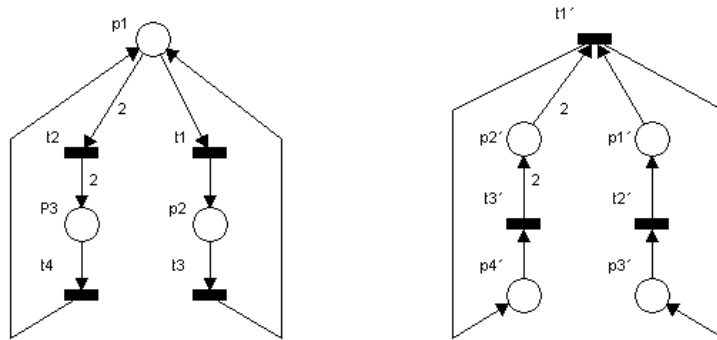
1. Plyne hned z definice.
2. Platí:  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \Leftrightarrow (\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{C})^T = (\mathbf{0}^T)^T \Leftrightarrow \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{C}' \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ .  
Je-li tedy  $\mathbf{Y}$  p-invariantem nečárkované struktury, pak je také t-invariantem čárkované struktury.
3. Platí:  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{C} \cdot \mathbf{X})^T = \mathbf{0}^T \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{0}^T \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{C}' = \mathbf{0}^T$ .  
Je-li tedy  $\mathbf{X}$  t-invariantem nečárkované struktury, pak je také p-invariantem čárkované struktury.

#### Důsledek:

Výpočet úplného systému minimálních t-invariantů dané PN-struktury může být proveden podle téhož algoritmu jako výpočet úplného systému minimálních p-invariantů s jediným rozdílem: místo s incidenční maticí  $\mathbf{C}$  pracujeme s její transpozicí  $\mathbf{C}^T$  (tj. popsany algoritmus startujeme nikoliv s  $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ , ale s  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T$ ).

### Příklad 2.15.

Na následujícím obrázku je zobrazena dvojice navzájem duálních struktur.



Obrázek 2.28: Dvojice navzájem duálních struktur

Dále uvedeme incidenční matice obou struktur (je patrné, že  $C' = C^T$ ), p-invarianty a t-invarianty obou struktur (jak je patrné, p-invariant jedné struktury je t-invariantem druhé).

Nečárkovaná struktura:

Čárkovaná struktura:

$$C = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C' = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

t-invarianty:

$$\mathbf{X}_1 = (1, 0, 1, 0)^T$$

$$\mathbf{X}_2 = (0, 1, 0, 2)^T$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = (1, 1, 1, 2)^T$$

p-invarianty:

$$\mathbf{Y}_1' = (1, 0, 1, 0)^T$$

$$\mathbf{Y}_2' = (0, 1, 0, 2)^T$$

$$\mathbf{Y}_3' = \mathbf{Y}_1' + \mathbf{Y}_2' = (1, 1, 1, 2)^T$$

p-invarianty:

$$\mathbf{Y}_1 = (1, 1, 1)^T$$

t-invarianty:

$$\mathbf{X}_1' = (1, 1, 1)^T$$

## 2.4.2 Využití invariantů při analýze P/T sítí

Následující věta ukazuje některé možnosti využití invariantů při analýze P/T sítí.

### Věta 2.8.

1. (Postačující podmínka pro omezenost PN-systému). Existuje p-invariant pokrývající celou síť  $\Rightarrow$  PN-systém je omezený.
2. (Nutná podmínka pro živost a omezenost PN-systému). PN-systém je živý a omezený  $\Rightarrow$  Existuje t-invariant pokrývající celou síť.
3. (Nutná podmínka pro živost PN-systému). Pro živý PN-systém platí:  $\mathbf{Y}$  je kladný (netriviální p-invariant  $\Rightarrow \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}_0 > 0$ ).

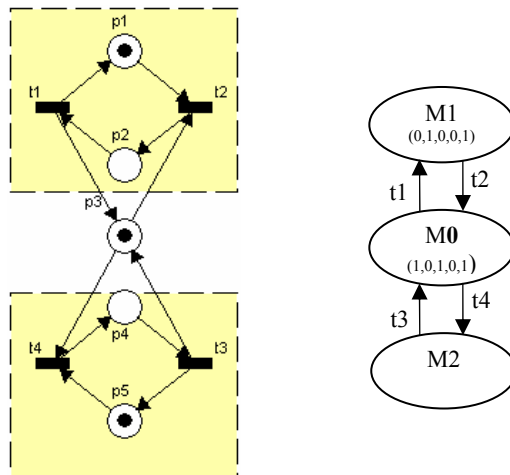
4. (Důkaz nedosažitelnosti v daném PN-systému). Existuje p-invariant  $\mathbf{Y}$  s vlastností  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M} \neq \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}' \Rightarrow$  Značení  $\mathbf{M}'$  není dosažitelné ze značení  $\mathbf{M}$ .

**Důkaz:**

1. Necht'  $\mathbf{Y}$  je p-invariant, jehož nosič je množina všech míst. Uvažujme libovolné dosažitelné značení  $\mathbf{M} \in \text{RS}(\mathbf{M}_0)$ . Pro p-invariant  $\mathbf{Y}$  platí  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}_0 = \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M} \geq \mathbf{Y}(p) \cdot \mathbf{M}(p)$ , kde  $p$  je libovolné místo z  $P$ . Protože  $\mathbf{Y}(p) > 0$ , platí pro všechna  $p$ :  $\mathbf{M}(p) \leq \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}_0 / \mathbf{Y}(p)$  a PN-systém je tedy omezený.
2. Z předpokladu živosti vyplývá, že existují posloupnosti přechodů  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  takové, že všechna  $\sigma_i$  obsahují všechny přechody a že současně platí  $\mathbf{M}_0[\sigma_1] > \mathbf{M}_1[\sigma_2] > \mathbf{M}_2[\sigma_3] > \mathbf{M}_3$ . Předpokladu omezenosti pak vyplývá, že musí existovat indexy  $i < j$  takové, že  $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_j$ . Charakteristický vektor posloupnosti přechodů  $\sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \dots \sigma_j$  je t-invariant, jehož nosičem je celá množina  $T$ .
3. Necht'  $p$  je místo patřící do nosiče p-invariantu  $\mathbf{Y}$ , tj.  $p \in P_Y$ , a uvažujme přechod  $t$ , který je sousední k místu  $p$ , tj.  $t \in \bullet p \cup p \bullet$ . Protože PN-systém je živý může být přechod  $t$  vždy znovu uchopen, tj. z každého dosažitelného značení je dosažitelné značení  $\mathbf{M}$  ve kterém je přechod  $t$  proveditelný. Jeho provedením se PN-systém dostane do značení  $\mathbf{M}'$ , tj.  $\mathbf{M}[\triangleright] \mathbf{M}'$ . Jelikož  $\mathbf{Y}$  je p-invariant, musí platit  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}_0$ . Je-li nyní  $t \in \bullet p$ , pak  $\mathbf{M}'(p) > 0$ , a protože  $p \in P_Y$  je  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}' > 0$  a tedy také  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}_0 > 0$ . Je-li  $t \in p \bullet$ , pak  $\mathbf{M}(p) > 0$ , a protože  $p \in P_Y$  je  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}' > 0$  a tedy také  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}_0 > 0$ .
4. Důkaz sporem: necht' značení  $\mathbf{M}'$  je dosažitelné ze značení  $\mathbf{M}$ . Potom existuje posloupnost přechodů  $\sigma$  taková, že  $\mathbf{M}[\sigma] > \mathbf{M}'$ . Podle věty 2.3.1 pak platí fundamentální rovnice  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C}V_\sigma$ , odkud plyne  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M} + \mathbf{Y}^T \mathbf{C}V_\sigma$ .  $\mathbf{Y}$  je p-invariant a tedy platí  $\mathbf{Y}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}^T$ . Odtud plyne  $\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{M}$ , což je ve sporu s předpokladem.

**Příklad 2.16.**

Na obrázku 2.29 je zobrazen jednoduchý PN-systém se 2 procesy a jeho graf dosažitelnosti. Z grafu dosažitelnosti vyplývá, že PN-systém je bezpečný, živý a reverzibilní.



Obrázek 2.29: PN-systém a jeho graf dosažitelnosti

Nyní budeme studovat vlastnosti daného PN-systému alternativními algebraickými metodami strukturní analýzy, tj. pomocí p- a t-invariantů příslušné PN-struktury. Z obrázku odečteme incidenční matici  $C$  - viz následující tabulka.

