

KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO

POČÍTAČOVÁ GEOMETRIE

JIŘÍ KOBZA



VÝVOJ TOHOTO UČEBNÍHO TEXTU JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Olomouc 2008

Abstrakt

Tento text se zabývá základními matematickými pojmy a metodami, kterých se používá při modelování různých druhů křivek a ploch. Navazuje na základní kurzy z geometrie, algebry a matematické analýzy. Vede studenty k praktické realizaci úloh o modelování křivek a ploch na počítači pomocí dostupného software nebo vlastních programů.

Cílová skupina

Studenti informatických oborů v různých formách studia

Obsah

1	Souřadnicové systémy, základní geometrické objekty, transformace	4
1.1	Kartézské souřadnice, operace s vektory	4
1.2	Geometrické transformace ve 2D, 3D	7
2	Rovinné křivky ve 2D	9
3	Prostorové křivky	15
4	Aproximační křivky	20
4.1	Úloha interpolace diskretních dat křivkou ve 2D	20
4.1.1	Interpolace polynomy $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$	21
4.1.2	Polynomické interpolující splajny	23
4.2	Bázové splajny = B-splajny	25
4.3	Interpolace B-splajny	27
4.4	Aproximace metodou nejmenších čtverců - MNČ (LSQ)	28
4.5	Interpolace a aproximace parametrickými křivkami	30
4.6	Bezierovy křivky - určené kontrolním polygonem	34
4.7	Další křivky určené kontrolním polygonem	38
5	Plochy	41
5.1	Základní typy zadání a modelování ploch	41
5.2	Z diferenciální geometrie ploch	43
6	Metody modelování ploch	46
6.1	Přímkové plochy	46
6.2	Interpolace funkce dvou proměnných na obdélníkové síti	47
6.3	Interpolace na trojúhelníkových sítích	50
6.4	Obecnější metody interpolace	51
6.5	Plochy určené obdélníkovou sítí kontrolních bodů	53
6.6	Trojúhelníkové Bernštejnovy-Bezierovy pláty	55
6.7	B-splajnové plochy určené sítí kontrolních vrcholů	57
7	Seznam obrázků	61

1 Souřadnicové systémy, základní geometrické objekty, transformace

Studijní cíle: V této kapitole stručně připomeneme některé pojmy z lineární algebry a geometrie, se kterými se studenti seznámili během studia. Cílem bude procvičit zobrazení takových geometrických objektů, jejich transformací a vlastností na obrazovce počítače.

Klíčová slova: souřadnice, body, vektory, přímky, roviny, vzájemná poloha, geometrické transformace

Potřebný čas: 180 minut.

Průvodce studiem

V základních kurzech algebry, geometrie a matematické analýzy se pracuje s čísly, body zadanými v různých souřadnicích, vektory, maticemi, funkcemi a různými operacemi s nimi. Cílem této kapitoly je zopakovat si vlastnosti zejména lineárních objektů a operací s nimi, naučit se zobrazovat takové objekty, jejich vlastnosti a operace s nimi na obrazovce počítače, vytvářet složitější objekty skládáním jednodušších objektů a jejich transformacemi.

1.1 Kartézské souřadnice, operace s vektory

Základní pojmy - opakování

Kartézské souřadnice bodů A_i , vektorů \mathbf{a}_i ve 2D, 3D;

lineární kombinace bodů, vektorů $\dots \sum_i c_i A_i$;

Konvexní kombinace bodů $\dots \sum_i c_i A_i$; $c_i \geq 0$, $\sum_i c_i = 1$.

Lineární obal, konvexní obal bodů (Matlab -funkce convhull, Maple - convexhull)

Lineární závislost a nezávislost vektorů ve 2D, 3D - determinantové kritérium

Skalární a vektorový součin vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , délka a norma vektoru

$$\mathbf{a} = [a_i], \mathbf{b} = [b_i], \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i \cdot b_i = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot \cos(\varphi), \quad l = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = \|\mathbf{a}\|$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\varphi)$$

Smíšený součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$[\mathbf{abc}] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|\mathbf{abc}| \dots$ objem rovnoběžnostěnu (koplanarita vektorů - nulovost součinu).

Rovnice úsečky, přímky, směrový vektor, normála; orientace přímky

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, (-\infty, \infty); \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) = 0$$

Poloha dvou přímek - rovnoběžnost, různoběžnost, průsečík; mimoběžnost (3D).

Poloha bodu vzhledem k přímce, úsečce.

Vzdálenost bodu $P = [x_0, y_0]$ od přímky (2D) $ax + by + c = 0$:

$$d = |ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2};$$

ve (3D): $P = [x_0, y_0, z_0]$, přímka $(x - x_1)/a_1 = (y - y_1)/a_2 = (z - z_1)/a_3$,

$$\mathbf{u} = [x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1], \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3], d = \|\mathbf{u} \times \mathbf{a}\|/\|\mathbf{a}\|$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek (2D): $d = (c_2 - c_1)/\sqrt{a^2 + b^2}$

Vzdálenost dvou mimoběžek (3D): $\mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + q\mathbf{b}$: $d = |[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{a}\mathbf{b}]|/\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$

Svazek přímek: $y - y_0 = k_i(x - x_0)$; $\sum_{i=1}^2 \lambda_i(a_i x + b_i y + c_i) = 0$

Úhel mezi přímkami $a_i x + b_i y + c_i = 0$; $i = 1, 2$; $y = k_i x + c_i$:

$$\tan(\theta) = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}; \quad \tan(\theta) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Homogenní souřadnice (motivace: homogenní rovnice algebraických křivek, maticový zápis transformací):

kartézské souřadnice bodu $[X, Y, Z]$ $\leftrightarrow [x, y, z, w]$ homogenní souřadnice,

$X = x/w, Y = y/w, Z = z/w, w \neq 0$; \dots váha bodu (často $w = 1$).

$aX + bY + c = 0 \rightarrow ax + by + cw = 0$; ($w = 0 \dots$ nevlastní přímka)

Rovnice roviny

- určené třemi body, jejich souřadnicemi $[x_i, y_i, z_i]$ nebo vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0;$$

- určené bodem \mathbf{a} a dvěma směrovými vektory \mathbf{b}, \mathbf{c} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + s(\mathbf{c} - \mathbf{a}), \quad t, s \in R$$

- bodem \mathbf{a} a vektorem normály k rovině: $(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$

- úsekový tvar rovnice roviny: $x/p + y/q + z/r = 1$.

Vzdálenost bodu $P = [x_1, y_1, z_1]$ od roviny

$$ax + by + cz + d = 0 : \quad d = |ax_1 + by_1 + cz_1 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Vzájemná poloha dvou rovin:

- rovnoběžné, totožné roviny ($\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$)

- různoběžné roviny (společná přímka - průsečnice, řešení soustavy 2 rovnic s jedním volným parametrem)

Příklad: pro průsečnici rovin $x + 2y + z + 3 = 0, 2x - y + 3z - 1 = 0$ po volbě

$x = t$ a vyřešení této soustavy dvou rovnic dostaneme její parametrický tvar

$x = t, y = -(t + 10)/7, z = -(5t + 1)/7$ (zobrazte obě roviny a jejich průsečnici !).

Úhel dvou rovin $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ s normálami $\mathbf{n}_i = [a_i, b_i, c_i], i = 1, 2$:

$\cos(\phi) = |\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|/(\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|)$; kolmost, rovnoběžnost

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin: $d = |d_2 - d_1|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ($a_1 = a_2, \dots$)

Svazek rovin $\sum_{i=1}^2 \lambda_i(a_i x + b_i y + c_i z + d_i) = 0, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

Trs rovin se společným bodem $\sum_{i=1}^3 \lambda_i(a_i x + b_i y + c_i z + d_i) = 0, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$.

Poloha bodů $P = [x_1, y_1, z_1], Q = [x_2, y_2, z_2]$ vzhledem k rovině $ax + by + cz + d = 0$:

- výpočet $h_i = ax_i + by_i + cz_i + d_i$;

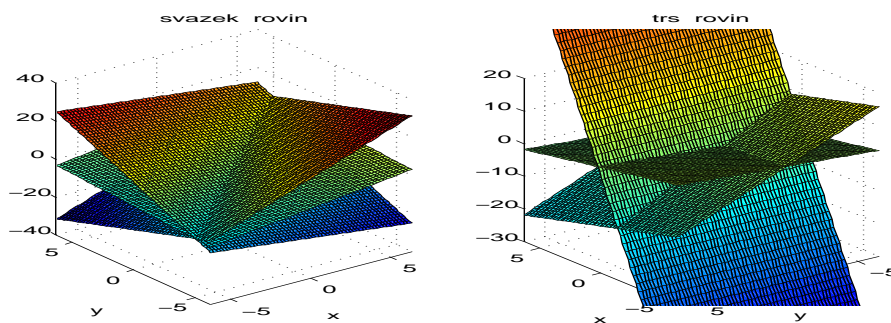
$h_1 h_2 > 0 (< 0) \Rightarrow P, Q$ leží ve stejné (opačné) polorovině;

- směrový vektor průsečnice je kolineární s vektorovým součinem jejich normálových vektorů.

Paprsek (polopřímka): $A = [a_0, a_1, a_2], \mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2] : P = A + r\mathbf{q}$

Poloha paprsku vůči úsečce $P = B + t[C - B]$, přímce (soustava lineárních rovnic)

Poloha paprsku $P = A + t\mathbf{q}$ vůči rovině $ax + by + cz + d = 0$:



obr.1 svazek a trs rovin

- průsečík paprsku s rovinou (dosazením do rovnice roviny)

$$t = -(aa_0 + ba_1 + ca_2 + d)/(aq_0 + bq_1 + cq_2)$$

Průsečík paprsku a mnohoúhelníka ve 3D - algoritmus:

- 1) Najít rovnici roviny, ve které leží mnohoúhelník
- 2) Najít průsečík paprsku s touto rovinou
- 3) Pomocí testu zjistit, zda průsečík leží uvnitř mnohoúhelníka (přímka procházející průsečíkem v rovině mnohoúhelníka má lichý počet průsečíků s hranami).

Plocha trojúhelníka $\triangle ABC$, čtyřúhelníka $\square ABCD$ v rovině:

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}; P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right]$$

Obecný postup při výpočtu plochy polygonu: triangulace, součet ploch trojúhelníků.

Kontrolní otázky

1. Popište základní operace s body a vektory ve 2D, 3D.
2. Uveďte příklady lineárních a konvexních obalů bodů, vektorů.
3. Uveďte formulaci kriteria lineární závislosti a nezávislosti vektorů.
4. Jak poznáme rovnoběžnost rovin zapsaných v kartézských souřadnicích ?
5. Odvoďte parametrické rovnice průsečnice dvou rovin.
6. Odvoďte formuli pro výpočet plochy pětiúhelníku s danými vrcholy.

Úkoly k textu

1. Zobrazte na počítači přímku a 20 bodů v rovině (případně body náhodně generujte). Označte různými symboly body v opačných polorovinách. Spočítejte vzdálenosti jednotlivých bodů od přímky a vyznačte v každé polorovině bod s největší vzdáleností od přímky. Těmito dvěma body vedte kolmice k přímce - spočítejte a označte jejich průsečíky. Zobrazte konvexní obal výchozích bodů.
2. Zobrazte dvě roviny se společnou průsečnicí. Vygenerujte ve zvoleném prostoru 40 bodů. Označte různými symboly body, které leží v jednotlivých čtyřech poloprostorech. Spočítejte vzdálenosti jednotlivých bodů od každé roviny a označte body s největšími vzdálenostmi.

3. Nakreslete v rovině dva polygony se společným průnikem. Vygenerujte na obrazovce 30-40 bodů a označte odlišně body které leží
- uvnitř každého z polygonů,
 - vně obou polygonů, v jejich společné části.
- Zobrazte konvexní obal těchto bodů, spočítejte plochu každého z polygonů.
4. Prostudujte možnosti použití funkcí
 dsearch, convhull, inpolygon, polyarea, rand, patch v Matlabu,
 pointplot, line, distance, plane, intersection, area, convexhull, randpoint v Maple
 na realizaci a grafické znázornění řešení uváděných úloh.

1.2 Geometrické transformace ve 2D, 3D

Homogenní souřadnice bodu $P = [x, y, z, w]$, (častá volba $w = 1$).

Úsečka $P_2 - P_1 = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, 0]$ - vektor.

Obecná lineární transformace s maticí \mathbf{A} : $P' = \mathbf{A}P$.

Speciální případy: (bod +vektor \rightarrow posunutý vektor)

Posunutí (translate) bodu ve směru vektoru $\mathbf{d} = [p_i]$ ve 2D, 3D pomocí matic

$$T(p_1, p_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Platí: $T^{-1}(p_1, p_2) = T(-p_1, -p_2)$; $T^{-1}(p_1, p_2, p_3) = T(-p_1, -p_2, -p_3)$

Rotace kolem počátku o úhel α ve 2D se realizuje násobením bodů objektu maticí

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotace kolem jednotlivých os ve 3D používá rozšířených variant předchozích matic

Otáčení kolem obecné osy (viz [13], str. 547).

Změna měřítka ve 2D, 3D se dá provést násobením diagonálními maticemi

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zkosení ve směru jednotlivých os (shearing) ve 2D s koeficienty sh_x, sh_y provedeme pomocí matic

$$\mathbf{Sh}_x = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Sh}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

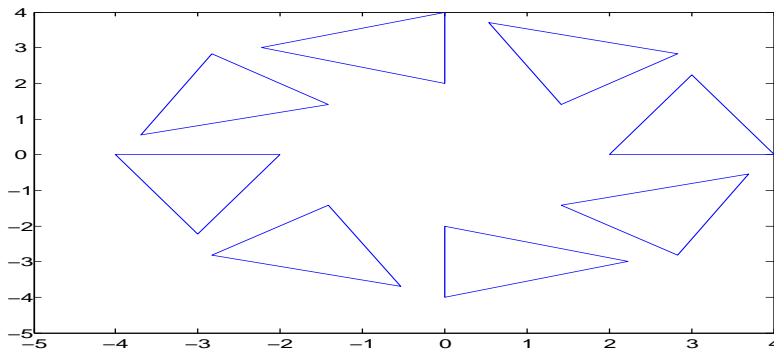
Pro zkosení ve směru roviny xy ve 3D použijeme matici (nemění souřadnice z)

$$\mathbf{Sh}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x \\ 0 & 1 & sh_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a podobné matice použijeme pro zkosení ve směru rovin zy, xz .

Matice pro provedení složených transformací dostaneme postupným vynásobením matic základních transformací. Například pro zkosení ve směru roviny zy a následující zkosení ve směru roviny xy dostaneme matici *složené transformace*

$$\mathbf{Sh}_{xy} \cdot \mathbf{Sh}_{yz} = \begin{bmatrix} 1 + sh_x sh_z & 0 & sh_x \\ sh_y + sh_y sh_z & 1 & sh_y \\ sh_z & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



obr. 2 rotace trojúhelníka kolem počátku

Kontrolní otázky

1. *Prověřte si pomocí počítače základní funkce uvedených matic pro jednotlivé transformace.*
2. *Odvodte matice pro složení dalších dvojic a trojic transformací; ověřte na příkladu.*

Úkoly k textu

1. Nakreslete mnohoúhelník v rovině (2D) a proveďte jeho
 - posunutí o jeden vektor, opakované posunutí ve směru dalšího vektoru;
 - rotaci o zvolený úhel, speciálně jeho posunutí do polohy symetrické k počátku;
 - zkosení ve směru některé ze souřadných os, obou os;
 - kombinaci takových operací.
2. Řešte podobnou úlohu ve 3D - nakreslení mnohostěnu nebo jiného objektu, jednotlivé transformace a jejich skládání.

Při práci s Matlabem můžeme použít funkcí `rotate`, `rotate3d`, `view`, `pan`, `makehgtform`. Maple má k dispozici funkce `translation`, `rotation`, `reflection`, `RotatoryReflection`, `GlideReflection`, `ScrewDisplacement`.

Mathematica: `GeometricTransformation` - `Translate`, `Scale`, `Rotate`.

2 Rovinné křivky ve 2D

Studijní cíle: V této kapitole si stručně zopakujeme základní způsoby zadání křivek v rovině - explicitní, implicitní, parametrické - jak je známe z matematické analýzy a geometrie, připomeneme si některé hlavní skupiny křivek a jejich vlastnosti. Uvedeme rovnice tečen, normál, asymptot, délku křivky, křivost a poloměr křivosti, pojem izogonálních a ortogonálních trajektorií.

Klíčová slova: funkce, křivka, explicitní a parametrický předpis, polární souřadnice; tečna, normála, singulární bod, délka křivky, křivost

Potřebný čas: 120 minut.

Průvodce studiem

Rovinné křivky představují širokou škálu křivek, které znázorňují pohyby bodů nebo kvantitativní průběh různých procesů v technické praxi. Nejjednodušší z nich můžeme popsat funkčním předpisem v kartézských nebo jiných souřadnicích, složitější pak parametrickým předpisem pro jednotlivé složky. V geometrii a diferenciální geometrii jsou studovány různé vlastnosti a způsoby konstrukce takových křivek - jejich tečny, normály, délka a křivost, singulární body, vlastnosti různých soustav takových křivek (izogonální, ortogonální trajektorie, obálka soustavy křivek. Dnes nám počítače velmi usnadňují kreslení různých křivek a tím rozpoznání jejich vlastností.

Základní způsoby zadání křivek v rovině

Rovinné křivky vznikají často popisem pohybu bodu v rovině, kde můžeme vidět bohaté tvary, které se nedají popsat jen klasickým funkčním předpisem $y = f(x)$ (ukazují to i odlišné termíny: funkce - křivka).

Křivka v rovině s kartézskými souřadnicemi může být proto zadána

1) explicitním předpisem $y = f(x)$

(příklady - elementární funkce x^m , ab^{cx} , trigonometrické funkce, $\ln(x)$, ..
řetězovka $y = (a/2)(\exp(x/a) + \exp(-x/a)) = a \cosh(x/a)$, ...

*způsoby
zadání
křivek*

2) implicitním předpisem $F(x, y) = 0$

kuželosečky - jejich vlastnosti (vzdálenosti od ohnisek) a kanonické tvary

algebraické křivky - příklady:

Descartův list $x^3 + y^3 - 3axy = 0$,

$y^2 - ax^3 = 0$, $y^2 = x^3/(a - x)$,

lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, (stálý součin vzdáleností od dvou bodů),

strofoida $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$.

3) parametricky - předpisem pro každou složku

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ s parametrem t - např.

kružnice, elipsa;

kotálnice (kružnice po přímce, kružnice (R) po kružnici (r)):

- cykloida (epi-,hypo-), $x = rt - d \sin(t)$, $y = r - d \cos(t)$, $d = r(d > r, d < r)$,

kardioida $x = r(2 \cos(t) - \cos(2t))$, $y = r(2 \sin(t) - \sin(2t))$, $R = r$;

nefroida $x = r(3 \cos(t) - \cos(3t))$, $y = r(3 \sin(t) - \sin(3t))$, $R = r/2$;

asteroida $x = r(3 \cos(t) + \cos(3t))$, $y = r(3 \sin(t) - \sin(3t))$, $R = r/4$.

4) Polární souřadnice ρ, φ bodu v rovině (délka průvodiče, jeho úhel s osou x) jsou s jeho kartézskými souřadnicemi $[x, y]$ určeny vztahy $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$.

V polárních souřadnicích jsou zadávány zejména spirály -

- Archimedova $\rho = a\varphi$, hyperbolická $\rho = a/\varphi$, logaritmická $\rho = a \exp(b\varphi)$
- růžice $\rho = a \sin(k\varphi)$ a jiné křivky vzniklé při rotačním pohybu.

Rovnice křivky v polárních souřadnicích může mít opět tvar explicitní $\rho = f(\varphi)$ nebo implicitní $F(\varphi, \rho) = 0$.

Směrový úhel θ tečny v bodě křivky (úhel mezi průvodičem a tečnou).

$$\tan(\theta) = \rho/\rho' \quad 0 < \theta < \Pi.$$

S polární osou svírá tečna křivky v bodě $P(\rho, \theta)$ úhel $\varphi + \theta$.

Tzv. přirozeným parametrem křivky je její délka (délka oblouku od výchozího bodu).

Jeho aproximací je délka aproximujícího (dostatečně přesného) polygonu.