$C = C(p,t)$	$T_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
--------------	-------	-------	-------	-------

p <sub>1</sub>	1	-1	0	0
p <sub>2</sub>	-1	1	0	0
p <sub>3</sub>	1	-1	1	-1
p <sub>4</sub>	0	0	-1	1
p <sub>5</sub>	0	0	1	-1

Tab.2.6: Incidenční matice PN-struktury

P-invarianty PN-struktury nalezneme jako nezáporná celočíselná řešení maticové rovnice

$Y^T \cdot C = 0^T$ . Jejím rozepsáním dostáváme soustavu rovnic:

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

$$y_3 - y_4 + y_5 = 0$$

$$-y_3 + y_4 - y_5 = 0$$

2. rovnice je násobkem 1. a 4. rovnice je násobkem 3. Stačí tedy pracovat pouze s 1. a 3. rovnicí. Snadno nalezneme následující řešení:

$$Y_1 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$$

$$Y_2 = (0, 0, 0, 1, 1)^T$$

$$Y_3 = (0, 1, 1, 1, 0)^T$$

P-invariantem je i každá lineární kombinace  $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ . Těmto strukturním p-invariantům odpovídají následující systémové p-invarianty ( $m_i = M(p_i)$ ):

$$m_1 + m_2 = 1$$

$$m_4 + m_5 = 1 \quad (*)$$

$$m_2 + m_3 + m_4 = 1$$

Složenému strukturnímu p-invariantu  $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$  odpovídá systémový p-invariant

$$m_1 + 2m_2 + m_3 + 2m_4 + m_5 = 3 \quad (**)$$

pokrývající všechna místa, tj. PN-systém je tedy konzervativní (ale nikoliv striktně). Z (\*\*), vyplývá, že PN-systém je omezený (tvrzení 1. věty 2.8) a z (\*) navíc, že je bezpečný (žádné místo nemůže být větší než 1).

T-invarianty nalezneme jako nezáporná celočíselná řešení maticové rovnice  $C \cdot X = 0$ . Jejím rozepsáním dostáváme soustavu rovnic:

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_3 + x_4 = 0$$

Vyloučením závislých rovnic dostáváme soustavu:

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_3 + x_4 = 0$$

ze které vyplývá, že následující dvojice vektorů



$$X_1 = (1,1,0,0)^T,$$

$$X_2 = (0,0,1,1)^T,$$

tvoří úplný systém minimálních t-invariantů. Strukturálním t-invariantem je také každá jejich lineární kombinace  $X = c_1X_1 + c_2X_2$ , např.  $X_3 = X_1 + X_2 = (1,1,1,1)^T$ .

Strukturálním t-invariantům  $X_1, X_2, X_3$  odpovídají systémové t-invarianty (posloupnosti přechodů převádějící počáteční značení opět v počáteční značení):

$X_1$ :  $t_2t_1$  ale nikoliv  $t_1t_2$

$X_2$ :  $t_4t_3$  ale nikoliv  $t_3t_4$

$X_3$ :  $t_2t_1t_4t_3, t_4t_3t_2t_1$  ale nikoliv jiné permutace přechodů  $t_1, t_2, t_3, t_4$

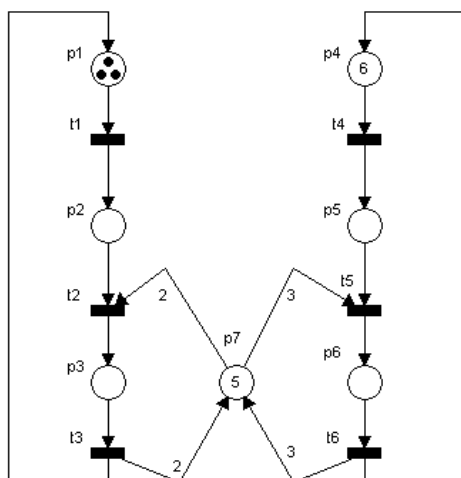
Protože existuje t-invariant pokrývající celou síť (např.  $t_2t_1t_4t_3$ ) je PN-systém repetiční (konzistentní) a to striktně (neboť  $X_3 = (1,1,1,1)^T$ ).

### Průvodce studiem

Invarianty PN-systémů můžeme mnohdy stanovit přímo ze zadání PN-systému bez toho, že bychom byli nuceni formálně počítat invarianty příslušných PN-struktur. To platí pro jednoduché PN-systémy, ale často i pro složitější systémy, jsou-li dobře navrženy (dobrý návrh systému počítá s následnou analýzou a je strukturován tak, aby analýza byla snadno proveditelná, což speciálně znamená, aby invarianty byly na prvý pohled viditelné). U složitějších systémů hrozí však riziko, že některé invarianty mohou být přehlédnuty.

### Příklad 2.17.

Uvažujme PN-systém zobrazený grafovým diagramem na obrázku 2.30. Lze dokázat, že množina dosažitelných značení (stavů) tohoto systému má 105 prvků a s rostoucím počtem tokenů v místech  $p_1, p_4$  a  $p_7$  dále prudce stoupá. Analýza metodou stavového prostoru (pomocí grafu dosažitelnosti) je pracná a postupně se stává prakticky nemožnou. Naproti tomu strukturální analýza pomocí p-invariantů a t-invariantů je podstatně jednodušší a její pracnost je stále stejná a nezávislá na počtu tokenů v místech.



Obrázek 2.30: Model PN se 2 typy procesů sdílející 5 zdrojů

U tohoto PN-systému lze invarianty snadno odečítat přímo z obr. 2.30. Úplný systém minimálních p-invariantů je dán následujícími třemi rovnicemi:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= 3, \\ m_4 + m_5 + m_6 &= 6, \\ 2m_3 + 3m_6 + m_7 &= 5. \end{aligned}$$

PN-systém obsahuje tedy tři konzervativní komponenty s nosiči  $\{p_1, p_2, p_3\}$ ,  $\{p_4, p_5, p_6\}$ ,  $\{p_3, p_6, p_7\}$ . Tyto komponenty pokrývají celý PN-systém. Sečtením uvedených třech rovnic dostáváme rovnici

$$m_1 + m_2 + 3m_3 + m_4 + m_5 + 4m_6 + m_7 = 14,$$

která představuje konzervativní zákon pro celý systém. PN-systém je tedy konzervativní, ale nikoliv striktně. Z konzervativnosti PN-systému vyplývá jeho omezenost. Analýzou výše uvedených rovnic lze odvodit další poznatky, např.

$$m_1, m_2 \in \{0, 1, 2, 3\}, m_3 \in \{0, 1, 2\}, m_4, m_5 \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}, m_6 \in \{0, 1\}$$

(tj. místo  $p_6$  je bezpečné).

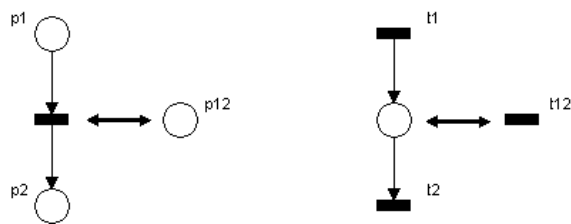
Také t-invarianty lze odečítat bezprostředně z grafového obrázku PN-systému. Úplný systém minimálních t-invariantů je tvořen následujícími dvěma posloupnostmi přechodů:  $t_1 t_2 t_3$ ,  $t_4 t_5 t_6$ , které představují dvě repetiční komponenty s nosiči  $\{t_1, t_2, t_3\}$ ,  $\{t_4, t_5, t_6\}$ . Tyto dvě repetiční komponenty se kryjí s výše určenými konzervativními komponentami a pokrývají celý PN-systém. Repetičními posloupnostmi daného PN-systému (tj. PN-systému s daným počátečním značením) jsou např. posloupnosti přechodů  $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$ ,  $t_4 t_5 t_6 t_1 t_2 t_3$ ,  $t_1 t_4 t_2 t_3 t_5 t_6$ , ... (ale nikoliv např.  $t_2 t_1 t_3 t_4 t_5 t_6$ ,  $t_1 t_3 t_2 t_4 t_5 t_6, \dots$ ). PN-systém je tedy repetiční (a to striktně - ve striktně repetiční posloupnosti se každý přechod vyskytuje právě jednou). PN-systém je tedy také živý.

### 2.4.3 Grafové techniky strukturní analýzy

#### *Metoda redukce PN-systémů*

Podstatou této metody je postupná transformace daného PN-systému na PN-systémy stále jednodušší až nakonec získáme PN-systém, jehož stavová analýza je buď triviální, nebo alespoň snadno zvládnutelná. Každý krok transformace spočívá v použití nějakého redukčního pravidla (reduction rule) podle kterého nahrazujeme nějaký podsystém daného systému jiným jednodušším podsystémem, přičemž jsou zachovány některé vybrané vlastnosti PN-systému (jako jsou omezenost, živost, reverzibilita). Jestliže jsme při transformaci používali pravidla, která všechna zachovávají daný soubor vlastností, pak výsledný PN-systém tyto vlastnosti má také, pokud je má výchozí systém.