V řadě případů můžeme jednu křivku vyjádřit několika způsoby, nebo provést převod mezi jejím vyjádřením v různých souřadnicích - například

- výpočtem jedné z proměnných v implicitním tvaru (dostaneme tak i různé explicitní předpisy pro jednotlivé části křivky),
- zavedením vhodného parametru můžeme implicitní předpis převést na parametrický: pro Descartův list $x = 3at/(1+t^3)$, $y = 3at^2/(1+t^3)$;
- u lemniskaty $x = at(1+t^2)/(1+t^4)$, $y = at(1-t^2)/(1+t^4)$;
- kardioida v polárních souřadnicích $\dots \rho = 2r(1 - \cos(\varphi))$.

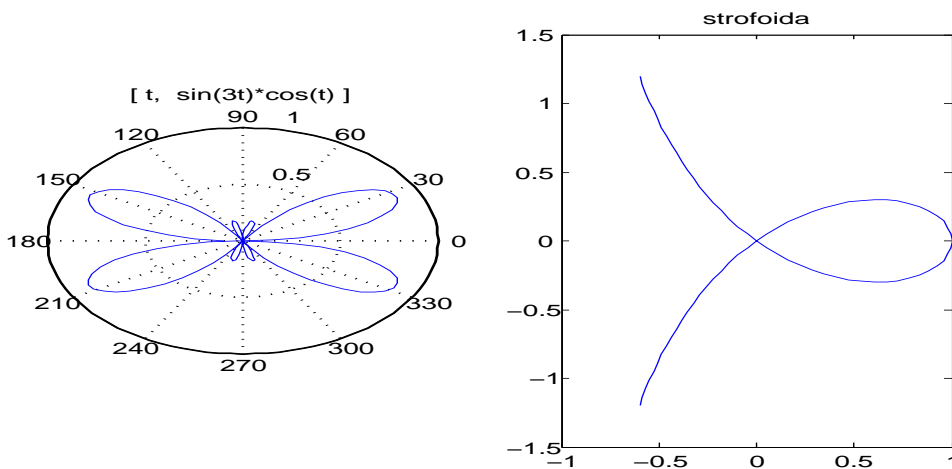
Některé křivky můžeme popsat všemi uvedenými způsoby - například můžeme zapsat

- čtvrtkružnici explicitně, implicitně, v polárních souřadnicích i parametricky:

$$x = (1-t^2)/(1+t^2), \quad y = 2t/(1+t^2)$$

- parabolu $y = x^2$ parametricky ($x = t$, $y = at^2$) nebo $\rho = \sin(\varphi)/(a - \cos^2(\varphi))$;
- Descartův list i v polárních souřadnicích: $\rho = (3a \sin(\varphi) \cos(\varphi))/(\sin^3(\varphi) + \cos^3(\varphi))$,
- lemniskatu v polárních souřadnicích $\rho^2 = a^2 \cos(2\varphi)$,
- asteroidu $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ parametricky $x = a \cos^3(t)$, $y = a \sin^3(t)$,
- strofoidu $x = at(1-t^2)/(1+t^2)$, $y = at(1-t^2)/(1+t^2)$; $\rho = a \cos(2\varphi)/\cos(\varphi)$;
- kisoиду $y^2 = x^3/(a-x)$; $x = at^2/(1+t^2)$, $y = at^3/(1+t^2)$; $\rho = a \sin^2(\varphi)/\cos(\varphi)$;

Křivky harmonického kmitání najdeme popsány např. v [12], str. 152:



obr. 3 křivka a) v polárních souřadnicích b) parametrická

- stejná frekvence: $a \sin(\omega t + \varphi_1) + b \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)$

- stejné amplitudy: $a \sin(\omega_1 t) + a \sin(\omega_2 t) = 2a \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) \sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t)$

Křivky tlumeného kmitání, vynuceného kmitání - viz [12], str.156.

Křivky vývoje, popsané diferenciální rovnicí ($x' = f(x)$), ... viz [12], str.159).

Singulární bod algebraické křivky - bod, pro který platí $F(x, y) = 0$; $F'_x = 0$, $F'_y = 0$
- uzlový bod (Descartův list - počátek), bod vratu 1., 2. druhu (společné, různé tečny);
Podobně - singulární bod parametrické křivky ($x' = y' = 0$).

Izolovaný bod (v jeho okolí neleží další bod křivky).

Průsečíky křivek (společné body) dostaneme obecně řešením soustavy jejich rovnic: *průsečíky křivek*

- u explicitních předpisů ve stejných souřadnicích porovnáme tyto funkční předpisy;

- u předpisů v různých souřadnicích zkusíme je převést do stejných souřadnic .

a) explicitní zadání - řešením rovnice $f(x) = g(x)$, příklad: přímka - parabola

b) explicitní + implicitní zadání: $y = g(x)$, $F(x, y) = 0 \rightarrow F(x, g(x)) = 0$

c) při parametrickém předpisu obou křivek

$$x = x_1(t), y = y_1(t), t \in I_1 \dots x = x_2(u), y = y_2(u), u \in I_2$$

vede úloha na soustavu rovnic $x_1(t) = x_2(u)$, $y_1(t) = y_2(u)$ pro (t, u)

Příklady:

1) Přímka - elipsa, asteroida - parabola (případy a), b) - proveďte);

2) Cykloida - parabola: $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$; $y = bx^2$

Parametrizací $x = t$, $y = bt^2$ po dosažení dostaneme rovnici $bt^2 = a(t - \sin(t))^2$;

3) Parabola - spirály : $y = ax^2$, $\rho = b\varphi \rightarrow \tan(\varphi) = ab \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) \rightarrow x, y$.

Příklad křivky určené jinými podmínkami (interpolace, aproximace, kontrolní polygon):

Parametrická kubika $x(t) = a_1 + b_1t + c_1t^2 + d_1t^3$, $y(t) = a_2 + b_2t + c_2t^2 + d_2t^3$

je určena

a) hodnotami koeficientů - jednoznačně;

b) čtyřmi body, kterými prochází (interpolant) - její tvar pak závisí na parametrizaci (-)ekvidistantní parametrizace , délka polygonu, délka intervalu, délka křivky, ...);
výpočet 8 koeficientů z 8 rovnic - podmínek interpolace v každé souřadnici.

Tečna ke křivce v bodě (x_0, y_0) - její rovnice pro různá zadání křivky:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ pro explicitní tvar $y = f(x)$;

$(F'_y)_0(y - y_0) + (F'_x)_0(x - x_0) = 0$ pro implicitní tvar $F(x, y) = 0$;

$(y - y_0)/\dot{y}_0 = (x - x_0)/\dot{x}_0$ pro parametrické zadání .

tečna

Normála ke křivce v bodě $[x_0, y_0]$ pro uvedené formy předpisu

$-y'_0(y - y_0) = x - x_0$; $(F'_x)_0(y - y_0) = (F'_y)_0(x - x_0)$; $\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) = 0$.

Tečna, normála z bodu ke křivce $F(x, y) = 0$ (soustava rovnic - [12], str. 293).

normála

Izogonální trajektorie soustavy křivek jsou křivky, které protínají každou křivku této soustavy pod stejným úhlem. ([12], str. 295)

Ortogonální trajektorie k soustavě křivek $F(x, y, c) = 0$ jsou křivky kolmé ke každé křivce této soustavy. Jejich rovnice můžeme dostat

- řešením soustavy $F_x + F_y y' = 0$, $F(x, y, c) = 0$ (vyloučením parametru c)

- řešením diferenciální rovnice (ODR) odvozené z ODR pro původní soustavu křivek ($f(x, y, y') = 0 \rightarrow f(x, y, -1/y') = 0$)

U křivek zadaných v polárních souřadnicích - podobně přes ODR ([12], str. 294).

Délka křivky na intervalech $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle t_1, t_2 \rangle$, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$

$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$, - explicitní, implicitní,

$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$ - parametrický předpis .

Délka křivky je jejím přirozeným parametrem; její aproximací je délka interpolačního polygonu (proveďte srovnání na příkladech).

Křivost rovinné křivky v bodě M :

$K \dots$ limita podílu (úhel mezi tečnami/ délka oblouku NM) při $N \rightarrow M$ *křivost*
 $K = y''/(1+y'^2)^{3/2} \dots = [-(F'_y)^2 F''_{xx} + 2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_x)^2 F''_{yy}]/[(F'_x)^2 + (F'_y)^2]^{3/2} \dots$
 $= (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y)/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} \dots = (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')/(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}$

Poloměr křivosti $R = 1/K$; oskulační kružnice v daném bodě křivky se jí dotýká a má poloměr R .

Singulární body : inflexní ($K = 0$, křivost mění znaménko), uzel (křivka se protíná) - dvojnásobný bod (dvě tečny), bod vratu (dvojnásobný bod - jedna tečna) - izolovaný bod.

Příklady - nakreslete jednotlivé typy na papír bez předpisu, uveďte příklady s funkčním předpisem.

Úhel dvou křivek: explicitní předpis $f, g \dots \tan(\omega) = (g' - f')/(1 + f'g')$;
 implicitní $u(x, y) = 0, v(x, y) = 0 \dots \tan(\omega) = (u_x v_y - u_y v_x)/(u_x v_x + u_y v_y)$.

Asymptoty - tečny v nevlastních bodech

$y = f(x) \dots k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x, q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] \dots y = kx + q$ *asymptoty*

Vertikální asymptoty: $f'(x) = \pm\infty$, parametrické křivky $\dots \dot{y}(t)/\dot{x}(t) = \pm\infty$.
 [12], I. (9.6) - speciální případy .

Obalová křivka jednoparametrické soustavy křivek $F(x, y, c) = 0$

v rovině (viz [12], str. 207, 283-):

- dotýká se každé z křivek soustavy,
- každý její bod je bodem dotyku s některou křivkou soustavy.

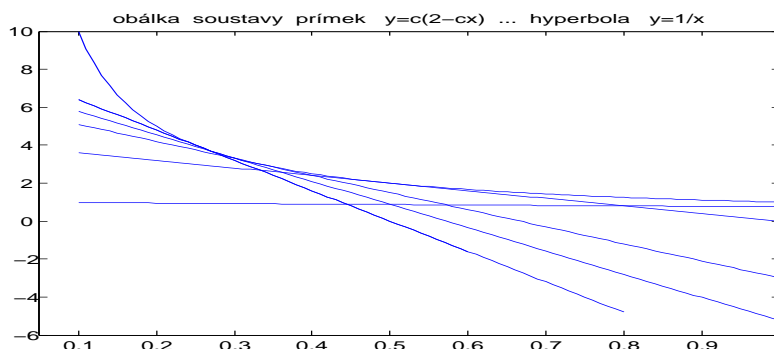
Platí: $F \in C^2, F''_{cc} \neq 0, \det[F'_x, F'_y; F''_{cx}, F''_{cy}] \neq 0 \rightarrow$ existence obálky,
 výpočet ze soustavy $F(x, y, c) = 0, F'_c(x, y, c) = 0$ (eliminací parametru c ze soustavy).

Příklad - $F(x, y, c) = y - (x - c)^4 = 0$; obálkou je osa x .

Příklad - $F(x, y, c) = (y - c)^2 - (x - c)^3 = 0$; obálkou jsou přímky $y = x, y = x - 4/27$

Příklad - obálkou soustavy přímek $y = c(2 - cx)$ je hyperbola $y = 1/x$ (obr. 4).

Evoluta křivky (sestává ze středů křivosti), evolventa křivky (dualita s evolutou)



obr. 4 hyperbola - obálka soustavy přímek

- viz následující kapitola, ([12], str. 288).

Příklad: parabola $y = x^2 \dots$ evoluta $y = 1/2 + 3(x/4)^{2/3}$

Evolventa kružnice -

$x(t) = (r + d) \cos(t) + rt \sin(t), y(t) = (r + d) \sin(t) - rt \cos(t)$

$d = 0$ - kruhová evolventa ($R = rt$, $s = rt^2/2$), $d = -r \dots$ Archimedova spirála
Příklad definice křivky pomocí vztahu mezi jejími vlastnostmi: klotoida $\dots R = a^2/s$.

Poznámka - pojem geometrické spojitosti:

U explicitně definovaných křivek je hodnota derivace v bodě směrnici tečny (fyzikálně - směr a rychlost pohybu bodu křivky). Jestliže použijeme pojem "tečný vektor" charakterizující směr tečny a délku tečného vektoru, pak zjistíme, že stejná parametrická křivka může mít v různých parametrizacích sice stejný směr, ale různou délku tečného vektoru (rychlost pohybu). To je problémem při spojování různých segmentů oblouků do jediné křivky (např. při konstrukci složených Bezierových křivek, splajnů a pod.). Proto byl kromě původního pojmu C^1 -spojitosti zaveden pojem "geometrické spojitosti" (geometric, visual continuity) křivek, který pro spojitost prvních derivací v daném bodě požaduje jen společný směr tečny. (viz [12], 9.5; [13] - příklady).

*geometrická
spojitost*

Příklad :

Parametrická křivka $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\mathbf{t} = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)]$ - vektor tečny;
jeho délka závisí na parametrizaci, expl. předpis .. $f' = dy/dx$ nezávisí

Přímka $y = kx + q \dots y' = k$;

V parametrizacích $x = t$, $y = kt + q$; $x = 2t$, $y = 2kt + q$

je v obou případech

$y'/x' = k$, ale $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{1 + k^2} \neq 2\sqrt{1 + k^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Podobně u paraboly $y = kx^2$ nebo cykloidy při změně parametrizace (spočítejte).

Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi pojmy : funkce jedné proměnné - křivka v rovině ?
2. Jaké jsou základní způsoby popisu rovinných křivek ?
3. Může mít stejná křivka různé funkční předpisy ?
4. Co a proč se označuje termínem přirozený parametr křivky ?
5. Uvedte další příklady křivek popisujících pohyb bodu v různých situacích (například známé vlastnosti kuželoseček).
6. Které hodnoty koeficientů v obecné rovnici křivek
 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$
odpovídají elipse, hyperbole, parabole ? ([12], str. 184)
7. Se kterými veličinami je spojen pojem křivosti křivky ?
8. Jak je možné chápat termíny jednoduchá křivka, složená křivka, uzavřená křivka ?
9. Co jsou to tečny, normály, asymptoty, singulární body křivky ?
10. Co rozumíme pod pojmem úhel dvou křivek, jak jej vypočítáme ?
11. Jak počítáme souřadnice průsečíku dvou křivek ?
12. Jaký je rozdíl mezi klasickou a geometrickou C^1 -spojitostí ?

Úkoly k textu

1. Vyzkoušejte si na příkladech kreslení rovinných křivek v různých zadáních. Jak kreslit křivku s implicitním předpisem, parametrickým předpisem ?
2. Použijte křivky jako geometrické objekty a s pomocí rovinných transformací utvořte z nich pěknou mozaiku .
3. Pro nakreslenou křivku na síti jejích bodů vykreslete síť tečen .
4. Ověřte si experimentálně, že koncové body normál stejné délky na dané křivce leží na křivce s ní rovnoběžné.
5. Na zvolené křivce k síti vybraných bodů nakreslete normály a osculační kružnice.
6. Ke zvolené jednoparametrické soustavě křivek najděte a zobrazte jejich obálku.
7. Ke grafům zvoleného systému křivek nakreslete grafy křivek příslušného ortogonálního nebo izogonálního systému křivek.
8. Co jsou to vrstevnice plochy a jak je můžeme vykreslit ?

Lze doporučit zkusit si napsat a ověřit vlastní programy pro řešení uvedených úloh (např. v OpenGL).

V programových profesionálních systémech máme dnes pro kreslení různých druhů křivek k dispozici řadu funkcí - procvičte si jejich používání:

Matlab - plot, contour, ezcontour,

Maple - plottools[curve], plot[polar], plot[parametric]

Mathematica - Plot, ParametricPlot, PolarPlot, ContourPlot, RegionPlot

Webové stránky, literatura - <http://curvebank.clastatela.edu/famouscurves/famous.htm>

(děláno v Mathematice, nezávislé)

3 Prostorové křivky

Studijní cíle: V této kapitole si připomeneme základní formy zadání prostorových křivek a pojmy, charakterizující jejich tvar a vlastnosti - definice tečen, normál, binormál a odpovídajících rovin (tečná, normálová, rektifikační, oskulační), pojmy týkající se křivosti takových křivek. Vzájemné vztahy mezi těmito vlastnostmi jsou popsány ve Frenetových-Serretových formulích.

Klíčová slova: parametrické, implicitní zadání prostorové křivky, zadání v cylindrických a sférických souřadnicích; tečný, normálový vektor, binormála; první a druhá křivost; rovina normálová, rektifikační, oskulační; první a druhá křivost; Frenetovy-Serretovy formule

Potřebný čas: 120 minut.

Průvodce studiem

Prostorové křivky představují širší škálu tvarů, možností jejich generování a způsobů zápisu než křivky rovinné. Proto i jejich analýza je složitější než u křivek rovinných. Jejich vlastnostmi se podrobněji zabývá diferenciální geometrie, která s pomocí celé řady pojmů podrobněji popisuje vlastnosti takových křivek a objektů s nimi spojených - Frenetův trojhran a roviny jím generované v daném bodě, dva druhy křivosti a vzájemné vztahy mezi takovými pojmy.

U prostorových křivek převládá parametrický předpis křivky (parametrické rovnice křivky):

t - parametr definující body na křivce (přirozený parametr - délka křivky);

$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I; x, y, z \in C^1(I)$ (kromě konečného počtu bodů).

Orientace křivky je určena uspořádáním jejích bodů podle růstu hodnot parametru.

Uzavřená křivka $\cdots I = \langle a, b \rangle, x(a) = x(b), y(a) = y(b), z(a) = z(b)$.

Hladká křivka - má všude spojitě i první derivace.

Cylindrické (válcové) souřadnice - pro křivky na válcových, rotačních plochách:

Vztah mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi bodu

$[x, y, z] \leftrightarrow [\rho, \varphi, z] : x = \rho \cos(\varphi), y = \rho \sin(\varphi), z = z.$

Příklad: základní šroubovice $x = a \cos(t), y = a \sin(t), z = bt; a > 0, b \neq 0$

$[z = b \arctan(y/x)],$ leží na rotační ploše $x^2 + y^2 = a^2;$

$\dot{x} = -a \sin(t), \dot{y} = a \cos(t), \dot{z} = b \cdots$ hladká křivka.

$b > 0$ - pravotočivá křivka ($k_2 > 0$), $b < 0$ - levotočivá křivka .

Rozvíjející se šroubovice: $x = at \cos(t), y = at \sin(t), z = bt;$ podobná parametrická křivka $x = t \sin(2t), y = t \cos(3t), z = t$ je na obr. 5.

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \geq 0;$ - regulární - singulární bod křivky.

Singulární bod - špička, bod vratu, průsečík.

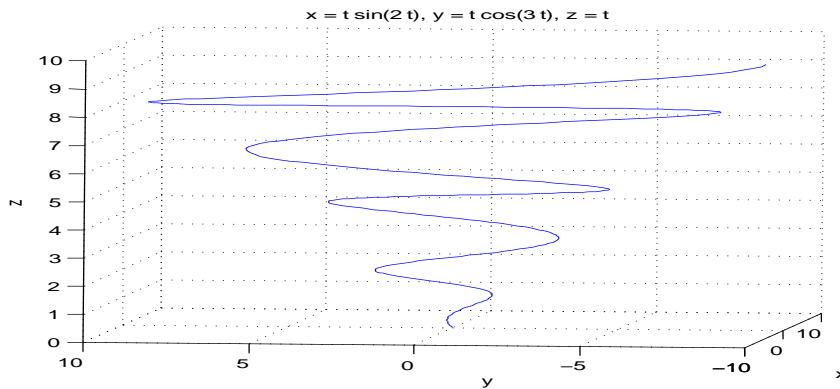
Parametrická křivka může být určena také podmínkami interpolace : například kubická křivka

$x(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3, y(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3, z(t) = a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3$
s vektorovým zápisem $P(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3, A = [a_1, a_2, a_3]^T, \cdots$

může být určena jak svými koeficienty, tak i podmínkami interpolace - čtyřmi body, kterými má křivka procházet (12 koeficientů - 12 podmínek interpolace: soustava lineárních rovnic).

Vektorový tvar $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [x, y, z] = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t);$ - jiný způsob zápisu.

*parametrické
zadání*



obr. 5 prostorová parametrická křivka

Přípustná transformace parametru $t = t(u) \in C$, $dt/du \neq 0$ a volba hodnot t_i může ovlivnit tvar interpolační křivky .

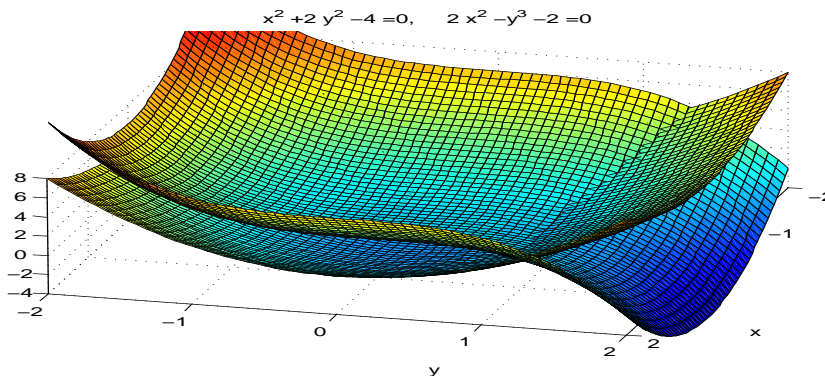
Implicitní zadání křivky - průnik ploch $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$;
(výpočet eliminací, numericky - např. Newtonovou metodou) ;

„předpoklad - spojitost parciálních derivací, řešitelnost soustavy, alespoň v jednom bodě řešení je hodnost následující matice rovna dvěma *implicitní předpis*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix} = 2$$

Algebraické křivky - mají algebraické rovnice v jejich předpisech ([12], str. 254).

Racionální, transcendentní křivky - v zadání jsou racionální, transcendentní funkce.



obr. 6 prostorová křivka jako průnik ploch

Rovinná křivka - průsečnice roviny s plochou (jedna z funkcí F, G je rovnicí roviny).

Příklad - kružnice $z - x = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Průsečík přímky s plochou - způsob výpočtu jeho souřadnic

Křivka s vlastností $\dots ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0 \quad \forall t \in I$

leží v rovině $ax + by + cz + d = 0$.

Délka oblouku $s = s(t) = \int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$,

(ds - diferenciál oblouku, lineární element).

Příklad - šroubovice: $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$, $z = bt$;

délka jednoho závitu $s = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$.

*délka
oblouku*

Tečný vektor křivky $\mathbf{r}(t) \cdots \dot{\mathbf{r}} = (d\mathbf{r}/dt)$

Jednotkový tečný vektor $\mathbf{t} = c\dot{\mathbf{r}}$, $c = 1/\|\dot{\mathbf{r}}\| = 1/\sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}$

Rovnice tečny v bodě \mathbf{r}_0 : $R = \mathbf{r}_0 + u\dot{\mathbf{r}}_0$, $(x - x_0)/\dot{x}_0 = (y - y_0)/\dot{y}_0 = (z - z_0)/\dot{z}_0$ *tečný vektor*

Vektor hlavní normály $\cdots \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ má směr vektoru $\mathbf{t}' = d\mathbf{t}/ds$ v uvažovaném bodě

$k_1 = \|\mathbf{t}'\| = \sqrt{\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}'} = \sqrt{\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''} = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \dot{s}^2)^{1/2}/(\dot{s})^2 \cdots$ první křivost (flexe)

Rovnice hlavní normály

$\mathbf{n} = (c\mathbf{r}'' + c'\mathbf{r}')/\sqrt{(c\mathbf{r}'' + c'\mathbf{r}') \cdot (c\mathbf{r}'' + c'\mathbf{r}')}$, $c = 1/\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}$ *normála binormála*

Binormála křivky - jednotkový vektor binormály $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ (kladná orientace)

Vektory \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} tvoří průvodní (základní) trojhran křivky, platí také $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ *průvodní trojhran*

Rovnice binormály křivky $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ v jejím bodě $[x, y, z]$:

$(X - x)/[\dot{y}, \dot{z}] = (Y - y)/[\dot{y}, \dot{x}] = (Z - z)/[\dot{x}, \dot{y}]$, $[\dot{x}, \dot{y}] = \dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}, \cdots$

Frenetovy-Serretovy formule

pro rovnice s přirozeným parametrem s , obecným parametrem t :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) & \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{t}' = k_1 \mathbf{n} & \dot{\mathbf{t}} = k_1 \dot{s} \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k_1 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{b} & \dot{\mathbf{n}} = -k_1 \dot{s} \mathbf{t} + k_2 \dot{s} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -k_2 \mathbf{n} & \dot{\mathbf{b}} = -k_2 \dot{s} \mathbf{n} \end{array}$$

k_1 - první křivost (flexe): nulová pro přímky, $k_1 = 1/r$ pro kružnici; druhá křivost (torze) pro přirozený parametr *křivost*

$$k_2 = \det \begin{bmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{bmatrix} / (x''^2 + y''^2 + z''^2) \quad (= [x', y'', y'''] / (x''^2 + y''^2 + z''^2))$$

$k_2 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{y}]/[(\dot{s})^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \dot{s}^2)]$ pro parametr t ; $([\dot{x}, \dot{y}, \dot{y}] \cdots \text{determinant})$; $k_2 \equiv 0$ pro rovinné křivky.

Normálová rovina $\mathbf{R} = [X, Y, Z]$ je tvořena vektory \mathbf{n} , \mathbf{b} (kolmá k tečně):

$(X - x)\dot{x} + (Y - y)\dot{y} + (Z - z)\dot{z} = 0$, $\cdots (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$ *roviny*

Rektifikační rovina (kolmá k hlavní normále - vektory \mathbf{t} , \mathbf{b}) $\cdots (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$

Oskulační rovina (kolmá k binormále - vektory \mathbf{t} , \mathbf{n}) $\cdots (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0$

Rovnice normálové roviny pro křivku $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ ([12], str. 262)

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = 0,$$

rovnice oskulační roviny pro parametrické zadání - ([12], str. 263)

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - z & Y - y \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$

Příklad - šroubovice ([12], str. 265):

$x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$, $z = bt$; $\dot{x} = -a \sin(t)$, $\dot{y} = a \cos(t)$, $\dot{z} = b$;
tečny svírají s osou konstantní úhel $\omega \cdots \cos(\omega) = b/\sqrt{a^2 + b^2} = bc$,
s rovinou kolmou k ose úhel $\varphi \cdots \sin(\varphi) = \cos(\omega)$, $\tan(\varphi) = b/a$
(spád šroubovice).

Hlavní normály jsou kolmé k ose šroubovice

Binormály svírají s osou konstantní úhel $\varphi \cdots \cos(\varphi) = ac = a/\sqrt{a^2 + b^2}$

Délka jednoho závitu $s = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

$\|\dot{s}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow k_2 = b/(a^2 + b^2)$, $k_1 = a/(a^2 + b^2)$

(- tato šroubovice je jediná prostorová křivka s konstantní první i druhou křivostí),

$b > 0$ - pravotočivá křivka ($k_2 > 0$), $b < 0$ - levotočivá křivka,

$k_2 \sin(\omega) - k_1 \cos(\omega) = 0$ - obecná šroubovice .

Problém: ze známých předpisů pro k_1, k_2 určit křivku ([12], str. 270);

$r_1 = 1/k_1$ - první poloměr křivosti

$k_1 = (1/a^2)s$ - rovinná klotoida

*jiné
problémy*

Rozklad vektoru zrychlení - [12], str. 266

Řád dotyku křivek ([12], str. 272) - společná tečná rovina, hlavní normála a první křivost

Oskulační kružnice, střed a poloměr křivosti.

Křivky rovnoběžné (paralelní), spádové, evoluty, evolventy: [12]

Paralelní křivky - mají společné hlavní normály (při vhodné parametrizaci):

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) + c\mathbf{n}(s), \quad c = \text{const}$$

Prostorová křivka nemusí mít křivku k sobě rovnoběžnou (šroubovice - má mnoho).

Každá rovinná křivka má nekonečně mnoho křivek k sobě rovnoběžných -

při parametrickém zadání $x = x(t)$, $y = y(t) - >$

$$x_1 = x(t) + cy/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad y_1(t) = y(t) - c\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Kontrolní otázky

1. Co tvoří souřadnicové plochy (jedna z proměnných je konstantní) v kartézských, cylindrických, sférických souřadnicích?
2. Napište parametrický předpis pro některé známé křivky ve složkách, ve vektorovém tvaru.
3. Uvedte příklady algebraických 3D křivek, nakreslete jejich grafy.
4. Uvedte příklad křivky jako průsečnice dvou ploch, ukažte její graf.
5. Jak počítáme prakticky délku oblouku křivky?
6. Napište rovnice tečny, normály, binormály ke křivce $\mathbf{r}(t)$.
7. Jak je definována rovina normálová, rektifikační, oskulační?
8. Čím se liší pojem křivosti u rovinných a prostorových křivek?

Úkoly k textu

1. Zobrazte příklady křivek zadaných parametrickým předpisem.
2. Ukažte příklady křivek se zadáním v cylindrických souřadnicích.
3. Uveďte a zobrazte příklady křivek ve sférických souřadnicích.
4. V několika bodech křivky nakreslete Frenetův trojhran.
5. Zobrazte křivku která je průnikem dvou ploch.
6. Zobrazte soustavu rovnoběžných křivek k dané křivce.
7. Spočítejte délku oblouku několika prostorových křivek.

Pro realizaci takových úloh můžeme použít vlastní programy, nebo funkce `ezplot3`, `plot3`, `contour`, `ezcontour` - v Matlabu, `plottools[curve]`, `plot[polar]`, `plot[parametric]`, `plots[spacecurve]`, `geom3d[intersection]` - v Maple.

Mathematica - `ListPointPlot`, `RegionPlot3D`, `ContourPlot3D`, `ParametricPlot3D`,

4 Aproximační křivky

Studijní cíle: Cílem této kapitoly je zopakovat si konstrukci polynomických interpolantů v jedné dimenzi, uvést konstrukci interpolačních splajnů v lokální (pp) i B-splajnové reprezentaci. Dále zopakovat si princip a realizaci metody nejmenších čtverců pro aproximaci funkce nebo diskretních dat polynomem, splajnem. V poslední části uvedeme některé konstrukce aproximačních křivek definovaných pomocí kontrolního polygonu (Bezier, Coons).

Klíčová slova: Interpolace polynomy, splajny; aproximace metodou nejmenších čtverců; Bezierovy a B-splajnové křivky určené kontrolním polygonem.

Potřebný čas: 240 minut.

Průvodce studiem

V předešlých kapitolách jsme se zabývali křivkami, pro které jsme měli k dispozici nějakou formu jejich funkčního předpisu, nebo předpisy pro objekty (plochy) tyto křivky generující.

V této kapitole se budeme zabývat křivkami, které aproximují předpisy pro spojité procesy, ke kterým máme k dispozici jen některá diskretní data (interpolace, metoda nejmenších čtverců), nebo u kterých jejich složitý předpis chceme nahradit jednodušším (zpravidla jako lineární kombinaci vhodných bázových funkcí podle zvoleného kritéria- minimalizace odchylky vyjádřené podle typu problému). Cílem jejich konstrukce je získat informaci o hodnotách takové funkce i v ostatních bodech z nalezené aproximace. S těmito druhy aproximace jsou studenti seznamováni již v kurzu numerických metod. Dalším -novým - typem aproximace (bez přesné formulace odchylky) jsou křivky definované jejich kontrolním polygonem. Jeho změnou lze ovlivňovat tvar křivky tak, aby odpovídal požadavkům a zkušenostem zadavatele.

4.1 Úloha interpolace diskretních dat křivkou ve 2D

Interpolace - obecná formulace problému:

Pro danou uspořádanou množinu vzájemně různých bodů, funkčních hodnot v nich a bázi interpolujících funkcí najít lineární kombinaci bázových funkcí, která splňuje podmínky interpolace (křivku, která prochází zadanými body, interpoluje zadané hodnoty).

interpolace

Často používané prostory funkcí a jejich báze: polynomy, trigonometrické polynomy, exponenciální funkce, splajny.

Obecnějším problémem je interpolace funkčních hodnot i hodnot derivací v daných bodech interpolace (hermitovská, lakunární interpolace), případně interpolace integrálních středních hodnot (histopolation) nebo interpolace obecnějších lineárních funkcio-nálů. O řešení takových úloh je možno najít řadu prací v oblasti teorie interpolace.

4.1.1 Interpolace polynomy $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$

Formálně nejjednodušším přístupem je výpočet koeficientů interpolujícího polynomu v explicitním tvaru metodou neurčitých koeficientů pro zadaná data $\{x_i, g_i, i = 0(1)n\}$ a jim odpovídající stupeň polynomu n . Podmínky interpolace

$$\{x_i, g_i\}_{i=0}^n, \longrightarrow P_n(x_i) = g_i \leftrightarrow \sum_{j=0}^n a_j x_i^j = g_i, i = 0(1)n.$$

*interpoláčn\u00ed
polynom*

představují soustavu lineárních rovnic pro výpočet koeficientů $a_j, j = 0(1)n$.

V\u011bta: \u00dalo polynomick\u00e9 interpolace je jednoznačně řešiteln\u00e1 (viz např. [9]).

Jin\u00e9 techniky konstrukce interpoláčn\u00edho polynomu (explicitn\u00ed formule):

*explicitn\u00ed
formule*

Lagrange\u00f3v interpoláčn\u00ed polynom s (lagrangeovsk\u00fdmi) koeficienty $l_i(x)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x)g_i, \quad l_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j)/(x_i - x_j).$$

Vlastnost lagrangeov\u00fdch koeficient\u00f3v : $l_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 0(1)n$.

Pro chybu interpolace p\u0159\u00ed $g_i = g(x_i), g \in C^{n+1}$ mezi uzly plat\u00ed

$$g(x) - L_n(x) = R_{n+1}(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad |g(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|,$$

$$M_{n+1} = \max |g^{(n+1)}(x)|.$$

Newton\u00f3v interpoláčn\u00ed polynom s použit\u00edm pom\u011brn\u00fdch diferenc\u00ed

$$[x_i, x_{i+1}]g = (g_{i+1} - g_i)/(x_{i+1} - x_i);$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]g = ([x_{i+1}, x_{i+2}]g - [x_i, x_{i+1}]g)/(x_{i+2} - x_i), \dots$$

$$P_n(x) = g_0 + (x - x_0)[x_0, x_1]g + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]g + \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]g + \dots$$

Speci\u00e1ln\u00ed p\u0159\u00edpady - ekvidistantn\u00ed s\u00ed\u0165; v\u00fdhoda - mo\u017enost p\u0159id\u00e1vat nebo ub\u00edrat uzly v pot\u0159ebn\u00e9 \u010d\u00e1sti).

Pro realizaci polynomick\u00e9 interpolace m\u00e1me v programov\u00fdch p\u0159ost\u0159edc\u00edch k dispozici r\u00fazn\u00e9 funkce

Matlab - *polyfit, Basic Fitting*

Maple - *Curve Fitting[PolynomialInterpolation]*

Mathematica - *InterpolatingPolynomial, InterpolatingFunction*

Hermitovsk\u00e1 interpolace -

je interpolac\u00ed funk\u010dn\u00edch hodnot a derivac\u00ed v bodech interpolace; nejjednodu\u0161\u00ed \u010d\u00e1loha -

*obecn\u011bj\u00ed\u0161\u00ed
\u010d\u00e1lohy
interpolace*

$$\text{data } \{x_i, g_i, g'_i\}, i = 0(1)n : \longleftrightarrow H_{2n+1}(x) = \sum_i (g_i h_i(x) + g'_i \bar{h}_i(x)).$$

Vlastnosti b\u00e1zov\u00fdch funkc\u00ed $h_i(x), \bar{h}_i(x)$ (polynom\u00f3v stupn\u011b $2n + 1$):

$$h_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad h'_i(x_j) = 0; \quad \bar{h}_i(x_j) = 0, \quad \bar{h}'_i(x_j) = \delta_{ij}$$

(najd\u00e9te jejich funk\u010dn\u00ed p\u0159edpis, nakreslete graf).

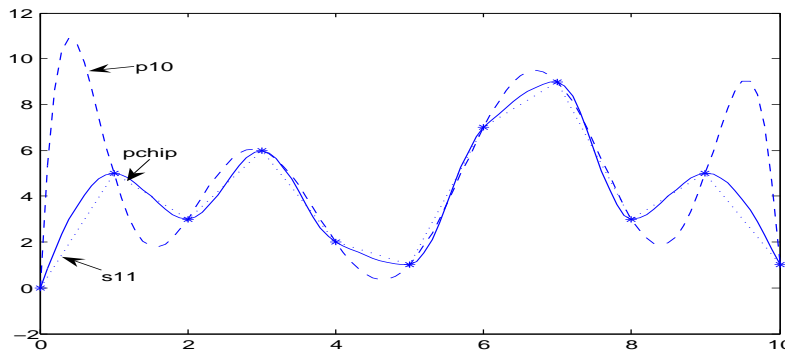
P\u0159\u00ed zad\u00e1n\u00ed v\u00fd\u0161\u00edch derivac\u00ed v uzlech se zvy\u0161uje stupe\u0148 interpolantu. P\u0159\u00ed zad\u00e1n\u00ed i v\u00e1\u0161ech druh\u00fdch derivac\u00ed m\u00e1 hermitovsk\u00fd interpolant stupe\u0148 $3n + 2$.

Po částech hermitovská interpolace - první splajny (lokální charakter):

na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ jeho hermitovská data určují kubický polynom; jejich spojením dostaneme funkci se spojitými prvními derivacemi .

V Matlabu provádí funkce *interp1* s argumentem *pchip* takovou hermitovskou interpolaci, kde neznámé hodnoty derivací v uzlech si program spočítá (přibližně) sám pomocí formulí numerické derivace ze zadaných funkčních hodnot.

Lakunární interpolace - problém interpolace funkčních hodnot a různých derivací



obr. 7 interpolace polygonem s11 , po částech hermitovská (pchip), P_{10}

v bodech, kde jsou některé derivace vynechány. Taková úloha nemusí mít obecně řešení - například úloha s třemi body se zadanými funkčními hodnotami a druhými derivacemi.

Extraplace - termín pro výpočet hodnot interpolantu vně sítě uzlů, technik pro výpočet přesnějších hodnot pomocí vhodných méně přesných formulí.

Interpolace trigonometrickými polynomy, exponenciálami

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_i [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad f(x) = \sum_j c_j \exp(a_j x)$$

Výpočet koeficientů provedeme dosazením podmínek interpolace do hledaného tvaru interpolantu - dostaneme tak soustavu rovnic pro výpočet neznámých koeficientů (metoda neurčitých koeficientů; explicitní formule pro ekvidistantní uzly; nelineární úlohy).

Jestliže body interpolace mají dát ve výsledku obecnější parametrickou křivku, pak použijeme v každé složce např. interpolaci parametrickými polynomy, kde výsledný tvar křivky závisí také na volbě pametrizace (celočíslná, délka křivky, délka polygonu, jednotkový interval- viz podrobněji v odst. 4.5).

K interpolaci polynomy máme ve výpočetních prostředcích řadu funkcí:

Matlab - polyfit (vypisuje koeficienty interpolačního polynomu při odpovídající volbě stupně),

Maple - CurveFitting[PolynomialInterpolation] (vypisuje analytický tvar interpolantu)

Mathematica - InterpolatingPolynomial (Newtonův tvar), InterpolatingFunction (pro jiné typy interpolantu).

4.1.2 Polynomické interpolující splajny

Při větším počtu bodů interpolace mají polynomické interpolanty odpovídajících stupňů zpravidla velké oscilace v krajních intervalech (a také větší chybu interpolace). Proto ve 20. století došlo ke konstrukci funkcí, skládajících se po částech z polynomů nízkých stupňů a spojených s dostatečnou hladkostí - polynomických splajnů.

Polynomické splajny $S_{nd}(x)$ na síti uzlů splajnu $x_i, i = 0(1)n$ jsou funkce složené z polynomických segmentů stupně n v jednotlivých intervalech sítě s defektem (hladkosti) d , $S_{nd} \in C^{n-d}$.

Jeho lokální parametry (funkční hodnoty, derivace) umožňují zformulovat podmínky spojitosti vuzlech jako soustavu lineárních rovnic pro tyto parametry a např. při zadaných funkčních hodnotách v uzlech spočítat první derivace v nich k dosažení celkové C^2 -spojitosti (viz [9]).

Srovnání aproximačních vlastností splajnů s polynomy vyšších stupňů ukazuje na méně oscilací u splajnů, dobré aproximace i pro vyšší derivace.