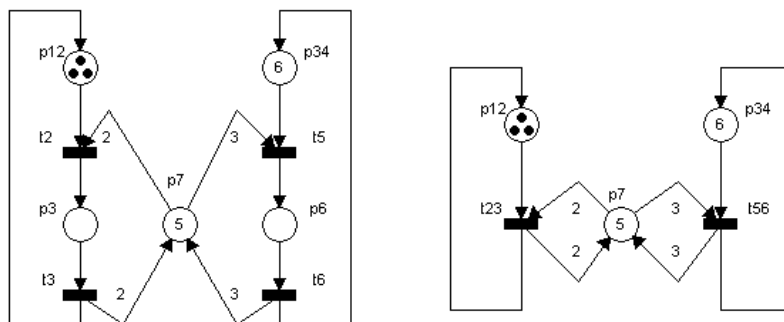
Ukázka dvou jednoduchých redukčních pravidel, které evidentně zachovávají omezenost a živost PN-systémů je na obrázku 2.31. Při analýze PN-systémů nahrazujeme (zjednodušujeme) levou stranu pravou stranou, při syntéze nahrazujeme (rozvíjíme) pravou stranu stranou levou. K pravidlu spojení sekvence míst (fusion of series places) dodejme, že každá případná další vstupní hrana místa  $p_1$  je také vstupní hranou místa  $p_{12}$  a podobně také každá další výstupní hrana místa  $p_2$  je také výstupní hranou místa  $p_{12}$ . Navíc počet tokenů v místě  $p_{12}$  musí být roven součtu počtu tokenů v místech  $p_1$  a  $p_2$ . Pro pravidlo spojení sekvence přechodů (fusion of series transitions) platí tatáž poznámka o případných dalších vstupních hranách přechodu  $t_1$  a výstupních hranách přechodu  $t_2$ . V místě mezi oběma přechody se nesmí nacházet žádné tokeny.



Obrázek 2.31: Spojení sekvence a) míst, b) přechodů

### Příklad 2.18.

Uvažujme PN-systém definovaný v příkladě 2.18 obrázkem 2.30. Pomocí pravidla o spojení sekvence míst transformujeme PN-systém z tohoto obrázku na PN-systém zobrazený na obrázku 2.32.a následně pomocí pravidla o spojení sekvence přechodů na PN-systém zobrazený na obrázku 2.32.b. Zatímco původní systém má 105 stavů (dosažitelných značení), druhý systém má již jen 5 stavů a konečný systém má již jen 1 stav. Jeho analýza je tedy triviální: systém je živý a omezený (6-omezený). Protože transformační (redukční) pravidla zachovávají omezenost i živost, musí být i výchozí systém z obrázku 2.30 omezený a živý.



Obrázek 2.32: Aplikace pravidla o spojení sekvence přechodů

### Zámky a pasti

V této části předpokládáme Petriho sítě jen s jednoduchými hranami (tj. jen s násobností 1) a bez inhibičních hran. Předpokládáme tedy obyčejné Petriho sítě (ordinary Petri nets).

### Definice 2.23.

Podmnožinu  $Q$  množiny míst  $P$  ordinární struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  nazveme *zámkem* (lock, siphon), jestliže platí

$$\bullet Q \subseteq Q^*$$

Podmnožinu  $Q$  množiny míst  $P$  ordinární struktury  $\langle P, T, I, O \rangle$  nazveme *pastí* (trap), jestliže platí

$$Q^* \subseteq \bullet Q.$$

Kvůli úplnosti dodejme, že

$$\bullet Q = \cup_{p \in Q} \{ \bullet p \}, \quad Q^* = \cup_{p \in Q} \{ p^* \}, \quad \bullet p = \{ t \in T : O(t, p) > 0 \}, \quad p^* = \{ t \in T : I(t, p) > 0 \}.$$

### Příklad 2.19.

Na obr. 2.33 jsou zobrazeny jednoduché zámky a na obrázku 2.34 jednoduché pasti. Zámky, resp. pasti, jsou vždy tvořeny vyznačenou množinou míst  $Q = \{p_1, p_2\}$ . Pro zobrazené PN-struktury platí:

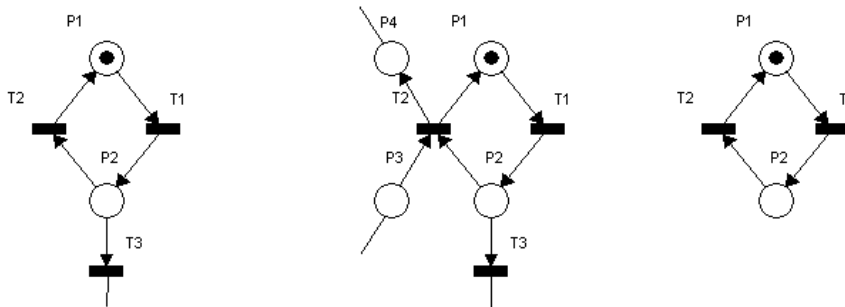
*Záмок a past*

Obrázek 2.33.a,b:  $\{t1,t2\} = \bullet Q \subseteq Q^\bullet = \{t1,t2,t3\}$

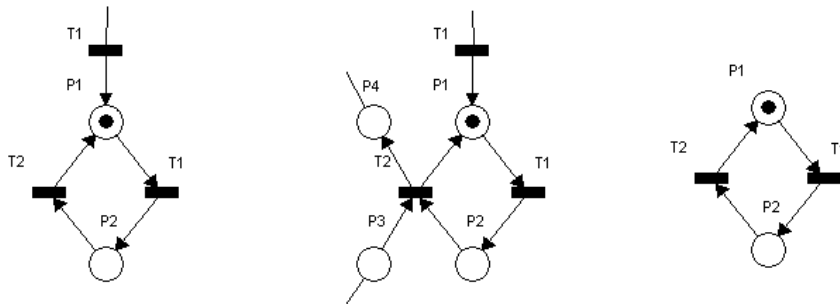
Obrázek 2.33.c:  $\{t1,t2\} = \bullet Q \subseteq Q^\bullet = \{t1,t2\}$

Obrázek 2.34.a,b:  $\{t1,t2,t3\} = Q^\bullet \subseteq \bullet Q = \{t1,t2\}$

Obrázek 2.34.c:  $\{t1,t2\} = Q^\bullet \subseteq \bullet Q = \{t1,t2\}$



Obrázek 2.33: Příklady zámků



Obrázek 2.34: Příklady pastí

### Průvodce studiem

Zámek je podmnožina množiny míst tvořená místy, která když ztratí tokeny, nemohou je již nikdy získat. Naproti tomu past je podmnožina množiny míst tvořená místy, která když získají tokeny, nemohou je již nikdy ztratit.

Z poslední definice vyplývá, že sjednocení dvou zámků je zámek a sjednocení dvou pastí je past. Pro Petriho síť mohou být tedy definovány minimální zámky a pasti.

Zámky a pasti lze využít k analýze PN-systémů. Tak např. obsahuje-li PN-struktura zámek, který při počátečním značení neobsahuje žádný token, pak PN-systém není živý. Obsahuje-li PN-struktura past, která při počátečním značení obsahuje aspoň jeden token, pak PN-systém je bez uzamčení.

### Shrnutí

Všechny vlastnosti Petriho sítí dokázané pouze na základě struktury jsou platné pro všechny PN-systémy, které lze získat z PN-struktury přidáním libovolného počátečního značení. Ke strukturální analýze se uchylujeme v případech, kdy selhává stavová analýza Petriho sítí založená na pojmu grafu dosažitelnosti.

Mezi metody strukturální analýzy patří metody lineární algebry, pracující s maticovou reprezentací PN-struktur, a grafové metody, pracující přímo s grafovým popisem Petriho sítí.

Prvek incidenční matice PN-struktury udává změnu počtu tokenů v místě  $p$  při provedení přechodu  $t$ . Sloupec matice představuje změnu počtu tokenů v jednotlivých místech sítě při provedení přechodu  $t$ . Řádek matice reprezentuje změnu značení místa  $p$  při provedení jednotlivých přechodů sítě. Při zobrazení struktury Petriho sítě pomocí incidenční matice může docházet ke ztrátě informace. Existence inhibičních hran se nijak neprojeví na incidenční matici.

Duální struktura vznikne z původní vzájemnou záměnou míst a přechodů a změnou orientace všech hran při zachování je jich násobností.

Podstatou metody redukce PN-systémů je postupná transformace daného PN-systému na PN-systémy stále jednodušší až nakonec získáme PN-systém, jehož stavová analýza je buď triviální, nebo alespoň snadno zvládnutelná. Každý krok transformace spočívá v použití nějakého redukčního pravidla (reduction rule) podle kterého nahrazujeme nějaký podsystém daného systému jiným jednodušším podsystémem, přičemž jsou zachovány některé vybrané vlastnosti PN-systémů (jako jsou omezenost, živost, reverzibilita).