Lineární interpolující splajn $S_{11} \in C^0$ - polygon ([9]).

Data $\{x_i, g_i\}$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, $q = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i \longrightarrow$

lokální reprezentace jednotlivých segmentů a chyba interpolace

$$S_{11}(x) = (1 - q)g_i + qg_{i+1}; \quad (g - S_{11})(x) = (1/2)g''(\xi_i)(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Aproximační vlastnosti $\dots \| (g - S_{11}(x)) \|_\infty \leq (1/8)H^2 \| g'' \|_\infty$, $H = \max_i h_i$.

Hermitovský splajn $S_{32} \in C^1$: interpoluje data $\{x_i, g_i, g'_i\}$ (viz [9], str. 27)

Lokální reprezentace: pro $x \in (x_i, x_{i+1})$, $q = (x - x_i)/h_i$

$S_{32} \in C^1$

$$S_{32}(x) = (1 - 3q^2 + 2q^3)g_i + q^2(3 - 2q)g_{i+1} + h_i q(1 - q)[(1 - q)g'_i - qg'_{i+1}]$$

(použity 4 části hermitovských koeficientů h_i, \bar{h}_i nenulových v tomto intervalu)

Aproximační vlastnosti $\dots \| (S_{32}g - g)^{(j)} \|_\infty \leq C_j H^{4-j} \| g^{(4)} \|_\infty$, $C_0 = 1/384$

pro data z hladké funkce $g(x)$, $g_i = g(x_i)$, $g'_i = g'(x_i)$, $H = \max_i h_i$.

Lokální charakter interpolantu (změna ovlivní jen sousední dva intervaly).

Kubické interpolující splajny $S_{31} \in C^2$ - mají spojitě druhé derivace, patří k nejpoužívanějším splajnům (podrobněji viz [9]).

Lokální parametry (jedna možná forma - jiná s druhými derivacemi)

$S_{31} \in C^2$

$\{x_i, g_i, m_i = g'_i, i = 0(1)n + 1\}$, m_i - neznámé hodnoty první derivace.

Myšlenka - najít je tak, aby v uzlech splajnu byly spojitě i druhé derivace.

Lokální reprezentace pro $x \in (x_i, x_{i+1})$ (je stejná jako u S_{32})

lokální
reprezentace,
podmínky
spojitosti

$$S_{31}(x) = (1 - q)^2(1 + 2q)g_i + q^2(3 - 2q)g_{i+1} + h_i q(1 - q)[(1 - q)m_i - qm_{i+1}].$$

Podmínky spojitosti pro druhou derivaci (CC) dostaneme srovnáním hodnot druhých derivací pro sousední segmenty ve společném uzlu x_i , $i = 1(1)n$ zleva, zprava:

$$(CC) \quad h_i m_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})m_i + h_{i-1} m_{i+1} = 3[h_{i-1} \frac{g_{i+1} - g_i}{h_i} + h_i \frac{g_i - g_{i-1}}{h_{i-1}}],$$

$$\frac{1}{6}(m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1}) = \frac{1}{2h}(g_{i+1} - g_i), \quad i = 1(1)n \quad \text{pro ekvidistantní uzly}$$

(vážený průměr hodnot derivace spočítaných formulí numerické derivace).

Dvě okrajové podmínky (BC) (počet parametrů $m_i = \text{počet CC} + 2$) ... doplňují soustavu (CC) k jednoznačnému určení hodnot m_i a celého splajnu.

Typy (BC) - m_0, m_{n+1} ; druhé derivace; periodičnost; not-a-knot conditions

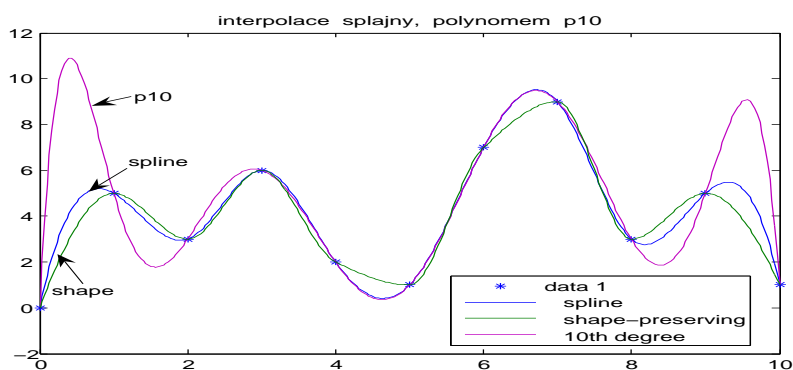
Aproximační vlastnosti kubického interpolujícího splajnu :

$$\|(S_{31}g - g)^{(j)}\|_{\infty} \leq C_j H^{4-j} \|g^{(4)}\|_{\infty}, \quad j = 0(1)3, \quad C_0 = 5/384$$

Lokalizovaný vliv změn dat g_i , BC (významnější změny v neblížších intervalech).

Matlab - `interp1(spline, pchip, csape)`;

`SplineToolbox` - `csapi` - umožňuje počítání i se splajny vyšších stupňů.



obr.8 interpolace kubickým splajnem, polynomem P_{10}

Kvadratické splajny $S_{21}(x) \in C^1$ - mají spojité první derivace ([9])

Jednoduchá síť uzlů (interpolace v uzlech splajnu) vede ke splajnům s netlumeným šířením změn (chyb). *Lokální reprezentace*

$$S_{21}(x) \in C^1$$

$$(LR) \quad S_{21}(x) = (1 - q)^2 g_i + q^2 g_{i+1} + h_i q (1 - q) m_i, \quad m_i = S'_{21}(x_i)$$

s neznámými hodnotami derivací m_i vede srovnáním hodnot derivací k podmínkám

$$(CC) \quad m_i + m_{i+1} = 2(g_{i+1} - g_i)/h_i, \quad i = 1(1)n,$$

ze kterých můžeme - např. při zvolené hodnotě m_0 - spočítat ostatní hodnoty derivací.

Po oddělení uzlů splajnu x_i a bodů interpolace t_i , $x_i < t_i < x_{i+1}$, $d_i = (t_i - x_i)/h_i$ a hodnotami $g_i = g(t_i)$ dostaneme lokální reprezentaci splajnu

$$(LR) \quad S_{21}(x) = g_i + h_i(q - d_i)[m_i + \frac{1}{2}(q + d_i)(m_{i+1} - m_i)],$$

s podmínkami spojitosti prvních derivací

$$(CC) \quad m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} = 8(g_i - g_{i-1})/h_i \quad \text{pro ekvidistantní síť;}$$

přidáním 2 BC do (CC) dosáhneme jednoznačnosti interpolujícího splajnu.

Diagonální dominance matice soustavy podmínek (CC)+(BC) v tomto případě vede k lokalizovanému vlivu změn dat na průběh celého splajnu.

Aproximační vlastnosti: $\|g - Sg\|_{\infty} \leq CK^3 \|g'''\|_{\infty}$, $K = \max_i \{t_{i+1} - t_i\}$.

Poznámky:

Při interpolaci integrálních středních hodnot kvadratickým splajnem (se vhodnou lokální reprezentací - viz [9]) dostaneme opět diagonální dominanci, lokalizaci vlivu jejich změn.

Možnosti jiných lokálních reprezentací - viz [9].

Lokální reprezentace splajnů vyšších stupňů a odpovídající podmínky spojitosti - viz [9].

Jiné úlohy - interpolace derivací, obecněji - hodnot lineárních funkcí .

Při obecné poloze bodů interpolace můžeme použít interpolaci parametrickým splajnem (splajn pro každou složku takové křivky ve 2D, 3D - viz dále).

Výhody používání lokálních reprezentací při stálém stupni splajnu - jednoduchost algoritmu.

Nevýhody - při potřebě měnit stupeň splajnu (pro dosažení potřebné přesnosti, vhodných tvarů křivky) je třeba používat jiné algoritmy, odpovídající zvolenému stupni.

Vzhledem k počtu koeficientů a podmínek interpolace se poněkud liší okrajové podmínky pro splajny sudých a lichých stupňů (viz [9]) .

Software pro interpolaci splajny:

V programových systémech najdeme nejčastěji zabudovány tzv. přirozené kubické splajny, které doplňují podmínky interpolace nulovými hodnotami druhých derivací na okrajích sítě uzlů splajnu. *software*

Matlab - *interp1 - spline, Basic Fitting; Spline Toolbox - csapi, csape, spapi; splinetool*

Maple - *CurveFitting -spline*; používá kubické splajny, vypisuje jejich lokální části.

Mathematica - *InterpolatingFunction, SplineFit*

4.2 Bázové splajny = B-splajny

V průběhu 20.století byly nalezeny lokální reprezentace splajnů 1.-10. stupně a odpovídající podmínky spojitosti splajnu. Hledal se ovšem i jednotný přístup ke konstrukci splajnů různých stupňů - zkoumaly se "cut powers" $(x-x_j)_+^k$, "fundamentální splajny" s vlastností lagrangeových koeficientů - obojí ale byly spojeny s jistými problémy v realizaci potřebných algoritmů. Vhodným jednotným přístupem ke zpracování algoritmů pro počítání se splajny různých stupňů se ukázaly být B-splajny (zkratka pro bázové splajny - C. de Boor, [1]), které pro zadanou neklesající (a zpravidla vhodně rozšířenou) posloupnost uzlů splajnu $\{y_i\}$ (jejich násobnost zmenšuje hladkost v daném uzlu) a zvolený stupeň splajnů tvoří bázi prostoru všech takových splajnů (viz [1], [9]) .

Bázové splajny : Původní definice C. de Boora s poměrnou diferencí "cut powers"

(vhodná k odvození řady vlastností B-splajnů) používá termín

" spline order \simeq řád splajnu = $k =$ stupeň splajnu +1 ", $k \geq 2$;

každému uzlu $y_i, i \in Z$ splajnu odpovídá B-splajn řádu $k \geq 2$

definice

$$B_i^k(x) = (y_{i+k} - y_i)[y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k}](t-x)_+^{k-1}$$

definovaný pomocí uzlů y_i, \dots, y_{i+k} a poměrné difference funkce $(t-x)_+^{k-1}$ vzhledem k proměnné t .

Každý takový B-splajn je po částech polynomickou funkcí (pp funkcí) a proto i každá jejich lineární kombinace je pp-funkcí.

Vlastnosti B-splajnů

vlastnosti

1. $B_i^k(x) \in C^{k-2}$, je to pp-funkce stupně nejvýš $k-1$, jejím nosičem je interval $\langle y_i, y_{i+k} \rangle$.

2. $B_i^k(x) \geq 0, \quad \sum_i B_i^k(x) = 1 \quad \forall x \in R$

3. Lineární kombinací B-splajnů stejného stupně na dané síti

dostaneme splajn téhož stupně $s(x) = \sum_i b_i B_i^k(x)$

$\{B_i^k(x)\}_{i=0}^n$ tvoří na dané síti uzlů bázi lineárního prostoru splajnů řádu nejvýše k (stupně $k-1$). (Curry - Schoenberg)

4. Rekurzivní generování B-splajnů různých stupňů - základ implementací

rekurze

$$B_i^1(x) = \begin{cases} 1 & \dots & x \in \langle y_i, y_{i+1} \rangle \\ 0 & \dots & \text{jinak} \end{cases},$$

$$B_i^k(x) = \frac{x - y_i}{y_{i+k-1} - y_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{y_{i+k} - x}{y_{i+k} - y_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

Pro celočíselnou ekvidistantní síť $y_i = i$, ($B^k = B_0^k$) platí

$$B^k(x) = \frac{x}{k-1} B^{k-1}(x) + \frac{k-x}{k-1} B^{k-1}(x-1)$$

5. Derivací (integrací) B-splajnu dostáváme B-splajn nižšího (vyššího) stupně

$$\frac{d^j}{dx^j} \sum_i b_i B_i^k(x) = \sum_i b_i^j B_i^{k-j}(x), \quad b_i^j = \frac{b_i^{j-1} - b_{i-1}^{j-1}}{y_{i+k-j} - y_i}$$

Podobné rekurentní vztahy platí i mezi B-splajnovými koeficienty splajnu a koeficienty jeho primitivní funkce ([1], [9], str. 115).

Na celočíselné síti uzlů splajnu $y_j = j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ dostaneme z definice

$$B^k(x) = B_0^k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)_+^{k-1}.$$

Příklady:

Pro kvadratický a kubický B-splajn na takové síti tak dostaneme explicitní předpisy

$$B^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{1}{2}(-2x^2 + 6x - 3) & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{1}{2}(3-x)^2 & x \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$B^4(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{1}{6}[x^3 - 4(x-1)^3] = \frac{1}{6}(4 - 12x + 12x^2 - 3x^3) & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{1}{6}[(4-x)^3 - 4(3-x)^3] & x \in \langle 2, 3 \rangle \\ \frac{1}{6}(4-x)^3 & x \in \langle 3, 4 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Odtud můžeme spočítat např.

$$B^3(1/2) = 1/8, \quad B^3(1) = 1/2, \quad B^3(3/2) = 3/4 \quad \text{a symetricky pro } x = 2, 5/2, \\ B^4(1/2) = 1/48, \quad B^4(1) = 1/6, \quad B^4(3/2) = 23/48, \quad B^4(2) = 2/3, \dots$$

Poznámka:

V literatuře najdeme často také jiné označení bazových splajnů :

$N_i^d(x)$ - bazový splajn stupně d , index $i \simeq$ střed nosiče.

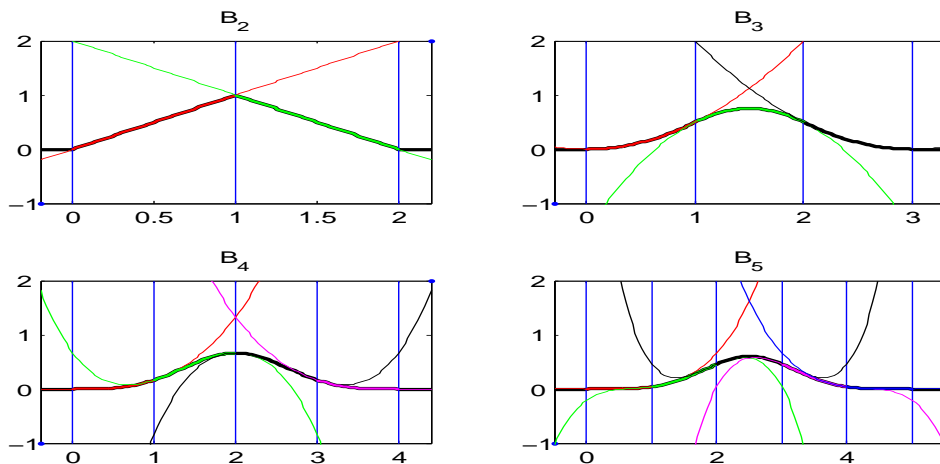
Příklad - lineární splajn na síti jednoduchých uzlů $x_i, i = 0(1)n+1$,

$$s_1(x) = \sum_{i=1}^n a_i N_i^1(x), \quad N_i^1(x) = B_{i-1}^2(x),$$

Matlab - Spline Toolbox (*bsplidem*) - příklady B-splajnů na zvolené síti.

Maple - *BSpline*,

Mathematica - *SplineFit*



obr. 9 bázové splajny na celočíselné síti a jejich segmenty

4.3 Interpolace B-splajny

Formulace úlohy: při zadaných datech

$\{y_i\}_{i=0}^{n+k}$ - uzly splajnu (rozšířená síť, případně vhodně znásobené krajní uzly),
 $\{t_i, g_i\}_{i=0}^n$ - body interpolace (v obecné poloze), předepsané funkční hodnoty
 najít interpolační splajn daného stupně v B-splajnové bázi, splňující podmínky

$$(CI) - \text{podmínky interpolace} \quad s(t_i) = g_i \cdots \sum_j b_j B_j^k(t_i) = g_i, \quad i = 0(1)n$$

Po výpočtu koeficientů b_j můžeme k výsledný tvar najít a vykreslit např. pomocí funkce *sprcv* v Matlabu.

B-splajnová reprezentace umožňuje řešení úlohy interpolace s obecnějším rozložením bodů interpolace mezi uzly splajnu :

Věta (Schoenberg-Whitney): Nutnou a postačující podmínkou jednoznačné řešitelnosti této úlohy (v závislosti na geometrii sítě bodů interpolace a uzlů splajnu) je ([1])

řešitelnost

$$\det[B_j^k(t_i)] \neq 0 \Leftrightarrow B_i^k(t_i) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \quad y_i < t_i < y_{i+k})$$

Tvarové vlastnosti splajnů v B-splajnové bázi (*Variation diminishing property*) :

Počet znaménkových změn splajnu $s(x)$ je menší nebo roven počtu znaménkových změn v posloupnosti $\{b_i\}$ jeho B-splajnových koeficientů.

tvarové

Pro kubický splajn S_{31} : z monotonnosti posloupnosti $\{b_i\}$ plyne monotonnost splajnu

vlastnosti

Počítačové prostředky:

Matlab - *interp1*, *spline*; SplineToolbox *spapi*, *csapi*, *csape*, ...

Maple - *CurveFitting[spline]*, *BSpline*, *BSplineCurve*

Racionální B-splajny

$R_i^k(x) = w_i B_i^k(x) / (\sum_j w_j B_j^k(x))$, $w_i \cdots$ váhové koeficienty

(umožňují lepší vystižení složitějších tvarů); požívané u NURBS - křivek ([4]).

Extremální vlastnosti interpolačních splajnů: $a = x_0$, $b = x_{n+1}$; $\{g_i = g(x_i)\}$

$S_{11}g$ minimalizuje oscilace $\int_a^b (f'(x))^2 dx \quad \forall f \cdots f(x_i) = g_i$

$S_{32}g$ minimalizuje křivost $\int_a^b (f''(x))^2 dx \quad \forall f \cdots f(x_i) = g_i, \quad f'(x_i) = g'_i$

jiné

$S_{31}g$ minimalizuje křivost $\int_a^b (f''(x))^2 dx \quad \forall f \cdots f(x_i) = g_i$

vlastnosti

(přirozený splajn - $S_{31}''(a) = S_{31}''(b) = 0$, funkce *spaps* ve SplineToolboxu)

$S_{21}(x)$ minimalizuje $\int_a^b (f'(x))^2 dx$ při interpolaci středních hodnot
 $g_i = (1/h_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx$

Vyhlazovací splajny - minimalizují funkcionál (kombinace hladkosti a interpolace)

$$J(f) = \int_a^b [f^{(m)}(x)]^2 dx + \sum_i w_i (g_i - f(x_i))^2$$

Jiné typy splajnů ([9]):

L-, Lg- splajny; trigonometrické, exponenciální, hyperbolické splajny.

Variační teorie splajnů (založená na extrémálních vlastnostech, rozšiřuje třídy splajnových funkcí, vyžaduje znalosti funkcionální analýzy).

Matlab - *interp1-spline*; *Spline Toolbox* - *spapi, spape, spaps, csaps, bspline, spcrv*,
 Curve Fitting Toolbox

Maple - *BSpline, BSplineCurve, CurveFitting[BSpline]*,

software

Mathematica - *Splines Package (SplineFit, SplineFunction, Spline)*

4.4 Aproximace metodou nejmenších čtverců - MNČ (LSQ)

Obecná myšlenka metody: aproximace $g(x)$ minimalizuje středněkvadratickou odchylku od vstupních dat (diskretní data, funkce). Tato odchylka d je zpravidla definována pro diskretní data $[x_i, y_i]$ nebo pro funkci $f(x)$ na intervalu předpis

*princip
MNČ*

$$d^2 = \sum_i w_i [g(x_i) - y_i]^2, \quad d^2 = \int_a^b w(x) [g(x) - f(x)]^2 dx$$

s váhovými koeficienty $w_i \geq 0$, váhovou funkcí $w(x) \geq 0$.

Obecný model v hilbertovském prostoru (viz [12], II, str. 622):

Symbole: skalární součin (f, g) , norma $\|f\| = (f, f)^{1/2}$, $w(x)$ - váhová funkce.

Diskretní data $y_i, g_i \dots (y_i, g_i) = \sum y_i g_i$;

spojitý případ $\dots (f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$.

Lineární prostor funkcí s bází $\{f_i, i = 0(1)m\}$, aproximace $g \simeq g_m = \sum_0^m a_i f_i$, středněkvadratická odchylka $d^2 = \|g - g_m\|^2 \rightarrow \min$ (jako funkce koeficientů a_i).

Minimalizace d^2 vede k výpočtu koeficientů a_i z *normální soustavy*

$$\sum_{i=0}^n a_i (f_i, f_j) = (g, f_j), \quad j = 0(1)m$$

Konkrétní forma skalárního součinu odpovídá spojitě, diskretní úloze.

*normální
soustava*

MNČ s použitím polynomů - často používaný postup (lineární regrese ve statistice).

Data $\{x_i, y_i\}, i = 0(1)n$; zvolená báze $\{x^j\}, j = 0(1)m < n$

($m = n \dots$ interpolace)

$$(NS) \quad \sum_{i=0}^m a_i \sum_{j=0}^n x_j^{i+k} = \sum_{j=0}^n y_j x_j^k, \quad k = 0(1)m$$

Příklad:

Pro aproximaci diskretních dat $[x_j, y_j]$, $j = 0(1)n$ s váhovými koeficienty $w_i = 1$ lineární funkcí (přímkou) $g(x) = a + bx$ ve smyslu MNČ dostaneme pro koeficienty a, b normální soustavu

$$(n+1)a + b \sum_{j=0}^n x_j = \sum_{j=0}^n y_j, \quad a \sum_{j=0}^n x_j + b \sum_{j=0}^n x_j^2 = \sum_{j=0}^n x_j y_j.$$

Pro aproximaci funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ polynomem $g(x) = a + bx + cx^2$ s váhovou funkcí $w(x)$ má normální soustava tvar

$$\begin{aligned} a \int_a^b w(x) dx + b \int_a^b w(x) \cdot x dx + c \int_a^b w(x) \cdot x^2 dx &= \int_a^b w(x) f(x) dx, \\ a \int_a^b w(x) \cdot x dx + b \int_a^b w(x) \cdot x^2 dx + c \int_a^b w(x) \cdot x^3 dx &= \int_a^b w(x) \cdot x \cdot f(x) dx, \\ a \int_a^b w(x) \cdot x^2 dx + b \int_a^b w(x) \cdot x^3 dx + c \int_a^b w(x) \cdot x^4 dx &= \int_a^b w(x) \cdot x^2 \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

Vlastnosti matice (NS) pro polynomy: jejich špatná podmíněnost pro polynomy vyššího stupně vede k nepřesným výpočtům koeficientů aproximace.

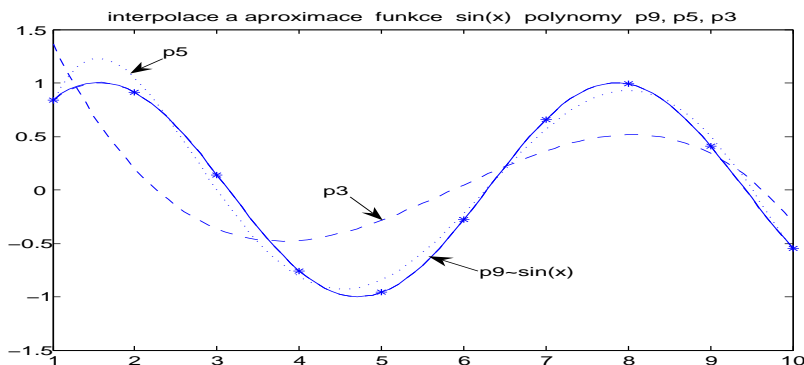
Použití OGS polynomů, funkcí, B-splajnů vede na pásové matice, dobrou podmíněnost.

Matlab - *polyfit* pro polynomy, *spap2*, *spaps* - pro spojitou verzi, splajny.

software

Maple - *CurveFitting[LeastSquares]*

Mathematica - *Fit* (MNČ se zvolenou bází)



obr. 10 interpolant a aproximace MNČ z 10 hodnot funkce $\sin(x)$

Použití splajnů v MNČ - (používá se bázových splajnů s rozšířenou sítí):

Sítí uzlů $\{y_i\}$, $i = 0(1)m + k \dots \{B_i^k(x)\}$, $i = 0(1)m$, $s(x) = \sum a_i^k B_i^k(x)$

Normální soustava pro koeficienty B-splajnu aproximujícího data (funkci) g ve smyslu MNČ (matice je pásová - šířka souvisí se stupněm splajnu)

$$(NS) \quad \sum_{i=0}^m a_i^k (B_i^k, B_j^k) = (g, B_j^k), \quad j = 0(1)m$$

(viz [1], [9]; často se používá tzv. normalizovaných B-splajnů číslovaných podle středu nosiče a stupně polynomu - např. $N_i^3 = B_{i-2}^4$).

Postup výpočtu ve spojitě verzi: výpočet prvků matice soustavy (integrály), vektoru pravé strany soustavy, řešení soustavy, splajn v B-splajnové bázi. (Matlab - *spap2*)

Chyba aproximace:

$$\|g - S_{31}\|_2 \leq C_3 H^4 \|g^{(4)}\|_2, \quad \|g - S_{11}\|_2 \leq C_1 H^2 \|g''\|_2$$

Diskretní verze: Při zadaných uzlech splajnu a jeho stupni je tím určena B-splajnová báze prostoru splajnů (počet jejích funkcí). Při zadaných hodnotách t_j, g_j a jejich rozmístění pak skalární součiny $(N_i^m, N_k^m) = \sum_j N_i^m(t_j)N_k^m(t_j)$ se redukují na součet součinů hodnot v bodech t_j ležících v průniku nosičů N_i^m, N_k^m . Matice normální soustavy je tedy opět pásová. Volbou uzlů splajnu a jeho stupně tak můžeme ovlivnit výsledný tvar aproximačního splajnu.

Poznámka: ve Spline Toolboxu Matlabu a jiných zdrojích najdeme i další druhy splajnů. Vyhlazovací splajny (kombinace MNC a kritérií křivosti) jsou v Matlabu implementovány ve funkcích *spaps, csaps*.

4.5 Interpolace a aproximace parametrickými křivkami

Složitější křivky ve 2D, kde jedné hodnotě proměnné x může odpovídat více hodnot y (a mohou vzniknout smyčky, průsečky), nebo křivky ve 3D se nedají popsat explicitním předpisem - popisují se v jiných typech souřadnic, nebo (nejčastěji) jako parametrické křivky.

Interpolace

Chceme-li proložit obecně rozloženými body v rovině nebo v prostoru křivku, pak i pro interpolant použijeme (při zvolených bázevých funkcích) jeho parametrickou formu, podobnou ve 2D, 3D.

Parametrická křivka ve vektorovém tvaru $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in I$ bude interpolantem v bodech s parametry $\{t_i\}$, $i = 0(1)n \cdots \mathbf{P}_i = [x_i, y_i, z_i]$, jestliže splňuje podmínky interpolace v každé složce -

$$x(t_i) = x_i, y(t_i) = y_i, z(t_i) = z_i, \quad i = 0(1)n.$$

Používané třídy interpolantů jsou opět polynomy, splajny, jiné vhodné funkce .

Po zvolení vhodné báze pro interpolant představují pak podmínky interpolace soustavu $3(n+1)$ rovnic pro výpočet stejného počtu koeficientů interpolantů v jednotlivých složkách (ve 2D to bude soustava $2(n+1)$ rovnic). Po výpočtu koeficientů interpolantu pro každou složku je pak možné jej vykreslit jako parametrickou křivku .

Výsledný tvar parametrické křivky závisí také na zvolené parametrizaci. Používané způsoby jsou přirozená parametrizace (délka oblouku - často ale neznámá)ů její aproximace - délka polygonu spojujícího body interpolace od počátečního bodu; celočíselná parametrizace posloupnosti bodů interpolace.

Uzavřenou křivku dostaneme ztotožněním prvního a posledního bodu interpolace.

Ve 2D můžeme u explicitního předpisu použít jednoduchou parametrizaci předpisu

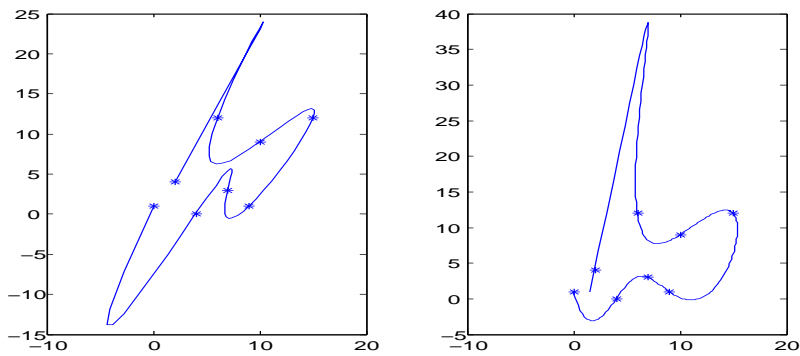
$$y = f(x) : \longleftrightarrow x = t, y = f(t).$$

U složitějších křivek - podle parametrického předpisu křivky, odpovídajících souřadnic, délky oblouku.

Ve 3D - nemáme explicitní předpis pro křivku; nejčastěji jde o parametrické křivky (parametry mohou být některé ze složek ve sférických, válcových souřadnicích).

Celkový postup při interpolaci parametrickými polynomy:

Očíslování bodů interpolace, volba parametrizace, výpočet interpolantu pro každou složku, výpočet jejich hodnot na dostatečně husté síti hodnot parametru, vykreslení parametrické křivky. *postup*



obr. 11 interpolace parametrickou křivkou - různé parametrizace

Příklady:

Interpolace parametrickými polynomy ve 2D, 3D (stupeň = počet bodů - 1).

Na obr. 11 je polynomický interpolant s celočíselnou parametrizací bodů a s parametrem délky polygonu. V obou případech se projevila špatná podmíněnost soustavy při výpočtu koeficientů.

Graf lineárního interpolujícího splajnu dostaneme spojením bodů interpolace úsečkami.

Kvadratický, kubický interpolující parametrický splajn: pomocí algoritmů v jedné proměnné spočítáme parametrické složky (máme možnost volby okrajových podmínek), z nich vykreslíme 2D-3D křivku .

Hermitův parametrický splajn pro rovinnou křivku ([9], str. 177)

$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$ s derivacemi $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)]$ představuje dvojici splajnů $S_{32}(x, t)$, $S_{32}(y, t)$ interpolujících na síti $t_i, P_i = [x(t_i), y(t_i)]$ hodnoty $[x_i, \dot{x}(t_i)]$, $[y_i, \dot{y}(t_i)]$. V intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ můžeme tento splajn $S_{32}(t)$ zapsat vektorovou rovnicí (\mathbf{P}_i^1 - vektor derivací)

$$\mathbf{S}_{32}(t) := \mathbf{r}_i(t) = u_1(q)\mathbf{P}_i + u_2(q)\mathbf{P}_{i+1} + (t_{i+1} - t_i) [v_1(q)\mathbf{P}_i^1 + v_2(q)\mathbf{P}_{i+1}^1],$$

$$q = (t - t_i)/(t_{i+1} - t_i), \quad u_1(q) = 1 + q^2(2q - 3), \quad u_2(q) = q^2(3 - 2q), \\ v_1(q) = q(1 - q)^2, \quad v_2(q) = -q^2(1 - q) \quad (\text{hermitovské bázové funkce}).$$

K interpolaci ve 2D jinými typy funkcí, hermitovské interpolaci můžeme použít prostředků v systému Mathematica (InterpolatingFunction, InterpolatingPolynomial).

Metoda nejmenších čtverců (LSQ)

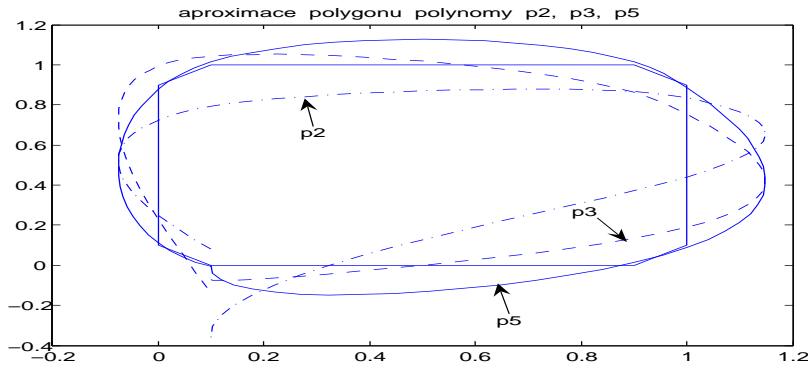
Obecný problém aproximace dat parametrickou křivkou je složitější v tom, jak tam vhodně posoudit a zformulovat středněkvadratickou odchylku křivky od diskretních dat.

Jeden z možných postupů ve 2D: sestavit parametrický interpolant složky $x(t)$, aproximaci (MNČ) pro složku $y(t)$ ve stejné parametrizaci. Výslednou aproximační křivkou bude parametrická křivka $[x(t), y(t)]$ (viz obr. 12).

Problémem bude v tomto případě najít uzavřenou aproximační křivku.

Poznámka: Metoda nejmenších čtverců ve více dimenzích je spojena s řadou problémů. Jednou z jednodušších lineárních úloh s aplikacemi např. ve statistice a lineární algebře je následující problém s řešením soustav lineárních rovnic.

Aproximace prostorových dat $[x_i, y_i, z_i]$ rovinou $ax + by + cz + d = 0$ vede na řešení přeuredené soustavy lineárních rovnic $ax_i + by_i + cz_i + d = 0$.



obr. 12 interpolant $x(t)$, aproximace MNČ pro $y(t) - P_2, P_3, P_5$

Jejím řešením ve smyslu MNČ je vektor s minimální velikostí normy residua - ten můžeme najít prostřednictvím singulárního rozkladu matice této soustavy (SVD - singular value decomposition), nebo například použitím zpětného lomítka $x = A \setminus b$ pro řešení takových soustav v Matlabu.

Kontrolní otázky

1. Zformulujte úlohu interpolace dat křivkou ve 2D, 3D.
2. Jaké jsou základní metody pro řešení úlohy interpolace ?
3. Kterou z metod zvolíme pro interpolaci dat uzavřenou křivkou ?
4. Kdy zvolíme k interpolaci dat trigonometrický polynom, kombinaci exponenciálních funkcí ?
5. Zformulujte úlohu hermitovské interpolace a metodou neurčitých koeficientů odvoďte explicitní formule pro hermitovské koeficienty $h_i(x), \bar{h}_i(x)$.
6. Jaká je definice kubického splajnu a čím je takový interpolující splajn jednoznačně určen ?
7. Aproximuje takový kubický splajn i první derivace, pokud jsou data vzata z hladké funkce ?
8. Jak postupujeme při řešení úlohy interpolace pomocí B-splajnů ?
9. Zformulujte úlohu aproximace diskretních dat polynomem ve smyslu MNČ.
10. Popište podrobněji postup při výpočtu takové aproximace: data, předpis aproximace - stupeň polynomu; výpočet koeficientů v NS, její řešení, výpočet funkčních hodnot aproximace pro grafické znázornění, středněkvadratická odchylka).
11. Zformulujte úlohu aproximace funkce definované na intervalu polynomem ve smyslu MNČ.

Úkoly k textu

1. Pro diskrétní data ze zvolené funkce nakreslete rovinnou interpolující křivku (explicitní) a porovnejte jejich grafy v závislosti na počtu a rozložení bodů interpolace a vlastostech zvolené funkce.
2. Pro složitější parametrickou křivku sestrojte její parametrický interpolant a porovnejte jejich grafy v závislosti na volbě bodů interpolace .
3. Pro obecné rozložení bodů ve 2D, 3D porovnejte jejich parametrické interpolanty v závislosti na jejich uspořádání, na zvoleném způsobu parametrizace.
4. Pomocí vhodných bodů interpolace nakreslete jako interpolant písmeno, iniciály jména (parametrická křivka - vliv volby bodů).
5. Porovnejte průběh interpolantů většího počtu stejných dat polynomem a kubickým splajnem (případně hermitovským splajnem pomocí funkce *interp1-pchip* v Matlabu).
6. Napište explicitní definice B-splajnů $B^2(x)$, $B^5(x)$ na celočíselné síti. Nakreslete jejich grafy.
7. Na stejných datech srovnajte použití interpolace polynomy, splajny s různou parametrizací.
8. Najděte grafy aproximací MNČ stejných dat lineárním, kvadratickým, kubickým polynomem, sledujte jejich odchylky.
9. Spočítejte a srovnajte pro zvolenou funkci její aproximace polynomy různých stupňů.
10. Vyzkoušejte si konstrukci aproximací diskretních dat MNČ ve 3D parametrickou křivkou.

Prostředky: CurveFitting, Basic Fitting, Spline Toolbox, ... Matlab
Maple, Mathematica

4.6 Bezierovy křivky - určené kontrolním polygonem

Předešlé postupy konstrukce aproximačních křivek vycházely z přesně formulovaných kritérií pro hledanou křivku (interpolace, minimální odchylka). V posledních desetiletích se s vývojem počítačů začaly realizovat algoritmy pro konstrukci křivek jen na základě jejich tvaru a vlastností viditelných na obrazovce, s možností jejich změn použitím jednoduché interakce. Tento interaktivní přístup k tvorbě aproximačních křivek (Casteljau, Beziere - konstrukce karoserií) nemá požadavek na interpolaci, minimalizaci odchylky (uplatňuje se zkušenost konstruktéra).

interaktivní přístup

Dává možnost změny tvaru křivky změnou bodů kontrolního polygonu v okolí požadované změny.

Tento přístup je realizován v četných grafických systémech, které pak nepožadují od uživatele podrobnější znalosti vlastního algoritmu a použitého matematického aparátu.

Bernšteinovy polynomy

Při konstrukci Bezierových křivek a ploch se jako bázových funkcí používá Bernšteinových polynomů, které byly použity již koncem 19. století v konstruktivním důkazu Weierstrassovy věty o nejlepší aproximaci spojitě funkce polynomem.

Bernšteinovy polynomy stupně n mají jednoduchý předpis

$B_i^n(t)$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0(1)n, \quad t \in [0, 1].$$

Příklady: $B_1^2(t) = 2t(1-t)$, $B_0^3(t) = t^3$, $B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$.

Vlastnosti Bernšteinových polynomů (plynou snadno z definice):

$$B_i^n(t) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [0, 1];$$

Symetrie: $B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t)$

Rekurze: $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$

je generující rekurzí (např. $B_1^3(t) = 3t(1-t)^2 = (1-t) \cdot 2t(1-t) + t(1-t)^2$), která umožňuje efektivně počítat funkční hodnoty těchto polynomů.

Polynom $B_i^n(t)$ má maximum v bodě $t_i = i/n$. (viz Matlab, *bsplinedem*)

Příklad: $n = 3 \dots 1, 4/9, 4/9, 1$ (viz obr. 13); $n = 4 \dots 1, (3/4)^3, 3/8, (3/4)^3, 1$.

Bezierova křivka stupně n s kontrolním (řídícím) polygonem $\{\mathbf{V}_i, i = 0(1)n\}$.

Kontrolní polygon v rovině generuje rovinnou křivku, ve 3D pro prostorovou křivku; zpravidla představuje hrubý obrys požadované křivky.

definice

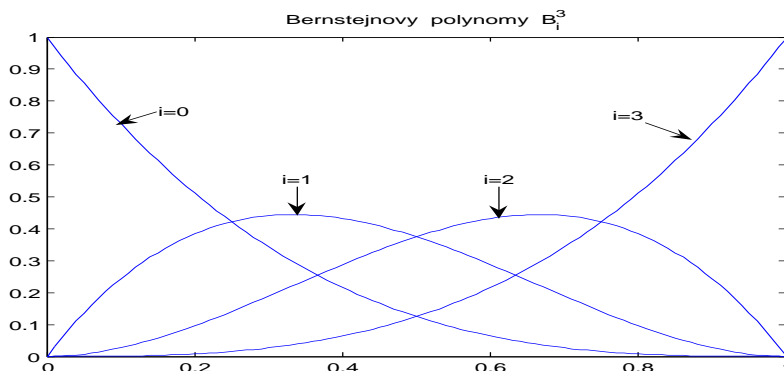
Bezierova křivka s tímto kontrolním polygonem je definována parametrickým (vektorovým) předpisem ($[4], [2], [6], [13], [11]$)

$$\mathbf{C}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{V}_i \in 2D, 3D$$

Vlastnosti Bezierových křivek

vlastnosti

1. Křivka začíná v bodě \mathbf{V}_0 a končí v bodě \mathbf{V}_n (*end point interpolation*); leží celá v konvexním obalu kontrolních bodů (*convex hull property*).



obr. 13 Bernštejnovy polynomy 3. stupně

Obecně neinterpoluje v kontrolních bodech, jen zhruba sleduje průběh kontrolního polygonu. Je invariantní vůči afinní transformaci souřadnic (transformaci křivky můžeme provést transformací kontrolního polygonu a opakovaním algoritmu pro její vykreslení).