### Pojmy k zapamatování

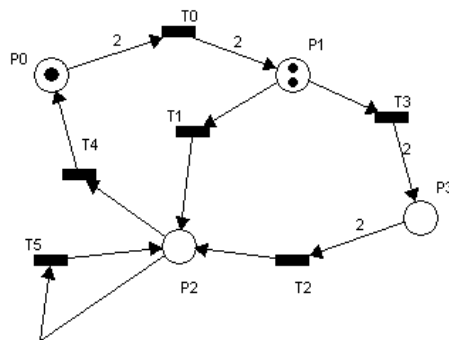
- Incidenční matice,
- P-invariant,
- T-invariant,
- duální struktura,
- zámek,
- past.

### Kontrolní otázky

1. Jakým způsobem se v Petriho sítích zjišťují  $p$ -invarianty a  $t$ -invarianty?
2. Jak k původní PN-struktuře vytvoříme duální strukturu?

### Cvičení

1. Napište matici incidence pro následující Petriho sít'.



### Řešení

1. Matice incidence:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & +2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.5 Podtřídy Petriho sítí

**Studijní cíle:** Po prostudování této podkapitoly bude studující schopen rozlišit jednotlivé podtřídy Petriho sítí.

**Klíčová slova:** Automatová síť, synchronizační síť, síť s volným výběrem.

**Potřebný čas:** 20 minut

Tato podkapitola je zaměřena na speciální typy Petriho sítí, jakými jsou automatové Petriho sítě, synchronizační Petriho sítě a sítě s volným výběrem. Všechny uvedené typy jsou speciálním případem tzv. obyčejných Petriho sítí a ty opět speciálním případem tzv. zobecněných Petriho sítí.

### Definice 2.5.1.

*Zobecněná Petriho síť* (generalized Petri net - GPN) je PN-systém  $\langle P, T, I, O, H, M_0 \rangle$  s prázdnou množinou inhibičních hran  $H = \emptyset$ , tj. PN-systém  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ .

*Obyčejná Petriho síť* (ordinary Petri net - OPN) je zobecněná Petriho síť  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ , kde hodnotami vstupní a výstupní funkce  $I, O$  nejsou multimnožiny, ale množiny (tj. všechny hrany mají stejnou násobnost 1).

*Automatová síť* (state-machine Petri net, P-system) je obyčejná Petriho síť, ve které každý přechod má právě jedno vstupní a právě jedno výstupní místo, tj.

$$(\forall t \in T)[|\bullet t| = |t \bullet| = 1].$$

*Synchronizační síť* (marked graph, synchronization graph, T-system) je obyčejná Petriho síť, kde každé místo má právě jeden vstupní a právě jeden výstupní přechod, tj.

$$(\forall p \in P)[|\bullet p| = |p \bullet| = 1].$$

*Síť s volným výběrem* (volná síť, free-choice Petri net) je obyčejná Petriho síť, ve které všichni předchůdci každého přechodu mají stejnou množinu následníků, tj.

$$(\forall t \in T)(\forall p, p' \in \bullet t)[\bullet p = p' \bullet].$$

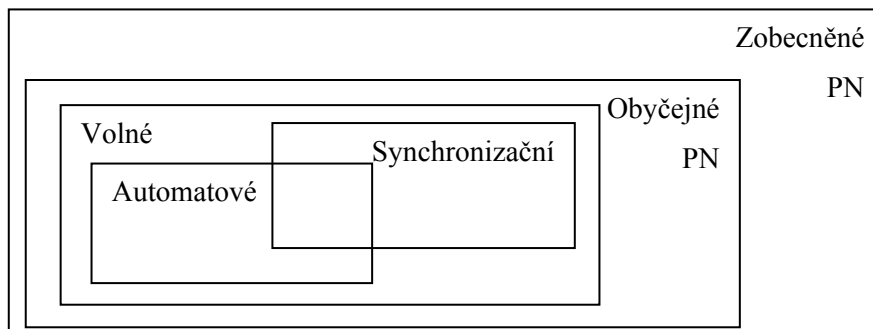
*Automatová a  
synchronizační  
síť*

#### Průvodce studiem

Vztahy mezi třídami sítí zobecněných, obyčejných, volných, automatových a synchronizačních jsou zobrazeny na následujícím obrázku. Z předchozí definice vyplývá, že automatová síť je duální síť k synchronizační síti a obráceně. Duální síť k volné síti je opět volná síť.

Automatové sítě nejsou schopny vyjádřit paralelismus, synchronizační sítě nejsou schopny vyjádřit alternativu. Volné sítě jsou schopny zobrazit obojí, i když v omezeném rozsahu. V linii od P/T sítí (přes zobecněné a obyčejné sítě) k volným sítím a dále k synchronizačním (nebo automatovým) sítím postupně klesá modelovací síla sítí, ale

současně se zlepšují možnosti a snadnost jejich analýzy. Volné sítě představují ideální kompromis mezi oběma protichůdnými tendencemi.



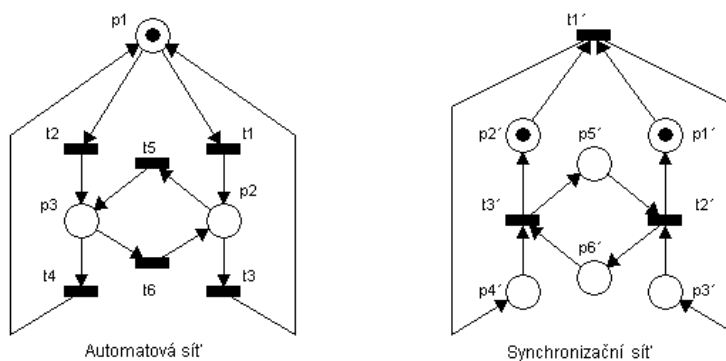
Obrázek 2.35: Vztahy mezi podtřídami Petriho sítí

Definici volné sítě lze ekvivalentním způsobem formulovat také takto:

Pro každou hranu  $(p,t)$  vedoucí z místa  $p$  do přechodu  $t$ , platí, že z každého místa  $p' \in {}^*t$  míří hrana do každého přechodu  $t' \in p^*$ .

#### Příklad 2.20.

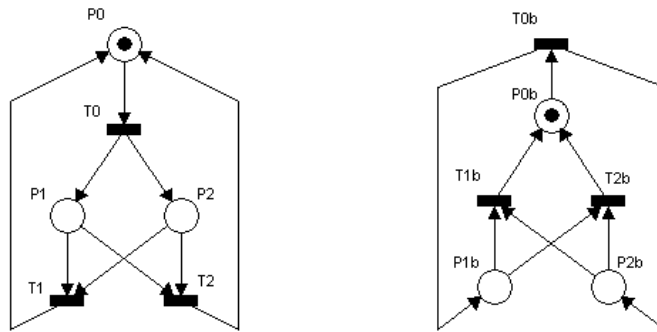
Na následujícím obrázku je zobrazen příklad vzájemně duálních Petriho sítí - automatová síť a synchronizační síť. Zobrazení přechodů automatové sítě je nadbytečné - pomocí symbolů  $t_1, t_2, \dots, t_6$  můžeme ohodnotit přímo hrany spojující místa. Získáme tak diagram konečného automatu.



Obrázek 2.36: Duální Petriho sítě – automatová a synchronizační síť

#### Příklad 2.21.

Na následujícím obrázku jsou zobrazeny sítě s volným výběrem. Tyto sítě jsou navzájem duální.



Obrázek 2.37: Vzájemně duální sítě s volným výběrem

## Shrnutí

Automatové sítě nejsou schopny vyjádřit paralelismus. Synchronizační sítě nejsou schopny vyjádřit alternativu. Volné sítě jsou schopny zobrazit obojí, i když v omezeném rozsahu.

V linii od P/T sítí (přes zobecněné a obyčejné sítě) k volným sítím a dále k synchronizačním (nebo automatovým) sítím postupně klesá modelovací síla sítí, ale současně se zlepšují možnosti a snadnost jejich analýzy. Volné sítě představují ideální kompromis mezi oběma protichůdnými tendencemi.

## Pojmy k zapamatování

- Automatová síť,
- synchronizační síť,
- síť s volným výběrem

## Kontrolní otázky

1. Jakým je vztah mezi automatovými a volnými sítěmi?
2. Jakým je vztah mezi synchronizačními a volnými sítěmi?



## 3 Jazyky Petriho sítí

### 3.1 Petriho síť a konečný automat

**Studijní cíle:** Připomenout si pojmy z teorie jazyků a automatů, uvědomit si souvislost s Petriho sítěmi, naučit se k jazyku rozpoznávanému konečným automatem nalézt značenou Petriho síť.

**Klíčová slova:** Konečný automat, ohodnocená Petriho síť, jazyk rozpoznávaný Petriho sítí.

**Potřebný čas:** 30 minut.

V úvodu této podkapitoly bude nejprve připomenuto několik základních pojmů z teorie jazyků a automatů.