2.

$$\left[\frac{d\mathbf{C}^n}{dt} \right]_{t=0} = n(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad \left[\frac{d\mathbf{C}^n}{dt} \right]_{t=1} = n(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$$

(směr tečných vektorů na okrajích křivky splývá s krajními úsečkami polygonu - *end point tangent property*).

Podobné vztahy platí i pro vyšší derivace (m -tá derivace v krajním bodě závisí na poloze m sousedních bodů).

Tyto vztahy jsou důsledkem formule pro první derivaci v obecném bodě

$$\frac{d\mathbf{C}^n}{dt} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \mathbf{V}_i^1, \quad \mathbf{V}_i^1 = n(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)$$

a podobně (opakovaním) pro vyšší derivace (viz [11], str. 162).

3. Bezierova křivka se ve svém průběhu mimo okraje řídí zhruba svým kontrolním polygonem. Jsou-li všechny vrcholy na přímce, je křivkou úsečka.
Variation diminishing property: každá přímka protíná tuto křivku nejvýš tolikrát, kolikrát protíná její kontrolní polygon .
4. Vliv změny polohy jednoho kontrolního bodu klesá s rostoucí vzdáleností od něj.
5. Přidání dalších bodů uvnitř kontrolního polygonu (zvýšení stupně polynomu) umožní lépe vystihnout požadovaný tvar; snížení počtu kontrolních bodů (stupně polynomu) při jednodušších tvarech sníží pracnost výpočtů (*degree elevation, reduction*). Při zvyšování stupně se kontrolní polygon a jeho Bezierova křivka k sobě přibližují.

Základní konstrukce Bezierových křivek - přímý a rekurentní algoritmus

Kvadratická rovinná Bezierova křivka s kontrolními body (polygonem)

$\mathbf{V}_i = [x_i, y_i]$, $i = 0, 1, 2$ (parametrická křivka - vektorový a maticový zápis vztahu mezi polynomickou a Bezierovou reprezentací křivky)

$$\mathbf{C}^2(t) = (1-t)^2 \mathbf{V}_0 + 2(1-t)t \mathbf{V}_1 + t^2 \mathbf{V}_2 = [1, t, t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

Pro vykreslení - na dostatečně husté síti pro $t \in [0, 1]$ spočítat souřadnice x, y, z , maticový vykreslit jako parametrickou křivku - parabolu. *maticový zápis*

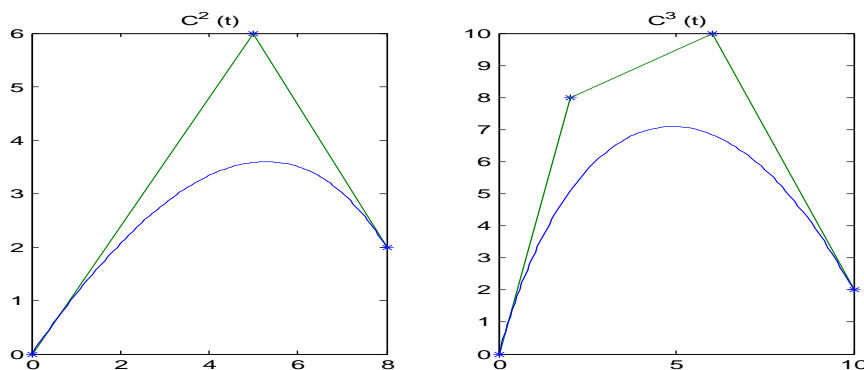
Kubická prostorová Bezierova křivka s kontrolním polygonem $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$:
vektorový zápis $\mathbf{C}^3(t) = (1-t)^3\mathbf{V}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{V}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{V}_2 + t^3\mathbf{V}_3$,

$$\mathbf{C}^3(t) = [x(t), y(t), z(t)] = [1, t, t^2, t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

(maticový zápis: pozor na odlišný zápis formulí v literatuře při opačném pořadí mocnin $\dots [t^3, t^2, t, 1]$)

Ukažte příklady takových křivek výpočtem podle předešlé definice nebo následujícím algoritmem.

Pomocí odpovídajícího tvaru kontrolního polygonu máme možnost vystižení složitějších tvarů - smyčky, špičky, inflexe.



obr. 14 Bezierovy křivky 2. a 3. stupně

Generování bodu Bezierovy křivky rekurzí (algoritmus - de Casteljau):

Definujeme $\mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i, t \in [0, 1], i = 0(1)n$,

postupně pro $r = 0(1)n - 1, i = 0(1)n - r - 1$ počítáme rekurzivně

$$\mathbf{V}_i^{r+1}(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^r(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^r(t).$$

rekurzivní algoritmus

Pak pro bod křivky platí $\mathbf{C}^n(t) = \mathbf{V}_0^n(t)$.

Vedlejším výsledkem je rozdělení křivky na dvě části s kontrolními polygony

$$\mathbf{V}_0^0\mathbf{V}_0^1 \dots \mathbf{V}_0^n \quad \text{a} \quad \mathbf{V}_0^n\mathbf{V}_1^{n-1} \dots \mathbf{V}_n^0$$

(subdivision - umožňuje upravovat dále jen jednu z částí křivky).

Použití: kreslení Bezierových křivek pomocí uvedených algoritmů (rendering)

na dostatečně husté síti hodnot $t \in \langle 0, 1 \rangle$;

možnost experimentovat - sledovat vliv rozložení kontrolních bodů na tvar křivky, vliv změny polohy jednoho bodu.

Interpolace kubickou Bezierovou křivkou:

$$\mathbf{C}^3(t) = (1-t)^3\mathbf{V}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{V}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{V}_2 + t^3\mathbf{V}_3$$

Úloha: při zadaných 4 bodech interpolace $\mathbf{P}_j = [x(j), y(j), z(j)]$, $j = 0, 1, 2, 3$

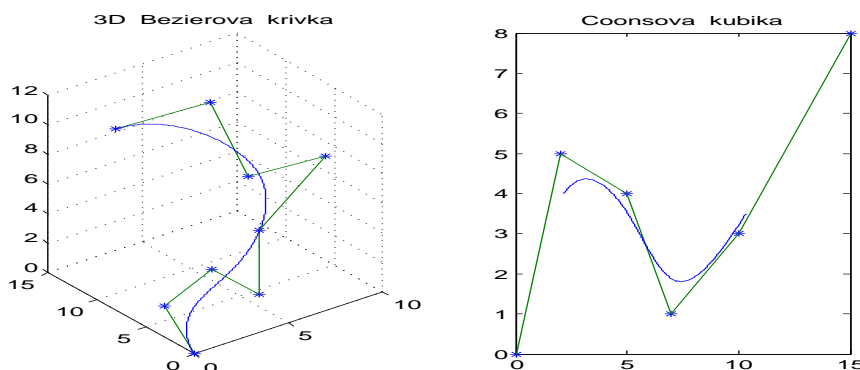
hledáme neznámé body kontrolního polygonu, odpovídající hodnotám parametru

$$[t_0, t_1, t_2, t_3] = [0, 1, 2, 3]/3 \text{ (odpovídají bodům extrémů } B_j^3(t) \text{)}$$

tak, aby byly splněny podmínky interpolace v jednotlivých složkách

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{V}_0 &= \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{8}{27}\mathbf{V}_0 + \frac{4}{9}\mathbf{V}_1 + \frac{2}{9}\mathbf{V}_2 + \frac{1}{27}\mathbf{V}_3 &= \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{C}\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{1}{27}\mathbf{V}_0 + \frac{2}{9}\mathbf{V}_1 + \frac{4}{9}\mathbf{V}_2 + \frac{8}{27}\mathbf{V}_3 &= \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{V}_3 &= \mathbf{P}_3 \end{aligned}$$

Pro každou složku křivky tak je třeba řešit soustavu 4 rovnic se stejnou maticí a pravou stranou odpovídající hodnotám bodů interpolace v této složce (možno řešit maticově).



obr. 15 a) prostorová Bezierova křivka b) složená Coonsova kubika

Složené Bezierovy křivky

S rostoucím počtem kontrolních bodů roste i stupeň polynomů v jednotlivých složkách Bezierovy křivky. To vede jak k větší výpočetní náročnosti, tak i k případným oscilacím křivky. Proto se často používá složených Bezierových křivek, které dostaneme složením celé křivky z jejích jednodušších segmentů, vzniklých z odpovídajícího rozdělení kontrolního polygonu. Složená Bezierova křivka je tedy speciálním typem splajnu (tak ji uvádí např. Mathematica ve funkci *SplineFit*).

C^0 -křivka

Složená kvadratická Bezierova křivka s lichým počtem kontrolních bodů

\mathbf{V}_i , $i = 0(1)2m$ vznikne rozdělením kontrolního polygonu na segmenty $\{\mathbf{V}_{2k}, \mathbf{V}_{2k+1}, \mathbf{V}_{2k+2}\}$. Když v každém z nich sestrojíme odpovídající kvadratický Bezierův polynom, pak spojením těchto segmentů dostaneme (viz vlastnosti BP) po částech kvadratickou, spojitou parametrickou křivku. *Spojitosti derivací* v bodech styku segmentů dosáhneme, když bod \mathbf{V}_{2k} bude středem úsečky $\mathbf{V}_{2k-1}\mathbf{V}_{2k+1}$. Pro geometrickou spojitost GC^1 (stejná směrnice tečny) stačí, aby bod \mathbf{V}_{2k} ležel uvnitř této úsečky (jeho poloha ovšem lokálně ovlivní tvar křivky).

C^1 -křivka

Taková složená kvadratická Bezierova křivka je tedy určena krajními body a vnitřními body s lichými indexy - ostatní se určí z podmínek spojitosti derivace ([9], [4])

Další vlastnosti takové křivky:

- Jsou-li určující kontrolní body vrcholy konvexního polygonu, je i křivka konvexní.
- Leží-li několik sousedních kontrolních bodů na přímce, jsou i odpovídající segmenty přímkové.

Složená kubická Bezierova křivka s kontrolními body $\mathbf{V}_i, i = 0(1)3m$

Na každém segmentu $\{\mathbf{V}_{3i} \cdots \mathbf{V}_{3i+3}\}$ je definována jednoduchá Bezierova křivka. Jejich spojením dostaneme jen spojitou křivku v bodech styku. Spojitosti prvních derivací můžeme dosáhnout opět kolinearitou krajních úseček sousedních kontrolních polygonů. Spojitosti druhých derivací můžeme dosáhnout další podmínkou na konfiguraci kontrolních bodů (viz [9], str. 184) - celkově tak můžeme volit jen $m + 3$ vrcholy kontrolního polygonu, ostatní je třeba spočítat z podmínek spojitosti prvních a druhých derivací.

Bezierova křivka na intervalu $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ - úprava reparametrizací ([11], str. 168)

Uzavřené křivky - jejich spojitosti a hladkosti lze dosáhnout vhodnou volbou kontrolních bodů (případně jejich násobností).

Složené křivky je možno sestavit i ze segmentů různých stupňů.

4.7 Další křivky určené kontrolním polygonem

Postupně byly na základě jiných potřebných vlastností zkonstruovány i další druhy křivek určených svým kontrolním polygonem (zpravidla nesou jméno svého autora)- uvedeme jen některé z nich.

Racionální Bezierovy křivky - viz [13], [11].

Idea - každá kuželosečka se dá parametrizovat kvadratickou racionální funkcí (parabola - polynom, elipsa, hyperbola - racionální funkce). Proto se za bázi použije funkcí

$$R_i^n(t) = w_i B_i^n(t) / \sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t), \quad \mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i R_i^n(t), \quad \mathbf{V}_i \in R^2, R^3$$

(máme možnost ovlivnit tvar křivky volbou váhových koeficientů $w_i \geq 0$.)

Vlastnosti racionálních Bezierových křivek:

Convex hull property, endpoint interpolation, tangent property.

Invariance under affine, projective transformations (using homogeneous coordinates).

Variation diminishing property

De Casteljau algorithm, derivatives ([11], str. 175, [9], str. 185)

Jednoduchá Coonsova kubická křivka $\mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^4 C_i(t) \mathbf{V}_i$

s kontrolním polygonem $\mathbf{V}_1 \cdots \mathbf{V}_4$, bázovými funkcemi $C_i(t) \geq 0, \sum_i C_i(t) = 1, Coons$

$$\mathbf{C}(t) = \frac{1}{6} [(1-t)^3 \mathbf{V}_1 + (3t^3 - 6t^2 + 4) \mathbf{V}_2 + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) \mathbf{V}_3 + t^3 \mathbf{V}_4], \quad t \in [0, 1]$$

má následující vlastnosti (odlišné od Bezierovy křivky - např. začíná v tzv. antitěžišti)

$$\mathbf{C}(0) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3), \quad \mathbf{C}(1) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}_2 + 4\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4).$$

$$\sum C_i(t) \equiv 1, \quad \mathbf{C}'(0) = (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1)/2, \quad \mathbf{C}'(1) = (\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_2)/2$$

Algoritmus výpočtu bodů křivky na (dostatečně husté) síti hodnot parametru t :

$$\mathbf{C}(t) = [x(t), y(t)] = \frac{1}{6} [1, t, t^2, t^3] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

- soustava předpisů pro každou složku parametrické křivky (se stejnou maticí).

Geometrická interpretace - umožňuje snadnou konstrukci složené křivky.

Složená Coonsova kubika s kontrolním polygonem $\mathbf{V}_1 \cdots \mathbf{V}_n$ (obr. 15) vznikne posouváním kontrolního polygonu vždy o jeden vrchol [1-4,2-5, ..., (n-3)-n] a použitím algoritmu pro jednoduchou křivku (koncový bod segmentu je počátečním bodem následujícího segmentu, stejná směrnice tečny) - výsledkem je křivka se spojitou druhou derivací (splajn !), která leží v konvexním obalu kontrolních vrcholů. Možnost použití násobných uzlů, konstrukce uzavřené křivky ([13], str. 195). *Fergussonova kubika* realizuje hermitovskou interpolaci ve 2D :

Fergusson

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 F_1(t) + \mathbf{P}_1 F_2(t) + \mathbf{P}'_0 F_3(t) + \mathbf{P}'_1 F_4(t)$$

$$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad F_2(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad F_4(t) = t^3 - t^2$$

Vlastnosti této křivky:

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}'(0) = \mathbf{P}'_0, \quad \mathbf{P}'(1) = \mathbf{P}'_1$$

Další druhy používaných funkcí : uniformní kubický B-splajn, NURBS

B-splajnové křivky (Integral B-spline Curves - [4], [2], [13])

Bernšteinovy polynomy $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ jsou speciálním případem B-splajnu se dvěma $(n+1)$ -násobnými uzly $t_0 = 0, t_1 = 1$.

Podobně tedy pro B-splajny $N_i^p(t) = B_i^{p+1}(t)$, kontrolní polygon $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n$ a uspořádanou síť uzlů $t_0 \cdots t_p = 0, t_{p+1}, \dots, t_{p+n-1}, t_{p+n} = \dots = t_{n+2p} = 1$ je *B-splajnová křivka* $\mathbf{S}^p(t)$ stupně p definována předpisem

B-splajnová křivka

$$\mathbf{S}^p(t) = \sum_{i=0}^n N_i^p(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in [0, 1].$$

Tato křivka má následující vlastnosti:

vlastnosti

1. Vzhledem k násobnosti uzlů platí

$$\mathbf{S}^p(0) = \mathbf{V}_0; \quad \frac{d}{dt} \mathbf{S}^p(0) = p(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)/t_{p+1},$$

$$\mathbf{S}^p(1) = \mathbf{V}_n; \quad \frac{d}{dt} \mathbf{S}^p(1) = p(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})/(1 - t_{n-p-1})$$

2. Afinní transformace křivky $\mathbf{S}^p(t)$ (translaci, změnu měřítka, rotaci, projektivní transformaci) můžeme provést tak, že této transformaci podrobíme jen kontrolní vrcholy a k nim pak sestrojíme novou křivku podle stejné formule (algoritmu - *afinní invariance*).
3. Oblouk křivky $\mathbf{S}^p(t)$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$ leží v konvexním obalu vrcholů $\mathbf{V}_{j-p}, \dots, \mathbf{V}_j$.
4. Kontrolní polygon představuje po částech lineární aproximaci křivky $\mathbf{S}^p(t)$; tuto aproximaci můžeme vylepšit přidáním nových vrcholů (*knot insertion*), nebo rozdělením křivky na části (*subdivision*) podobně jako u Bezierových křivek.
5. Uvedená metoda aproximace polygonu křivkou má lokální charakter - změna polohy jednoho kontrolního vrcholu ovlivní jen $p+1$ segmentů křivky.
6. Výsledná křivka je v jednotlivých segmentech polynomem stupně p , v uzlech se mění reprezentace splajnu (lokální, B-splajnová) - vystupuje z ní jeden básový splajn a vstupuje jiný (uzly působí jako přepínač). V uzlech násobnosti k je takový splajn $(p-k)$ -krát diferencovatelný.

7. Tvar křivky $S^p(t)$ se řídí zhruba kontrolním polygonem, vyhlazují se jeho oscilace a nepravidelnosti. Žádná rovina (3D) nebo přímka (2D) nemá s touto křivkou více průsečíků než s jejím kontrolním polygonem (*variation diminishing property*).

8. B-splajnová křivka bez vnitřních uzlů je Bezierova křivka.

Ve Spline Toolboxu v Matlabu je pro práci s B-splajnovými křivkami funkce *spcrv*. Maple má funkci *BSplineCurve*, která po zadání kontrolních vrcholů a požadovaného stupně splajnu vypíše předpisy pro jednotlivé segmenty křivky a následně umožní vykreslit kontrolní polygon a odpovídající B-splajnovou křivku.

Podobně jako u Bezierových křivek se dá s pomocí B-splajnových křivek řešit úloha o interpolaci: dosazením podmínek interpolace do rovnice křivky dostaneme pro neznámé souřadnice kontrolních vrcholů soustavu lineárních rovnic pro jednotlivé souřadnice vrcholů (stejně matice soustavy).

V literatuře a některých grafických systémech najdeme také další typy speciální splajnů. Beta -splajny, ... (další volné parametry, GC^2 -spojitost).

NURBS ([11], str. 212), knot insertion, aplikace

Kontrolní otázky

1. Jaké jsou definice a vlastnosti Bezierových křivek ?
2. Jak spolu souvisí počet kontrolních bodů a stupeň Bezierovy křivky ?
3. Jak dostaneme Bezierovu křivku se smyčkou, uzavřenou křivku ?
4. Jak sestrojujeme složené Bezierovy křivky (C^0, C^1) ?
5. Můžeme použít Bezierovu křivku k interpolaci dat ?
6. Jak je definována Coonsova křivka (případně jiné takové křivky - Fergusson) ?
7. Čím se liší pojmy B-splajn, B-splajnová křivka ?
8. Popište konstrukci B-splajnové křivky, její vlastnosti.
9. Můžeme sestroit interpolant pomocí B-splajnové křivky ?

Úkoly k textu

1. Nakreslete několik příkladů Bernštejnových polynomů, sledujte jejich vlastnosti.
2. Pro různé tvary kontrolních polygonů vykreslete Bezierovy křivky stupňů 2,3,4,5.
3. Pro rozsáhlejší kontrolní polygony nakreslete odpovídající jednoduché a složené Bezierovy křivky hladkosti C^0, C^1 - porovnejte jejich průběhy.
4. Pro rozsáhlejší kontrolní polygon nakreslete složenou Coonsovu křivku.
5. Pro stejný kontrolní polygon porovnejte průběh kubiky Coonsovy a Bezierovy .
6. Pro různé tvary kontrolních polygonů porovnejte vlastnosti Bezierových a B-splajnových křivek určených stejným kontrolním polygonem.
7. Ukažte konkrétní příklady interpolace kvadratickou Bezierovou křivkou, obecnou Bezierovou křivkou.

5 Plochy

Studijní cíle: Zopakovat si stručně některé základní způsoby analytického zadání ploch, modelování technických ploch; naučit se zobrazovat takové plochy na obrazovce počítače. Stručně uvést základní pojmy z diferenciální geometrie ploch a jejich souvislosti (s odkazem na podrobnější literaturu).

Klíčová slova: rovnice ploch; tečná rovina, normála, normálový řez; základní formy plochy; křivost, hladkost; přímková plocha; souřadnicové přímky a křivky .

Potřebný čas: 180 minut.

Průvodce studiem

V této kapitole si stručně připomeneme různé tvary analytických funkčních předpisů pro zadání ploch (explicitní, implicitní, parametrické). Pro zobrazení takových ploch máme dnes v softwarových prostředcích řadu připravených funkcí, které si vyzkoušíte, případně zkusíte jednodušší z nich naprogramovat. Dále stručně uvedeme základní poznatky diferenciální geometrie o různých vlastnostech ploch. Řada ploch používaných v technice popisuje pohyb objektů - uvedeme příklady přímkových, translačních, rotačních a šroubových ploch a některé metody pro jejich vykreslení. Další skupina ploch vzniká aproximací plochy ze známých diskretních (například naměřených) dat pomocí interpolace nebo aproximace polynomy a jinými vhodnými druhy funkcí - to bude tématem šesté kapitoly.

5.1 Základní typy zadání a modelování ploch

Z matematické analýzy a analytické geometrie jsou známé tři základní typy funkčních předpisů pro zadání plochy.

Explicitní předpis $z = f(x, y), [x, y] \in D \subset R^2$.

Příklady: $\dots z = x^3 - y^3; z = 3x^2 - 2y^2, z = [x, y]A[x, y]^T$ s maticí A

$$z = f(x, y)$$

Rovina: $z = ax + by + c$

Paraboloid eliptický $z = x^2/(2p) + y^2/(2q), pq > 0$

Paraboloid hyperbolický $z = x^2/(2p) - y^2/(2q), pq > 0, z = a + bx + cy + dxy$

Implicitní předpis $F(x, y, z) = 0$

Kvadriky a jejich klasifikace: elipsoid, hyperboloid (jednodílný, dvoudílný),

$$F(x, y, z) = 0$$

paraboloid (eliptický, hyperbolický), eliptický kužel, eliptický a parabolický válec.

Kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

Trojosý elipsoid $\dots x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (kanonické tvary)

Hyperboloid jednodílný $\dots x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ (reálné poloosy x, y)

(dvě soustavy přímek - přímková plocha)

Hyperboloid dvoudílný $\dots x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$ (imaginární poloosy x, y)

Kvadratické plochy obecně (kvadriky) $F(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq 2} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$

Invarianty kvadratické plochy ([12], 6.3)

Algebraická plocha \dots implicitní předpis, $F(x, y, z)$ je polynom ;

její singulární body splňují rovnice $F_x = F_y = F_z = 0$.

Parametrické zadání ploch: $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, $[u, v] \in \Omega \subset R^2$,
 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ po částech spojitě funkce, $\Omega \rightarrow R^3$ $\mathbf{r}(u, v)$

Předpoklad: hodnota matice $[x_u, y_u, z_u; x_v, y_v, z_v]$ je rovna dvěma
 (až na konečný počet bodů - singulární body).

Parametrický předpis (se speciálními případy parametrů v různých souřadnicích) představuje obecnější způsob zadání plochy, který zahrnuje předchozí způsoby a umožňuje popsat formálně ještě složitější tvary ploch.

Příklady :

trojosý elipsoid $\dots [a \cos(\theta) \sin(\varphi), b \sin(\theta) \sin(\varphi), c \cos(\varphi)]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

eliptický kužel: $\dots [at \cos(\theta), bt \sin(\theta), ct]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in (-\infty, +\infty)$

parabolický válec: $\dots [au^2, 2au, v]$, $u, v \in (-\infty, \infty)$

sedlová plocha $z = xy : \dots \mathbf{r}[u, v] = [u - v, u + v, u^2 - v^2]$

parametrický tvar zadání základních typů kvadrik: [11], str. 230, [12], str. 204.

Parametrické křivky plochy: $r(u_0, v) \dots u$ -křivky, $r(u, v_0) \dots v$ -křivky
 tvoří křivočaré souřadnice na ploše (" drátěný model plochy " , [9], 12.1).

u, v -křivky

Tečné vektory $\mathbf{r}_u = [x_u, y_u, z_u]$, $\mathbf{r}_v = [x_v, y_v, z_v]$ (jiné symboly: $\mathbf{t}_u, \mathbf{t}_v$)

Tečná rovina $T(p, q) = \mathbf{r} + p\mathbf{r}_u + q\mathbf{r}_v$

Zkrut $\mathbf{r}_{uv} = [x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}]$

Jednotková normála $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) / |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$

Křivka na ploše může být určena předpisem $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in I$ ($[u, v] \in \Omega$)

- vektorově $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ - nebo implicitně $f(u, v) = 0$.

Možnosti přechodu mezi explicitním, implicitním a parametrickým zadáním plochy .

Přímkové plochy jsou plochy s vlastností, že každým jejich bodem prochází přímka, která celá leží v takové ploše . Některé příklady :

Válcové plochy jsou generovány řídicí křivkou $f(x, y) = 0$ a soustavou přímk *jiné plochy*
 rovnoběžných s osou z (tubeplot). Jako speciální případy tak dostaneme dvojice:

elipsa - eliptický válec;

hyperbola - hyperbolický válec;

parabola - parabolický válec.

Kuželová plocha je generována bodem (vrcholem) a řídicí křivkou.

Přímkovou plochu dostaneme také spojováním bodů dvou prostorových křivek -
 při různých orientacích těchto křivek dostaneme různé plochy (sestrojte příklady) .

Rotací plochy vzniknou rotací křivky kolem pevné osy; příklady takových ploch:

- křivka $y = f(z)$, osa $z \dots x^2 + y^2 = [f(z)]^2$;

- $f(y, z) = 0$, osa $z \dots f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

(např. anuloid $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$.)

Plochy translační dostaneme tažením jedné křivky po druhé (lofting, translational swept surfaces)

Plochy šroubové vznikají rotací křivky procházející osou rotace (surfaces of revolution). Příklad: plocha vzniklá rotací pohybuující se úsečky kolem osy z .

Aproximační plochy - vznikají hlavně při zpracování diskretních dat (interpolace, MNČ(LSQ), kontrolní síť - viz kap. 6), nebo z jiných požadavků a hledisek.

Plocha určená okrajem (jejími vrcholy, případně tečnými vektory v nich nebo bázovými funkcemi, které určují okrajové křivky plátu - viz kap.6).

Příklad: $\mathbf{r} = \mathbf{f}^T(u)\mathbf{M}\mathbf{f}(v)$ (Coons, Gregory; M - tvarová matice).

Plochy určené obdélníkovou nebo trojúhelníkovou kontrolní sítí budou popsány v poslední kapitole.

Ke kreslení analyticky zadaných ploch můžeme požit řadu příkazů v počítačových systémech:

Matlab - ezsurf, ezcontour, ezmesh, meshgrid, surf, surface

Maple - surfdata, plots[surfdata], plot3D

Mathematica - Plot3D, ListSurfacePlot3D, RegionPlot3D, ContourPlot3D, PolyhedronData.

*kreslení
počítačem*

5.2 Z diferenciální geometrie ploch

V této části stručně uvedeme základní pojmy a vztahy z diferenciální geometrie ploch.

Tečná rovina v regulárním bodě plochy - tvoří ji tečny všech křivek na ploše, procházející daným bodem (vektorem plochy) $[X, Y, Z]$; v takovém bodě existuje jediná tečná rovina.

Při explicitním předpisu $z = f(x, y)$ má rovnici $(X - x)f_x + (Y - y)f_y - (Z - z) = 0$, v implicitním předpisu $F(x, y, z) = 0 \cdots (X - x)F_x + (Y - y)F_y + (Z - z)F_z = 0$, v parametrickém zadání $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$

$$\det \begin{bmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 0$$

Příklad: pro kulovou plochu ve sférických souřadnicích (parametrický předpis)

$$x = r \sin(u) \cos(v), \quad y = r \sin(u) \sin(v), \quad z = r \cos(u), \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

jsou souřadnicovými křivkami rovnoběžky a poledníky ;

rovnice tečné roviny v bodě $[u, v]$ je

$$X \sin(u) \cos(v) + Y \sin(u) \sin(v) + Z \cos(u) - r = 0$$

Normála \mathbf{n} je kolmice k tečné rovině (smíšený součin $[\mathbf{n}_u \mathbf{r}_v] = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) > 0$).

Rovnice normály plochy $F(x, y, z) = 0$: $(X - x)/F_x = (Y - y)/F_y = (Z - z)/F_z$

První základní (kvadratická, metrická) forma plochy

Na ploše $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ platí pro lineární element délky křivky $u = u(t), v = v(t)$

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

s koeficienty $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$,

(vektorový zápis : $E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$, $G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$).

$\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/D$, $D = (EG - F^2)^{1/2}$ - diskriminant plochy .

*základní
formy*

Pro parametrické křivky na ploše

pro $u = konst$ ($v = konst$) je $ds^2 = Gdv^2$, ($ds^2 = Edu^2$)

pro úhel mezi nimi platí $\cos(\varphi) = F/\sqrt{EG}$; $F = 0 \Rightarrow$ kolmost křivek

Pro element plochy v tečné rovině platí $dP = Ddudv$, $P = \int \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$

Při explicitním předpisu $z = z(x, y) \cdots D = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$, $dP = Ddxdy$.

Druhá základní (kvadratická) forma plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$:
 podél křivky s přirozeným parametrem $s \dots u = u(s), v = v(s)$ platí

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

$$L = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_u, \quad 2M = -(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u), \quad N = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v;$$

při explicitním zadání $y = y(x, z)$ je speciálně

$$D = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad L = z_{xx}^2 / (1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}, \quad M = z_{xy}^2 / D, \quad N = z_{yy}^2 / D$$

(základní veličiny druhého řádu plochy).

Klasifikace bodů plochy:

$LN - M^2 > 0 \dots$ eliptický bod plochy (expl. $\dots f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$)

$LN - M^2 = 0 \dots$ parabolický bod plochy (expl. $\dots f_{xx}f_{yy}/f_{xy}^2 = 0$)

$LN - M^2 < 0 \dots$ hyperbolický bod plochy (expl. $\dots f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$)

\mathbf{r}_{uv} - twist (zkrut) plochy v bodě

Rozvinutelné plochy (přímkové plochy, jejich každá tečná rovina se jich dotýká podél celé přímkou) mají jen parabolické body .

*klasifikace
bodů
plochy*

Normálový řez plochy je řez rovinou obsahující normálu plochy - rovinná křivka.

Věta: Mezi normálovými řezy plochy v bodě P existují alespoň dva v rovinách k sobě kolmých, že normální křivost jednoho je minimální, druhého maximální. \square

(Označení těchto křivostí - k_1, k_2 ; používané termíny - hlavní normálové řezy, hlavní poloměry křivosti $R_1 = 1/k_1, R_2 = 1/k_2$, hlavní směry).

Pro normální křivost $k_n = 1/R$ v daném směru v bodě P plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ platí

*řezy,
křivost*

$$k_n = \frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

Dupinova indikatrix plochy v bodě - elipsa, dvojice hyperbol, dvojice rovnoběžných přímkou v tečné rovině - ukazují vlastnost tohoto bodu (eliptický, hyperbolický, parabolický - R 318).

Hlavní poloměry křivosti R_1, R_2 a Gaussova (totální) míra křivosti K plochy splňují vztah

$$K = k_1k_2 = \pm 1/(R_1R_2) = (LN - M^2)/(EG - F^2) = (LN - M^2)/D^2;$$

$H = (k_1 + k_2)/2$ - je tzv. střední křivost.

Vztahy mezi vektory $\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v$ a $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ - jsou jistou analogií Frenetových vztahů pro křivky ([12], str. 321):

Weingarten - vztahy mezi $\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \dots \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$

Gauss (theorem egregium) : $K \dots E, F, G; \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vv} \dots \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$

Codazzi - Mainardi \dots vztahy mezi $E, F, G \dots L, M, N$.

*další
vztahy*

Geodetická křivost křivky na ploše (k_g) je křivost jejího pravouhlého průmětu do tečné roviny plochy v daném bodě.

Geodetická křivka plochy má vlastnost, že její oskulační rovina prochází příslušnou normálou plochy. Její geodetická křivost je nulová v každém bodě plochy, má nejkratší oblouk ze všech křivek spojujících dva dané body plochy.

Spádové křivky jsou ortogonálními trajektoriemi k vrstevnicím plochy.

Pro plochu $y = f(x, z)$ splňují diferenciální rovnici $dy/dx = f_y/f_x$.

Hladkost spojení dvou částí plochy ([9], str. 192)

Při generování celkové plochy po částech (plátech) jsou různé požadavky na podmínky *hladkost* spojení plátů na společné hranici - celkovou hladkost (spojitost - continuity).

C^k - continuity : $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$; $x, y, z, \in C^k$, $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ lin. nezávislé

$GC^1 \dots$ tangent plane continuity (společné tečné roviny podél společné hranice)

$GC^2 \dots GC^1$ + společná normálová křivost k_n (curvature continuity)

Kontrolní otázky

1. Jaké jsou rozdíly mezi funkčními předpisy pro základní způsoby zadání ploch ?
2. Co jsou to vrstevnice plochy a jak je můžeme vykreslit ?
3. Vysvětlíte obsah termínů souřadnicové přímky, souřadnicové křivky, $u(v)$ -křivky.
4. Uveďte příklady rotačních, translačních, šroubových, přímkových ploch.
5. Jak jsou definovány normála, tečná rovina, normálový řez plochy v jejím bodě ?
6. Popište termíny související s pojmem křivosti plochy.
7. Jak se definují pojmy související s hladkostí plochy ?

Úkoly k textu

1. Uveďte konkrétní příklady funkčních předpisů pro rovinu, válcovou plochu, elipsoid.
2. Jakým předpisem je určena algebraická plocha ?
3. Může mít stejná plocha různé předpisy ?
4. Jak můžeme popsat kuželovou plochu ?
5. Ukažte na konkrétním příkladu souřadnicové a parametrické křivky plochy !
6. Napište rovnice tečné roviny a normály plochy $z = xy$ v daném bodě !
7. Co nám popisuje první kvadratická forma plochy ?
8. Jak jsou klasifikovány body plochy pomocí koeficientů její druhé kvadratické formy ?
9. Která plocha má stejné oba hlavní poloměry křivosti ?
10. Jakou hladkost má povrch mnohostěnu, jehlanu, kuželová plocha ?

6 Metody modelování ploch

Studijní cíle: Modelování některých přímkových ploch. Interpolace polynomy na obdélníkových a trojúhelníkových sítích, interpolace se zachováním okraje.

Bezierovy plochy určené kontrolní sítí na obdélníkové a trojúhelníkové rovnoměrné sítí, B-splajnové plochy.

Klíčová slova: interpolace na obdélníkových a trojúhelníkových sítích, plochy určené kontrolní sítí

Potřebný čas: 240 minut.

Průvodce studiem

Další skupina ploch vzniká aproximací plochy z jejích diskretních (například naměřených) dat pomocí interpolace polynomy nebo jinými vhodnými druhy funkcí. Ve dvou proměnných je řešitelnost úlohy interpolace složitějším problémem - uvedeme proto jen známý postup pro interpolaci dat na obdélníkové a na trojúhelníkové sítí. V závěru se budeme zabývat konstrukcí aproximačních ploch určených kontrolní obdélníkovou a trojúhelníkovou sítí, která umožňuje interaktivní změnou kontrolní sítě upravovat výsledný tvar aproximační plochy (Bezierovy plochy, B-splajnové plochy).

6.1 Přímkové plochy

Přímková plocha je plochou s vlastností, že každým jejím bodem prochází alespoň jedna přímka, která celá leží na této ploše. Příklad - plocha tvořená přímkou, která se spojitě pohybuje v prostoru - po řídicí křivce, jako spojnice dvou křivek a podobně.

Parametrické rovnice přímkové plochy s jednou řídicí křivkou $\bar{\mathbf{r}}(u)$, přímkou $\mathbf{p}(u)$:

$$\mathbf{r}(u, v) = \bar{\mathbf{r}}(u) + v\mathbf{p}(u), \quad \mathbf{p}(u) = [a(u), b(u), c(u)]$$

$$x(u, v) = \bar{x}(u) + va(u), \quad y(u, v) = \bar{y}(u) + vb(u), \quad z(u, v) = \bar{z}(u) + vc(u)$$

(funkce $a, b, c \in C^1$, $\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 > 0$ určují směr tvořících přímek plochy).

Příklady: šroubová plocha (osa z , šroubovice), válcové plochy.

*přímkové
plochy*

Přímková plocha vymezená spojnicemi čtyř rohových bodů

$\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{01}$; $u, v \in \langle 0, 1 \rangle$ ve 3D - přímková kvadrika (viz obr. 16 a)):

$$\mathbf{P}(u, v) = [1-u, u] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} = [(1-u)\mathbf{P}_{00} + u\mathbf{P}_{10}](1-v) + [(1-u)\mathbf{P}_{01} + u\mathbf{P}_{11}]v$$

Okrajové křivky pro $u, v = 0, 1$ jsou spojnice bodů $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{01}$.

Příklad (ukazuje závislost na pořadí bodů): přímková plocha s vrcholy

$$\mathbf{P}_{00} = [0, 0, 0], \mathbf{P}_{01} = [0, 0, 1], \mathbf{P}_{10} = [1, 0, 0], \mathbf{P}_{11} = [0, 1, 0];$$

$x = u(1-v), y = uv, z = (1-u)v$ je hyperbolickým paraboloidem s implicitní rovnicí $xz + xy + yz + y^2 - y = 0$,

při změně pořadí $\mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{11}$, $x = u(1-v), y = (1-u)v, z = uv$

dostaneme plochu $xy + xz + yz + y^2 - z = 0$ (ověřte!).

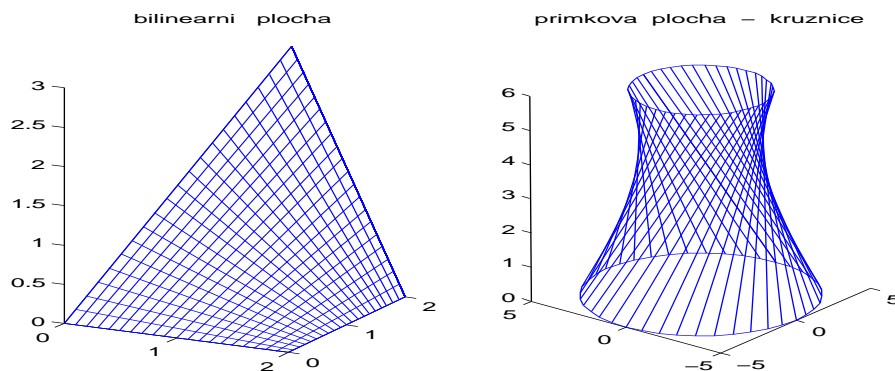
Bilineární Coonsova plocha s okrajovými křivkami $\mathbf{P}(u, 0), \mathbf{P}(u, 1), \mathbf{P}(0, v), \mathbf{P}(1, v)$

$$\mathbf{C}(u, v) = [1-u, -1, u] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}(0, v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}(u, 0) & \mathbf{P}(u, v) & \mathbf{P}(u, 1) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}(1, v) & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{bmatrix}, \quad u, v \in [0, 1]$$

zachovává tyto okrajové křivky;
jsou-li dvě protější strany úsečky, dostaneme přímkovou plochu.

Přímková plocha vzniklá spojováním bodů dvou parametrických prostorových křivek (obr. 16 b)) se stejnými hodnotami parametru (ten probíhá stejný interval) - její tvar závisí také na orientaci těchto křivek (souhlasná, nesouhlasná orientace dá různé plochy).

Offset, ruled, translationally swept surfaces, lofted surfaces ([11], str. 232,241-245) - jsou další speciální případy ploch vznikajících pohybem geometrických objektů.



obr.16 a) přímková plocha generovaná 4 body b) generovaná dvěma kružnicemi

6.2 Interpolace funkce dvou proměnných na obdélníkové síti

Problém interpolace polynomy ve dvou proměnných na obecné síti bodů v rovině je poměrně složitý a bylo mu věnováno mnoho prací - obecně však nemusí mít řešení. V tomto textu uvedeme jen postup pro nalezení jednoznačného interpolantu na dvou základních typech sítí - obdélníkové a rovnoměrné trojúhelníkové.