#### Definice 3.1.

Jazyk  $L$  nad abecedou  $A$  je libovolně zvolená podmnožina množiny všech slov nad touto abecedou, tj.  $L \subseteq A^*$ , kde  $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$ ,  $A^0 = \{e\}$ .

*Konečný automat*

*Konečný automat* FA (finite automaton) je pětice  $\langle Q, A, \delta, q_0, F \rangle$ , kde  $Q$  je neprázdňá konečňá množina stavů,  $A$  neprázdňá konečňá množina vnějších symbolů (vnější abeceda),  $\delta$  je zobrazení  $Q \times A \rightarrow Q$  (přechodová funkce),  $q_0 \in Q$  (počáteční stav) a  $F \subseteq Q$  (množina koncových stavů).

Jazyk rozpoznávaný konečným automatem  $FA = \langle Q, A, \delta, q_0, F \rangle$  je podmnožina  $L(FA)$  množiny všech slov nad abecedou  $A$  definovaná takto:

$$L(FA) = \{w \in A^* : \delta^*(q_0, w) \in F\},$$

kde  $\delta^*$  je zobrazení  $Q \times A^* \rightarrow Q$  (zobecněňá přechodová funkce odpovídající přechodové funkci).

#### Definice 3.2.

*Ohodnocená Petriho síť* (labeled PN - LPN) je čtveřice  $\langle \langle P, T, I, O, M_0 \rangle, A, \lambda, M_f \rangle$ , kde  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$  je OPN nebo GPN (obyčejňá nebo zobecněňá Petriho síť),  $A$  je abeceda, tj. neprázdňá konečňá množina symbolů,  $\lambda$  je zobrazení  $T \rightarrow A \cup \{e\}$  zvané ohodnocení (labeling) přechodů a  $M_f \subseteq RS(M_0)$  je podmnožina množiny dosažitelných značení, tzv. množina koncových značení.

*Ohodnocená Petriho síť*

Jazyk rozpoznávaný ohodnocenou Petriho sítí  $LPN = \langle \langle P, T, I, O, M_0 \rangle, A, \lambda, M_f \rangle$  je podmnožina množiny všech slov nad abecedou  $A$  definovaná takto:

$$L(LP\!N) = \{w \in A^* : (\exists \sigma \in T^*)(\exists M \in M_f) [w = \lambda^*(\sigma) \wedge M_0[\sigma > M]]\},$$

kde  $\lambda^*$  je zobecněňé zobrazení, tj. zobrazení  $T^* \rightarrow A^*$  definované takto:

je-li  $\sigma = t_{(1)}t_{(2)}\dots t_{(k)}$ , pak  $\lambda^*(\sigma) = \lambda(t_{(1)})\lambda(t_{(2)})\dots \lambda(t_{(k)})$ .

#### Průvodce studiem

Množina všech sekvencí (posloupností přechodů) spustitelných z počátečního značení představuje prefixový jazyk nad abecedou  $T$ , rozpoznávaný Petriho sítí  $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ . Tento jazyk charakterizuje všechna možná chování uvažované Petriho sítě.

V souvislosti s rozpoznáváním jazyků Petriho sítěmi vznikají dvě úlohy:

1. K dané (značené) Petriho síti nalézt jazyk, který je touto sítí rozpoznáván, tj. charakterizovat tento jazyk generativní gramatikou, regulárním výrazem či nějakým jiným způsobem.
2. K danému jazyku (charakterizovanému gramatikou, regulárním výrazem, výčtem vlastností) nalézt značenou Petriho síť, která jej rozpoznává.

Některé speciální případy definice ohodnocení přechodů:

- $A=T$  a  $\lambda$  je identické zobrazení.
- $\lambda$  je obecné zobrazení  $T \rightarrow A$  (různé přechody mohou mít i stejná ohodnocení).
  - $\lambda$  je injektivní zobrazení  $T \rightarrow A$ , tj. platí:  $t \neq t' \Rightarrow \lambda(t) \neq \lambda(t')$  (různé přechody mají vždy různá ohodnocení).
- $\lambda$  je obecné zobrazení  $T \rightarrow A \cup \{e\}$  (přechody mohou být ohodnoceny zcela libovolně, některé přechody mohou být dokonce bez ohodnocení).

Pokud ohodnocovací funkce  $\lambda(t)$  není blíže specifikována, předpokládáme poslední nejobecnější případ.

Některé speciální případy definice množiny koncových značení. Množina koncových značení  $M_f$  není libovolně zvolenou podmnožinou množiny  $RS(M_0)$  všech dosažitelných značení, ale splňuje ještě jistou dodatečnou podmínku.

- *Jazyk typu G.* Spolu s každým značením patří do koncové množiny  $M_f$  i všechna větší značení, tj.

$$M' \in M_f \wedge M'' \supset M' \Rightarrow M'' \in M_f.$$

- *Jazyk typu T.* Množina koncových značení je rovna množině uzamčení (deadlocků) Petriho sítě, tj.

$$M \in M_f \Leftrightarrow E(M) = \emptyset.$$

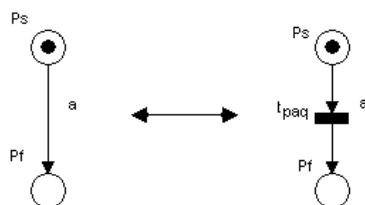
- *Jazyk typu P.* Množina koncových značení splývá s množinou všech dosažitelných značení, tj.

$$M_f = RS(M_0).$$

Tento jazyk se vyznačuje vlastností  $uv \in L \Rightarrow u \in L$  (kde  $u, v$  jsou slova v abecedě  $A$ ) a nazývá se proto *prefixovým jazykem*.

- Pokud typ jazyka není blíže specifikován, předpokládáme obecný případ, kdy na množinu koncových stavů  $M_f$  neklademe žádné podmínky. V tomto případě hovoříme o *jazyku typu L*.

Různé alternativy ohodnocení přechodů se mohou libovolně kombinovat s různými alternativami definice množiny koncových značení.



Obrázek 3.1: Konečný automat a odpovídající Petriho síť

### Definice 3.3.

Standardní počáteční značení ohodnocené Petriho sítě  $\langle\langle P, T, I, O, M_0 \rangle, A, \lambda, M_f \rangle$  je značení  $M_0$  s následujícími vlastnostmi

$$(\exists p_s \in P)[M_0(p_s)=1 \wedge (\forall p \in (P - \{p_s\}))][M_0(p)=0],$$

tj. při počátečním značení  $M_0$  existuje místo  $p_s$ , které jako jediné obsahuje token (jediný), zatímco všechna ostatní místa jsou bez tokenů.

Standardní množina koncových značení ohodnocené Petriho sítě je pak množina  $M_f$  s následujícími vlastnostmi

$$M_f = \{M_f\} \wedge (\exists p_f \in P)[M_f(p_f)=1 \wedge ((\forall p \in (P - \{p_f\}))][M_f(p)=0]],$$

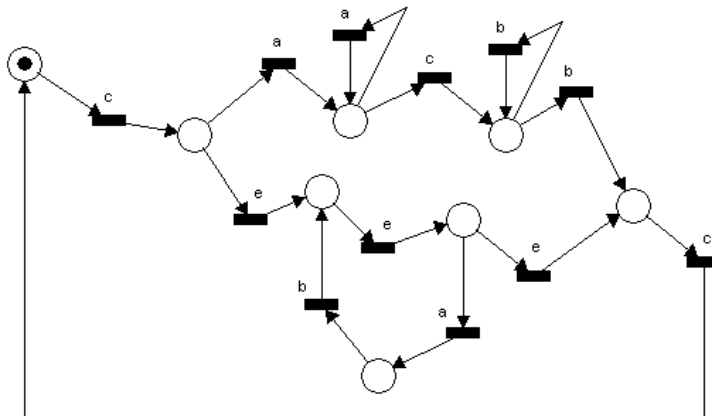
tj. množina  $M_f$  koncových značení obsahuje pouze jediné značení  $M_f$ , a to takové, že při něm jen jediné místo  $p_f$  obsahuje token (jediný) a všechna ostatní místa jsou bez tokenů.

Ohodnocená Petriho síť je ve *standardním tvaru*, jestliže jak její počáteční značení, tak i množina koncových značení, jsou standardní.

Standardní  
počáteční  
značení

### Příklad 3.1.

Pomocí Petriho sítě vyjádříme regulární jazyk nad abecedou  $A = \{a, b, c\}$ , charakterizovaný regulárním výrazem  $c(a^+cb^+(ab)^*)c$ . Rozpoznávající síť ve standardním tvaru je na následujícím obrázku.



Obrázek 3.2: Petriho síť pro daný regulární jazyk

## 3.2 Chomského hierarchie

**Studijní cíle:** Uvědomit si vzájemný vztah PN-jazyků a jazyků podle Chomského hierarchie.

**Klíčová slova:** Gramatika, Chomského klasifikace, PN-jazyk.

**Potřebný čas:** 45 minut.

Nejprve připomeneme několik základních pojmů z teorie jazyků.

### Definice 3.4.

Gramatika je čtveřice  $G = \langle N, T, S, P \rangle$ , kde  $N$  a  $T$  jsou dvě disjunktní konečné abecedy,  $S \in N$  a  $P$  je konečná podmnožina kartézského součinu  $(N \cup T)^* N (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$ .

Gramatika a  
jazyk  
generovaný  
gramatikou

Množina  $N$  se nazývá *abecedou neterminálních symbolů* (neterminálů, proměnných), množina  $T$  *abecedou terminálních symbolů* (terminálů, konstant) a  $S$  je *počáteční symbol*. Prvky množiny  $P$  jsou *přepisovací pravidla* gramatiky. Přepisovací pravidla mají tvar  $\alpha \rightarrow \beta$ , kde  $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$  přičemž obsahuje aspoň jeden neterminál.

*Jazyk*  $L(G)$  generovaný gramatikou  $G$  je množina všech slov v terminální abecedě  $T$ , které lze odvodit z počátečního symbolu, tj.

$$L(G) = \{w \in T^* : S \Rightarrow^* w\}.$$

Podle Chomského klasifikujeme gramatiky a jimi generované jazyky v závislosti na tvaru přepisovacích pravidel takto: gramatiku  $G = \langle N, T, S, P \rangle$  nazýváme

- *neomezenou (typu 0)*, jestliže na množinu přepisovacích pravidel neklademe žádná omezení, tj. mají-li přepisovací pravidla tvar  $\alpha X \beta \rightarrow \gamma$ ,
- *kontextovou (typu 1)*, jestliže všechna přepisovací pravidla mají tvar  $\alpha X \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$ , kde  $|\gamma| > 0$  (jedinou výjimkou může být pravidlo  $S \rightarrow e$ , jehož výskyt v seznamu pravidel však znamená, že počáteční symbol  $S$  se nesmí nacházet na pravé straně žádného přepisovacího pravidla),
- *bezkontextovou (typu 2)*, jestliže všechna přepisovací pravidla mají tvar  $X \rightarrow \gamma$ ,
- *regulární (typu 3)*, jestliže přepisovací pravidla mají tvar  $X \rightarrow wY$  nebo  $X \rightarrow w$ .

Připomeňme, že  $X, Y \in N$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*$ ,  $w \in T^*$ .

### Příklad 3.2.

$L_1 = \{a^n b^n : n > 0\}$  ... bezkontextový, ale nikoliv regulární jazyk,

$L_2 = \{ww^R : w \in A^*\}$  ... bezkontextový, ale nikoliv regulární jazyk,

$L_3 = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$  ... kontextový, ale nikoliv bezkontextový jazyk,

$L_3 = \{ww : w \in A^*\}$  ... kontextový, ale nikoliv bezkontextový jazyk,

$L_4 = \{a^n b^m c^n d^m : n > 0, m > 0\}$  ... kontextový, ale nikoliv bezkontextový jazyk.

### Definice 3.5.

*PN-jazyk* je jazyk, ke kterému existuje LPN (značená obyčejná nebo zobecněná Petriho síť), která jej charakterizuje (rozpoznává či generuje).

*PN-jazyk*

### Věta 3.1.

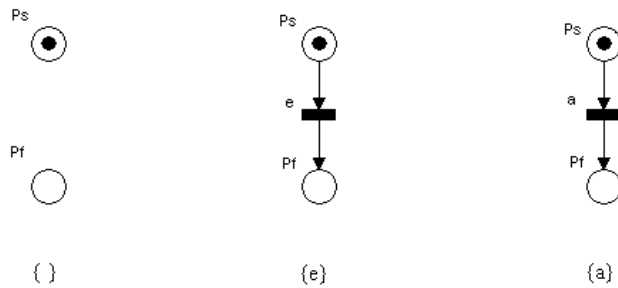
Každý regulární jazyk je PN-jazyk.

### Důkaz:

Důkaz lze vést trojím způsobem podle způsobu definice regulárního jazyka:

1. Regulární jazyk je jazyk, který lze získat z elementárních jazyků ( $\emptyset, \{e\}, \{a\}$ ) použitím konečného počtu regulárních operací (sjednocení, zřetězení a iterací).
2. Regulární jazyk je jazyk, který je rozpoznatelný konečným automatem.
3. Regulární jazyk je jazyk, který je generovatelný regulární gramatikou.

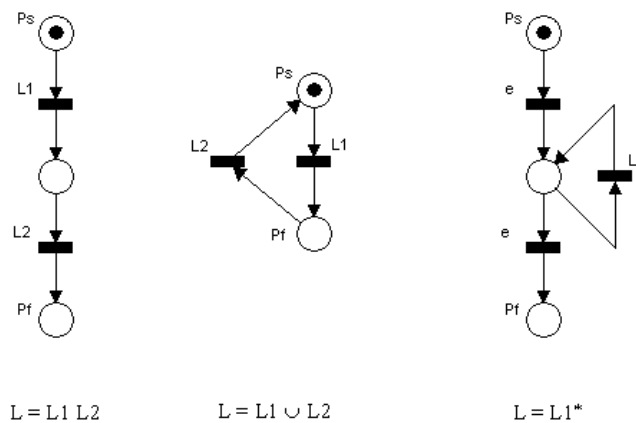
Důkaz na základě 1. definice: Na obrázku 3.3 jsou zobrazeny LPN ve standardním tvaru vyjadřující elementární jazyky  $\{ \}, \{e\}, \{a\}$  (prázdný jazyk, neprázdný jazyk tvořený prázdným slovem, jazyk tvořený jediným jednopísmenným slovem).



Obrázek 3.3: LPN vyjadřující elementární jazyky

Na obrázku 3.4 jsou zobrazeny tři základní operace, pomocí nichž lze konstruovat regulární jazyky:

- zřetězení:  $L=L_1L_2=\{w: w=uv, u \in L_1, v \in L_2\}$
- sjednocení:  $L = L_1 \cup L_2 = \{w: w \in L_1 \vee w \in L_2\}$
- iterace:  $L=L_1^* = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \dots = \{ε\} \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \dots$



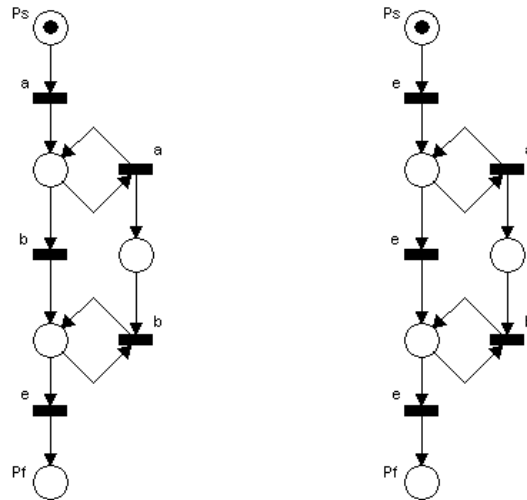
Obrázek 3.4: Základní operace pro konstrukci regulárních jazyků

**Věta 3.2.**

Ne každý PN-jazyk je regulární, tj. existuje PN-jazyk, který není regulární.

**Důkaz:**

Takovým jazykem je např. jazyk  $L_1 = \{a^n b^n: n > 0\}$  nebo  $L_1' = \{a^n b^n: n \geq 0\}$ , kde  $n$  je libovolné celé nezáporné číslo. Tyto jazyky nejsou regulární, protože nejsou rozpoznatelné žádným konečným automatem. Na obrázku 3.5 jsou zobrazeny značené Petriho sítě ve standardním tvaru generující jazyky  $L_1$  a  $L_1'$ .



Obrázek 3.5: Značené Petriho sítě generující jazyk  $L_1$  a  $L_1'$

**Věta 3.3.**

Ne každý bezkontextový jazyk je PN-jazykem, tj. existuje bezkontextový jazyk, který PN-jazykem není.

**Důkaz:**

Dokážeme, že takovým jazykem je jazyk  $L_2 = \{ww^R : w \in A^*\}$ . Označme  $|T| = m$ ,  $|A| = k$ ,  $|w| = r$ . Počet různých slov délky  $r$  je  $k^r$ . Označme symbolem  $RS_r(M_0)$  množinu všech stavů (značení) sítě, které jsou dosažitelné z počátečního stavu  $M_0$  provedením sekvence přechodů o délce  $r$ . Má-li Petriho síť rozpoznávat uvedený jazyk, musí platit

$$|RS_r(M_0)| \geq k^r, \quad (*)$$

neboť jinak by nebylo možné, aby si síť zapamatovala pomocí různého značení různá slova  $w$  délky  $r$ .

Zpracování slova  $w$  délky  $r$  znamená provedení sekvence přechodů  $\sigma = t_{(1)} \dots t_{(r)}$ , která převádí Petriho síť ze stavu  $M_0$  do stavu  $M_r$ . Tedy platí (fundamentální rovnice)

$$M_r = M_0 + C \cdot V_\sigma,$$

kde  $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$  je charakteristický vektor sekvence s vlastností  $v_1 + v_2 + \dots + v_m = r$ . Platí tedy:

$$\begin{aligned} |RS_r(M_0)| &\leq (\text{počet charakteristických vektorů splňující vztah } v_1 + v_2 + \dots + v_m = r) = \\ &= (\text{počet rozkladů přirozeného čísla } r \text{ na } m \text{ přirozených sčítanců}) = \\ &= (r+m-1) \cdot (r+m-2) \dots (r+1) / (m-1) \cdot (m-2) \dots 1 \leq \\ &\leq (r+m-1) \cdot (r+m-2) \dots (r+1) \leq \\ &\leq (r+m)^k \leq k^r. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost interpretujeme ve smyslu  $(\forall k, m) (\exists r) [(r+m)^k < k^r]$ , což lze ověřit pomocí L'Hospitalova pravidla (exponenciální funkce roste rychleji než mocninová funkce). Platí tedy

$$|RS_r(M_0)| < k^r,$$

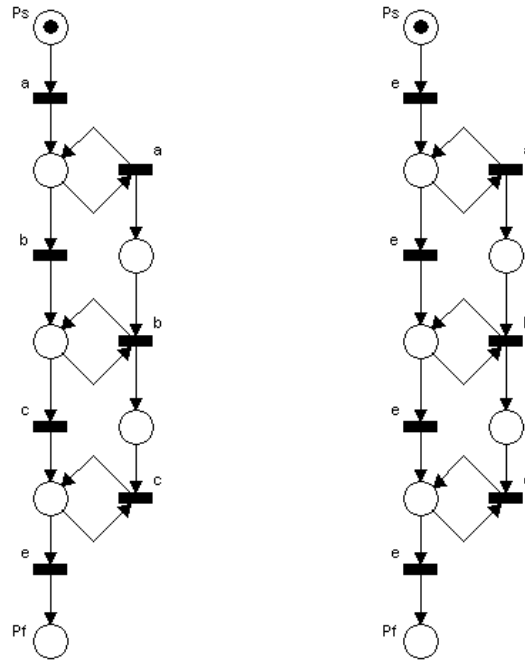
což je ve sporu s (\*). Při dostatečně velké délce slova  $w$  nestačí si žádná PN si toto slovo zapamatovat. Žádná PN (OPN resp. GPN) tedy nedokáže rozpoznávat jazyk  $\{ww^R : w \in A^*\}$ .

**Věta 3.4.**

Existuje PN-jazyk, který není bezkontextový.

**Důkaz:**

Takovým jazykem je např. jazyk  $L_3 = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$  nebo  $L_3' = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ . Kdyby jazyky  $L_3$  resp.  $L_3'$  byly bezkontextové, pak by byly rozpoznatelné zásobníkovými automaty, to však být nemohou. Na obrázku 3.6 je zobrazena značená Petriho síť ve standardním tvaru generující jazyk  $L_3$ , resp.  $L_3'$ .



Obrázek 3.6: Značená Petriho síť generující jazyk  $L_3$  a  $L_3'$

**Věta 3.5.**

Každý PN-jazyk je kontextový.

**Důkaz:**

Ukažme, že jazyk  $L$  Petriho sítě  $N$  může být přijímán lineárně omezeným Turingovým strojem.

Nechť páska Turingova stroje uchovává momentální značení každého místa sítě  $N$ . Po přečtení vstupního symbolu je simulováno provedení přechodu, tj. změna značení některých míst. Kvantifikujme využívanou část pásky celkovým součtem  $S$  všech značek všech míst a zkoumejme, jak se tento součet mění v závislosti na délce vstupního řetězce.

Nechť vstupnímu řetězci délky  $k \geq 1$  odpovídá výpočetní posloupnost  $t_1 t_2 \dots t_k$  provedených přechodů Petriho sítě  $N$ . Označme  $d_t$  počet značek, kterým přispívá přechod  $t$  (jeho provedení) k celkovému počtu značek sítě. Zřejmě platí:

$$d_t = \sum_{p \in t^*} w(t, p) - \sum_{p \in \cdot t} w(p, t)$$

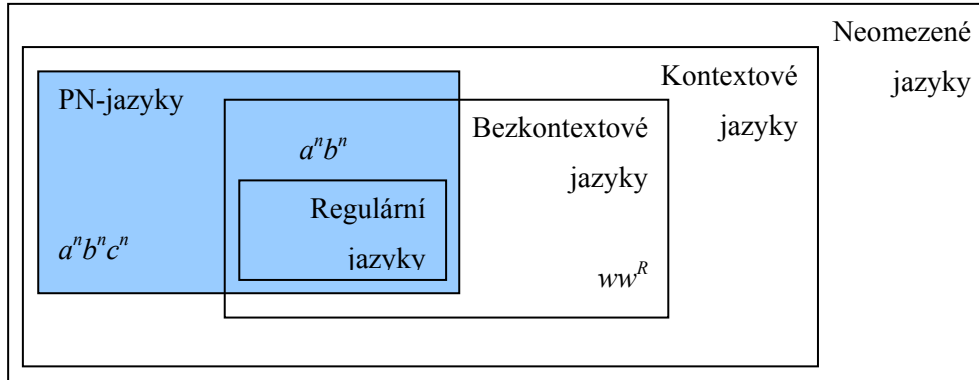
Pak počet značek  $S$  po provedení výpočetní posloupnosti  $t_1 \dots t_k$  lze vyjádřit ve tvaru:

$$S = 1 + \sum_{i=1}^k d_{t_i}$$

Z definice PN plyne existence maxima:  $m = \max_{t \in T} d_t$

S jeho využitím lze hodnoty  $S$  ohraničit v závislosti na délce výpočetní posloupnosti  $k$  a tudíž i vstupního řetězce funkcí:  $S(k) \leq 1 + k \cdot m$ , což je lineární funkce nezávislé proměnné  $k$  a příslušný Turingův stroj je tedy lineárně omezený.

Vzájemný vztah PN-jazyků a jazyků podle Chomského hierarchie je zobrazen množinovým diagramem na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Vztah PN-jazyků a jazyků podle Chomského hierarchie

## Shrnutí

Množina všech sekvencí (posloupností přechodů) spustitelných z počátečního značení představuje prefixový jazyk rozpoznávaný Petriho sítí. Tento jazyk charakterizuje všechna možná chování uvažované Petriho sítě.

V souvislosti s rozpoznáváním jazyků Petriho sítěmi vznikají dvě úlohy:

1. K dané (značené) Petriho síti nalézt jazyk, který je touto sítí rozpoznáván, tj. charakterizovat tento jazyk generativní gramatikou, regulárním výrazem či nějakým jiným způsobem.
2. K danému jazyku (charakterizovanému gramatikou, regulárním výrazem, výčtem vlastností) nalézt značenou Petriho síť, která jej rozpoznává.

## Pojmy k zapamatování

- Ohodnocená Petriho síť,
- jazyk rozpoznávaný ohodnocenou Petriho sítí,
- standardní počáteční značení,
- standardní množina koncových značení,
- PN-jazyk,
- Chomského hierarchie.

## Kontrolní otázky

1. Co víte o ohodnocené Petriho síti?
2. Čím je charakterizován PN-jazyk?
3. Je každý PN-jazyk regulárním jazykem?
4. Jaký je vztah mezi PN-jazyky a jazyky Chomského hierarchie?

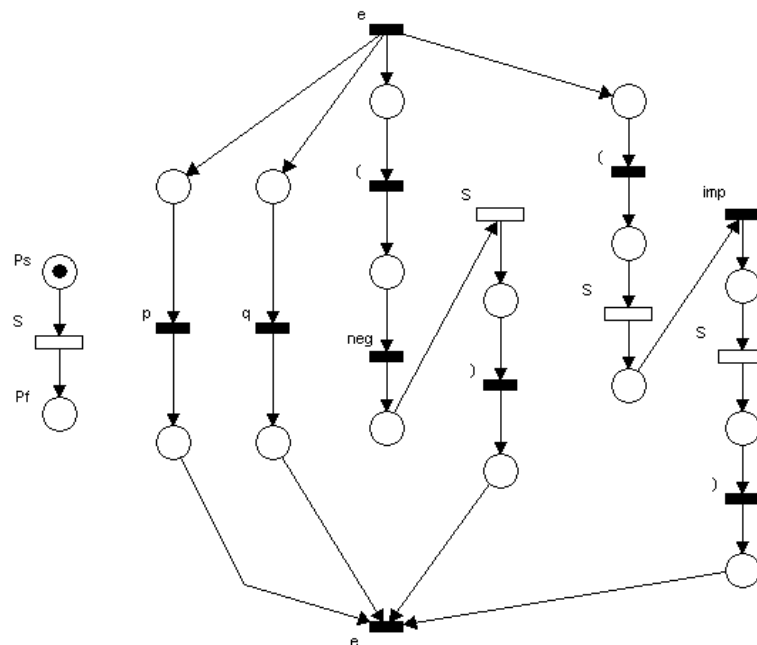


## Cvičení

1. Vytvořte Petriho síť, která bude charakterizovat jazyk výrokové logiky, popsany bezkontextovou gramatikou  $S \rightarrow p \mid q \mid (\neg S) \mid (S \Rightarrow S)$ .

## Řešení

1. Jazyk výrokové logiky lze popsat následující sítí, složenou ze 2 částí. První představuje výchozí elementární síť a druhá reprezentuje přepisovací pravidla.



## Seznam literatury

- [1] G. Balbo. Introduction to Stochastic Petri Nets. In *Lectures on Formal Methods and Performance Analysis*. Springer-Verlag, 2001.
- [2] F. Bause. Stochastic Petri Nets - An Introduction to the Theory. Vieweg Verlag, 2002. ISBN 3-528-15535-3.
- [3] J. Billington, M. Diaz, G. Rozenberg. Application of Petri Nets to Communication Networks: Advances in Petri Nets. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1605, pages 1-303. Springer-Verlag, 1999. ISBN 3-540-65870-X.
- [4] S. Donatelli, G. Franceschinis. Modelling and Analysis of Distributed Software Using GSPNs. In *Lectures on Petri Nets II.: Applications*, pages 438-477. Berlin, Springer-Verlag 1998.
- [5] H. Ehrig, G. Juhás, J. Padberg, G. Rozenberg. *Unifying Petri Nets (Advances in Petri Nets)*, LNCS 2128, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001. ISBN 978-3-540-43067-4.
- [6] C. Girault, R. Valk. *Petri Nets for Systems Engineering (A Guide to Modeling, Verification, and Applications)*. Springer-Verlag, Berlin 2003.
- [7] P. J. Haas. Stochastic Petri Nets (Modelling, Stability, Simulation). Springer-Verlag, 2002.
- [8] M. Chytil. *Automaty a gramatiky*. SNTL Praha, 1984.
- [9] K. Jensen. Coloured Petri Nets: Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use, Vol. 1: Basic Concepts. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1992.
- [10] K. Jensen, G. Rosenberg. High-level Petri nets: Theory and Application. Springer-Verlag, 1991.
- [11] M. A. Marsan, G. Balbo, G. Conte, S. Donatelli, and G. Franceschinis. *Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets*. John Wiley & Sons, 1995.
- [12] J. Peterson. *Petri Net Theory and the Modelling of Systems*. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey 1981.
- [13] C. A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. PhD thesis. Bonn, Institut für Instrumentelle Mathematik, Schriften des IIM Nr.3, 1962.
- [14] W. Reisig, G. Rozenberg. *Lectures on Petri Nets I: Basic Model*, volume 1491 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, 1998.
- [15] A. Yakovlev, L. Gomes, L. Lavagno. *Hardware Design and Petri Nets*. Kluwer Academic Publishers, 2000. ISBN 978-0-7923-7791-7.

## Seznam obrázků

Obrázek 1.1: Proces modelování.....	7
Obrázek 1.2: Změna stavu po provedení přechodu.....	9
Obrázek 1.3: Příklad jednoduché C/E Petriho sítě a P/T Petriho sítě.....	10
Obrázek 1.4: Příklad PN sítě s prioritami.....	11
Obrázek 1.5: Model C/E Petriho sítě.....	13
Obrázek 2.1: Parametrizovaný PN systém.....	16
Obrázek 2.2: Proveditelnost a provedení přechodu.....	17
Obrázek 2.3: Příklad jednoduchého PN systému.....	20
Obrázek 2.4: Graf dosažitelnosti PN systému.....	20
Obrázek 2.5: PN systém s nekonečnou množinou dosažitelnosti.....	21
Obrázek 2.6: Graf dosažitelnosti pro PN systém z obr.2.5.....	21
Obrázek 2.7: Konflikty symetrické a asymetrické.....	22
Obrázek 2.8: Souběžné činnosti.....	23
Obrázek 2.9: Konfúze.....	23
Obrázek 2.10: Řešení cvičení - Petriho sítě k booleovským operacím.....	25
Obrázek 2.11: Neomezený, neživý a nereverzibilní PN-systém.....	28
Obrázek 2.12: Neomezený, neživý a reverzibilní PN-systém.....	28
Obrázek 2.13: Neomezený, živý a nereverzibilní PN-systém.....	28
Obrázek 2.14: Neomezený, živý a reverzibilní PN-systém.....	29
Obrázek 2.15: Omezený, neživý a nereverzibilní PN-systém.....	29
Obrázek 2.16: Omezený, neživý a reverzibilní PN-systém.....	29
Obrázek 2.17: Omezený, živý a nereverzibilní PN-systém.....	29
Obrázek 2.18: Omezený, živý a reverzibilní PN-systém.....	30
Obrázek 2.19: Příklad Petriho sítě.....	31
Obrázek 2.20: Neomezená Petriho síť a její strom pokrytí.....	33
Obrázek 2.21: Graf dosažitelnosti pro daný PN-systém.....	34
Obrázek 2.22: PN-systémy se stejnou incidenční maticí – vliv inhibičních hran.....	36
Obrázek 2.23: PN-systémy se stejnou incidenční maticí – vliv testovacích hran.....	36
Obrázek 2.24: PN-struktura k příkladu 2.11.....	36
Obrázek 2.25: Jednoduchý PN-systém a jeho graf dosažitelnosti.....	38
Obrázek 2.26: PN-systém a jeho graf dosažitelnosti.....	41
Obrázek 2.27: Příklad PN-systému.....	44
Obrázek 2.28: Dvojice navzájem duálních struktur.....	46

Obrázek 2.29: PN-systém a jeho graf dosažitelnosti .....	47
Obrázek 2.30: Model PN se 2 typy procesů sdílející 5 zdrojů .....	49
Obrázek 2.31: Spojení sekvence a) míst, b) přechodů.....	51
Obrázek 2.32: Aplikace pravidla o spojení sekvence přechodů .....	51
Obrázek 2.33: Příklady zámků .....	52
Obrázek 2.34: Příklady pastí .....	52
Obrázek 2.35: Vztahy mezi podtřídami Petriho sítí .....	55
Obrázek 2.36: Duální Petriho sítě – automatová a synchronizační síť .....	55
Obrázek 2.37: Vzájemně duální sítě s volným výběrem .....	56
Obrázek 3.1: Konečný automat a odpovídající Petriho síť.....	58
Obrázek 3.2: Petriho síť pro daný regulární jazyk .....	59
Obrázek 3.3: LPN vyjadřující elementární jazyky .....	61
Obrázek 3.4: Základní operace pro konstrukci regulárních jazyků.....	61
Obrázek 3.5: Značené Petriho sítě generující jazyk $L_1$ a $L_1'$ .....	62
Obrázek 3.6: Značená Petriho síť generující jazyk $L_3$ a $L_3'$ .....	63
Obrázek 3.7: Vztah PN-jazyků a jazyků podle Chomského hierarchie.....	64

# Rejstřík

## Graf

dosažitelnosti, 18, 31

pokrytí, 32

## Gramatika, 59

bezkontextová, 60

kontextová, 60

neomezená, 60

regulární, 60

## Hrana, 9

## Charakteristý vektor, 37

## Chomského klasifikace, 60

## Incidenční matice, 35

## Invariant

p-invariant, 39

t-invariant, 42

## Konečný automat, 57

místa, 9

## Množina dosažitelnosti, 18

## modelování, 7

## past, 51

## Petriho síť, 7

automatová, 54

barevná, 8

C/E síť, 10

hierarchická, 9

obyčejná, 54

ohodnocená, 57

P/T síť, 7, 14

s volným výběrem, 54

synchronizační, 54

vyšší úrovně, 8

zobecněná, 54

## PN-jazyk, 60

## PN-systém

k-omezený, 27

mrtvý, 27

reverzibilní, 25

živý, 27

## Přechod, 9

mrtvý, 26

provedení přechodu, 17

proveditelný, 17

živý, 26

## simulace, 7

## Strom

dosažitelnosti, 31

pokrytí, 31

struktura Petriho sítě, 14

stupeň proveditelnosti, 21

## systém

bez uzamčení, 26

Petriho sítě, 15

token, 9

zámek, 51

## Značení

dosažitelné, 25

počáteční, 15

standardní počáteční, 59