Problém interpolace ve 2D: na obdélníkové síti $\{[x_i, y_j], i = 0(1)n, j = 0(1)m\}$ s předepsanými hodnotami $\{g_{ij}\}$ v jejích bodech najít interpolant ve vhodné třídě funkcí dvou proměnných (nejčastěji - polynomy, splajny). Ten pak používáme k výpočtu hodnot v bodech uvnitř sítě (interpolaci) nebo i vně sítě (extrapolaci).

Polynomická interpolace je úloha najít takové koeficienty polynomu

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{kl} x^k y^l, \text{ aby v bodech sítě platilo}$$

$$P_{nm}(x_i, y_j) = g_{ij}, i = 0(1)n, j = 0(1)m \quad (\text{podmínky interpolace}).$$

Explicitní řešení úlohy: s použitím 1D lagrangeovských koeficientů v každém z uzlů $[x_i, y_j]$ a techniky tzv. tenzorového součinu dostaneme pro lagrangeovské koeficienty a celkový tvar interpolantu na obdélníkové síti explicitní předpisy

$$l_{ij}(x, y) = l_i(x)l_j(y); \quad L_{nm}(x, y) = \sum_{i,j} l_{ij}(x, y)g_{ij}$$

Lagrange

Příklad: bikubická interpolace ve středu čtvercové sítě $x_i, y_j, i, j = 0(1)3$ s jednodimenzionálními koeficienty (stejnými v obou proměnných)

$$[l_i(x_0 + 3h/2)]_{i=0}^3 = \mathbf{1} = [-1, 9, 9, -1]/16 = [l_j(y_0 + 3h/2)]_{j=0}^3$$

nám podle uvedeného pravidla umožní vypočítat matici lagrangeových koeficientů

*matice
koeficientů*

$L = [L_{ij}] = I \cdot I^T = (1/16^2)[1, -9, -9, 1; -9, 81, 81, -9; -9, 81, 81, -9; 1, -9, -9, 1]$ pro jednotlivé uzly této sítě. Pro výpočet interpolovaných hodnot ve středech na rozsáhlejší síti ji můžeme použít jako posuvnou šablonu (změny budou jen na okrajích, kde nemáme k dispozici potřebné uzly).

Úloha: napsat matice takových koeficientů (šablony) pro biliární, bikvadratickou, bikubickou interpolaci na ekvidistantní síti (použití - při zjemnění kroku sítě na polovinu pro podrobnější vykreslení plochy) .

Jiný postup (pro výpočet funkčních hodnot na jedné souřadnicové křivce):

Při konstantní hodnotě jedné proměnné jde o interpolaci funkce ve druhé proměnné (1D) pomocí hodnot na souřadnicových křivkách ve druhé proměnné. K tomu potřebujeme znát hodnoty na okrajových přímkách (hranici), které spočítáme 1D interpolací v první proměnné. Pak provedeme 1D interpolaci ve druhé proměnné . Tak můžeme opakovaně vypočítat funkční hodnoty pro vykreslení souřadnicových křivek na dostatečně husté síti (střídání směrů).

(Nakreslete si obrázek, ilustrující tento postup).

Úloha: Napište program (M-file) pro realizaci takového postupu pro interpolaci.

*střídání
směrů*

Intuitivní metoda - dosadit podmínky interpolace do polynomu ve dvou proměnných s neznámými koeficienty - vede na rozsáhlé soustavy rovnic (je neefektivní pro rozsáhlejší síť).

Interpolace splajny ve dvou proměnných na obdélníkové síti.

Bilineární splajn na obdélníkové síti je bilineární funkcí na jednotlivých obdélníkových sítích, určenou jednoznačně funkčními hodnotami v jejich vrcholech. Celkově je spojitou funkcí.

Bikubický splajn na obdélníkové síti je funkcí, která je na jednotlivých obdélníkových sítích bikubickým polynomem a celkově má spojitě všechny druhé derivace. Je určen funkčními hodnotami v bodech sítě a např. několika typy podmínek na okraji celé sítě (viz např. [9]). Typ takových podmínek si uživatel zpravidla volí pomocí volitelných parametrů (některé informace jsou v nápovědách takových funkcí).

Podobně jsou definovány méně používané bikvadratické splajny na obdélníkové síti.

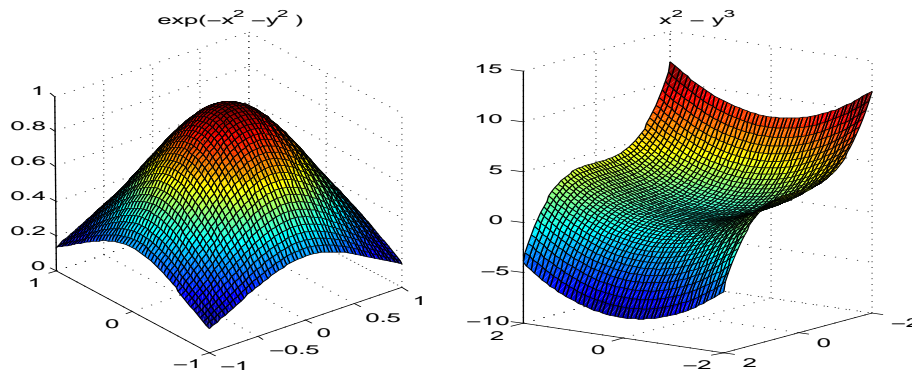
Úloha: Pro známé funkční hodnoty na obdélníkové síti máme najít interpolující splajn daného stupně a hladkosti (bilineární - C^0 , bikvadratický - C^1 , bikubický - C^2), abychom mohli počítat jejich funkční hodnoty v libovolném bodě oblasti (pro vykreslení grafu a pod.).

Algoritmus výpočtu potřebných lokálních parametrů splajnu takové sítě je založen na tom, že při fixované hodnotě jedné proměnné je tato funkce jednodimenzionálním splajnem ve druhé proměnné. Kromě bilineárního případu není takový splajn hodnotami v bodech sítě určen jednoznačně (podobně jako v jedné proměnné) - kromě nich je možno předepsat různé typy *okrajových podmínek* v okrajových bodech sítě (případně je doplní některý program sám).

Postup při výpočtu parametrů interpolantu může být podobný jako u polynomu - technika střídání směrů při použití lokální reprezentace umožní výpočet dalších potřebných lokálních parametrů (např. potřebných parciálních derivací v bodech sítě) a pak funkčních hodnot na dostatečně jemné síti souřadnicových křivek pro jejich grafické znázornění (viz [9]).

*okrajové
podmínky*

Úloha: napište algoritmus pro vykreslení souřadnicových křivek bilineárního, bikubického splajnu na síti s dostatečně malým krokem.



obr. 17 interpolace splajny na obdél níkové síti

Interpolace bikubickými Hermitovými splajny vyžaduje zadání funkčních hodnot a hodnot parciálních derivací g_x, g_y, g_{xy} ve všech uzlech síti (celkem $4 \times 4 = 16$ hodnot $g_{ij}^{k,l}$, $k, l = 0, 1$). Interpolant má lokální charakter, je spojitý a má také spojitě uvedené derivace. Uvedenými daty je tento splajn jednoznačně určen. Je možné také napsat jeho explicitní tvar - ke každému uzlu a tam předepsané hodnotě přísluší bázová funkce, která je součinem odpovídající varianty součinu hermitových koeficientů v jedné proměnné (celkem 4 bázové funkce pro každý bod síti - jejich lokální tvar a maticový zápis lokálního interpolantu vhodný pro tvorbu programu najdete např. v [9]).

31

Interpolace B-splajny zvoleného stupně na obdél níkové síti používá 2D bázových B-splajnů - vzniklých opět součinem jednodimenzionálních B-splajnů - pro interpolant $S(x, y) = \sum_i \sum_j c_{ij} B_i^n(x) B_j^m(y)$ s neznámými koeficienty c_{ij} . Tyto je třeba spočítat z podmínek interpolace, které po dosazení do uvedeného tvaru interpolantu mají tvar soustavy lineárních rovnic pro neznámé koeficienty c_{ij} . Pro její řešitelnost je třeba vhodným způsobem rozšířit síť uzlů splajnu podobně jako v jedné proměnné.

Stupně B-splajnu v každé ze souřadnic (a tedy i způsob rozšíření síti uzlů) mohou být různé. *B-splajny*

Prostředky v systémech Maple,
 Matlab (interp2, Spline Toolbox - spapi, spape, ...),
 Mathematica - InterpolatingPolynomial, Interpolation

6.3 Interpolace na trojúhelníkových sítích

V praxi - např. při zpracování terénních dat, při aplikaci metody konečných prvků (MKP) v technice, v počítačové grafice - jsou interpolovaná data často zadána nepravidelně nebo na triangulaci nějaké oblasti (ta může vzniknout také triangulací chaotické sítě bodů). Nejjednoduššími spojitými interpolanty jsou pak po částech lineární funkce, definované jednoznačně hodnotami ve vrcholech každého trojúhelníka takové triangulace. Pro interpolanty vyšších stupňů je třeba mít další data, lokalizovaná zpravidla ve vrcholech, ve středech stran a trojúhelníků (funkční hodnoty, různé derivace).

Pro podrobnější vykreslení jednotlivých plátů takových interpolantů nad trojúhelníky potřebujeme další funkční hodnoty získat např. interpolací na rovnoměrné trojúhelníkové síti každého trojúhelníka (ta vznikne pravidelným rozdělením obvodu trojúhelníka na stejný počet částí a jejich spojením se rozdělí celý trojúhelník na podobné malé trojúhelníky).

Pro interpolaci na takové rovnoměrné triangulaci trojúhelníkové oblasti se používá *sít'* nejčastěji barycentrických souřadnic bodu vzhledem k vrcholům trojúhelníka a tzv. *totální stupeň polynomu* v barycentrických souřadnicích, určený největším součtem stupňů mocnin tří barycentrických souřadnic v každém členu polynomu (na rozdíl od tzv. totálního stupně polynomu v kartézských souřadnicích na obdélníkových oblastech).

Výpočet barycentrických souřadnic $[t_1, t_2, t_3]$ pro bod $P = [x, y] \in T = [V_1, V_2, V_3]$ můžeme provést ze soustavy rovnic

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = x, \quad t_1y_1 + t_2y_2 + t_3y_3 = y, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

(konvexní kombinace kartézských souřadnic vrcholů; geometrická interpretace - poměr ploch trojúhelníků PV_iV_j , T : $t_1 = A(\Delta PV_2V_3)/A(\Delta V_1V_2V_3) \dots$, (A - area).

stupeň polynomu
barycentrické souřadnice

Úloha: nakreslete rovnoměrnou síť trojúhelníka se 2,3,4 segmenty na každé straně trojúhelníka a spočítejte barycentrické souřadnice jednotlivých bodů této sítě.

Napište program pro vykreslení takové sítě.

Pro funkční hodnoty zadané v bodech rovnoměrné sítě trojúhelníka je znám explicitní tvar interpolantu pro obecný stupeň (Lagrangeova forma, koeficienty v barycentrických souřadnicích- viz [9], str. 202). Zde uvedeme vektorovou interpolační formuli jen pro lineární, kvadratický, kubický interpolant (Lagrangeův typ) :

interpolanty

Lineární interpolant: $\mathbf{P}_1(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{V}_1 + t_2\mathbf{V}_2 + t_3\mathbf{V}_3$.

Kvadratický interpolant : (viz obr. 18)

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{t}) = t_1(2t_1 - 1)\mathbf{V}_1 + t_2(2t_2 - 1)\mathbf{V}_2 + t_3(2t_3 - 1)\mathbf{V}_3 + 4[t_1t_2\mathbf{S}_3 + t_1t_3\mathbf{S}_2 + t_2t_3\mathbf{S}_1]$$

(\mathbf{S}_i , $i = 1, 2, 3$ jsou středy stran, číslované podle protějšího vrcholu) .

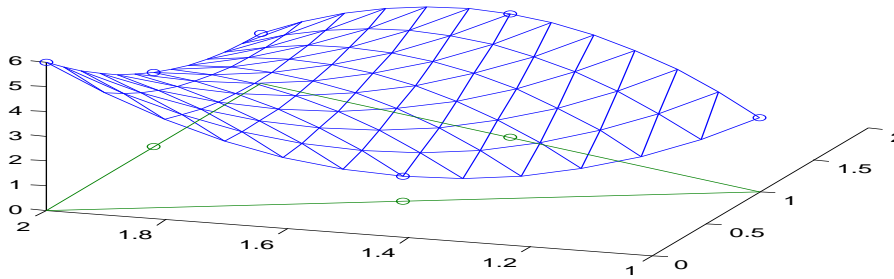
Kubický interpolant: (viz obr. 19)

Na rovnoměrné síti pro $n = 3$ (s barycentrickými souřadnicemi vrcholů $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, středu trojúhelníka $[1, 1, 1]/3$) jsou lagrangeovské koeficienty pro interpolant $\mathbf{P}_3(t)$ v bodě o souřadnicích $[t_1, t_2, t_3]$ pro vrcholy , střed trojúhelníka a ostatní body sítě (celkem 10 bodů)

$$\frac{27}{6}t_i(t_i - \frac{1}{3})(t_i - \frac{2}{3}), \quad 27t_it_jt_k, \quad \frac{27}{2}t_i(t_i - \frac{1}{3})t_j \quad .$$

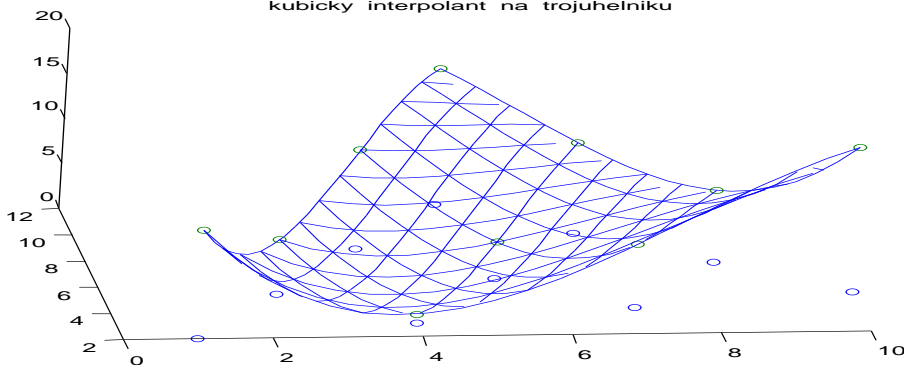
Jestliže na dané triangulaci větší oblasti provedeme interpolaci polynomem stejného stupně v každém trojúhelníku nezávisle, pak na společné hranici dvou plátů se použije

kvadraticky interpolant na trojúhelníku



obr. 18 kvadratický interpolant na rovnoměrné síti trojúhelníka

kubicky interpolant na trojúhelníku



obr. 19 kubický interpolant na rovnoměrné síti trojúhelníka

stejných hodnot a formulí - tyto pláty mají společnou hraniční křivku. Výsledná plocha je tedy spojitá.

Jestliže máme k dispozici jen hodnoty funkce, jejích derivací (nebo směrových derivací) ve vrcholech, případně normálových derivací ve středech stran, můžeme najít interpolanty pro tato data. Podrobněji se těmto problémům věnuje teorie interpolace v tzv. metodě konečných prvků (problémy celkové spojitosti, konstrukce složených prvků - [12], kap. 24).

Prostředky pro přímou realizaci interpolace ve 2D:

Matlab: `interp2`, `patch`, `delaunay`, `trisurf`

M-files (autor JK): `trdelta`, `s2trp`, `trint3`

6.4 Obecnější metody interpolace

Dosud jsme pod úlohou interpolace uvažovali jen o interpolantech, které nabývají v bodech interpolace předepsaných funkčních hodnot nebo derivací. Obecnější úlohy požadují zachování celých křivek na kraji plátu nebo jiných vlastností.

Plochy zadané okrajem, plátování ([6], [4], [3], [5], [8], [11], [13])

Při řešení problémů při dostatečně jemném vykreslení ploch, kde máme k dispozici jen její hrubou síť souřadnicových křivek nebo jen diskrétní data (funkční hodnoty a derivace v bodech sítě) byla vypracována řada technik pro jejich řešení. Nesou zpravidla označení metody plátování - se zachováním okraje, z diskrétních dat ve vrcholech s po-

užitím funkcí tvaru plochy (blended functions) . Uvedme si jen dva příklady takových ploch.

Bikubický Coonsův plát $\mathbf{C}(u, v)$: Pro okraje plátu s parametrickými rovnicemi $\mathbf{P}(u, 0), \mathbf{P}(u, 1), \mathbf{P}(0, v), \mathbf{P}(1, v)$, $u, v \in \langle 0, 1 \rangle$ a vhodně vybranými funkcemi $F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$, $F_2(t) = -2t^3 + 3t^2$ tento bikubický plát definovaný maticovým zápisem

$$\mathbf{C}(u, v) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}(0, v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}(u, 0) & \mathbf{P}(u, v) & \mathbf{P}(u, 1) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}(1, v) & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} [F_1(v), -1, F_2(v)]^T$$

obsahuje daný okraj $\mathbf{P}(u, 0), \mathbf{P}(u, 1), \mathbf{P}(0, v), \mathbf{P}(1, v)$ a má nulové zkruty .

Coons

Jiné podobné techniky najdeme v literatuře pod názvy *Boolean sum interpolation, blended interpolation, transfinite elements* .

Příklad plochy zadané diskretními údaji o hodnotách $\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}$ ve vrcholech plátu v matici \mathbf{M} (mapa plochy, mapovací matice; rozměry 4x4 ([9], str.195)):

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{f}^T(u) \mathbf{M} \mathbf{f}(v), \quad \mathbf{f} = [f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}]^T$$

$f_{ij}(t)$ - jsou funkce tvaru plochy.

Při jejich volbě jako hermitovských koeficientů, t.j.

$$f_{00}(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad f_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2,$$

$$f_{10}(t) = t - 2t^2 + t^3, \quad f_{11}(t) = -t^2 + t^3$$

se dostane tzv. *šestnáctivektorový Coonsův plát* se spojitými prvními derivacemi .

Jiné konstrukce takových plátů jsou spojeny se jmény Coons, Fergusson, Gregory.

Teorie interpolace v metodě konečných prvků (FEM) používá hermitovských dat (funkční hodnoty, směrové derivace ve směru hran) ve vrcholech, případně středu trojúhelníka (Zlámal, Ciarlet - viz [12], kap. 24).

Známa věta (prof. Ženíšek, VUT Brno) říká, že pro interpolant s celkovou hladkostí C^r je třeba mít interpolant stupně $n \geq 4r + 1$.

Teorie interpolace na triangulacích v rovině a prostoru, otázky dimenze prostoru takových interpolantů a jejich konstrukce byly předmětem intenzivního výzkumu posledních let.

Funkce pro realizaci interpolace ve dvou proměnných na obdélníkových, nepravidelných sítích -

Matlab: interp2 , griddata,

Maple: surfdata

Mathematica: ListSurfacePlot, TriangularSurfacePlot

6.5 Plochy určené obdélníkovou sítí kontrolních bodů

Bezierovy plochy na obdélníkové síti ([3], [4], [5], [6], [8], [11], [13])

Pro kontrolní síť bodů ve 3D $\dots \{ \mathbf{V}_{ij}, i = 0(1)m, j = 0(1)n, u, v \in [0, 1] \times [0, 1] \}$ a Bernšteinovy polynomy $B_i^m(u), B_j^n(v)$ můžeme definovat Bezierův plát parametrickým předpisem

kontrolní síť

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_i \sum_j B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{V}_{ij} = \sum_i B_i^m(u) \sum_j B_j^n(v) \mathbf{V}_{ij}.$$

Takový plát má za okrajové křivky příslušné rovinné Bezierovy křivky určené kontrolními body na hranici. Vnitřní parametrické křivky tohoto plátu jsou také Bezierovými křivkami s modifikovaným kontrolním polygonem na hranici (odpovídající bod na hraniční křivce). Obecně tento plát interpoluje jen ve čtyřech rohových vrcholech sítě, kde tečny okrajových křivek mají směr odpovídajících segmentů sítě. Derivace podle druhé proměnné v bodech na okrajové křivce závisí jen na prvních dvou řadách bodů kontrolní sítě (vyplývá to z vlastností Bezierových křivek). K výpočtu funkčních hodnot uvnitř sítě můžeme (opakovaně) použít jednodimenzionálních algoritmů.

plát

Příklad: pro $n = m = 2$ můžeme bikvadratický Bezierův plát zapsat vektorově

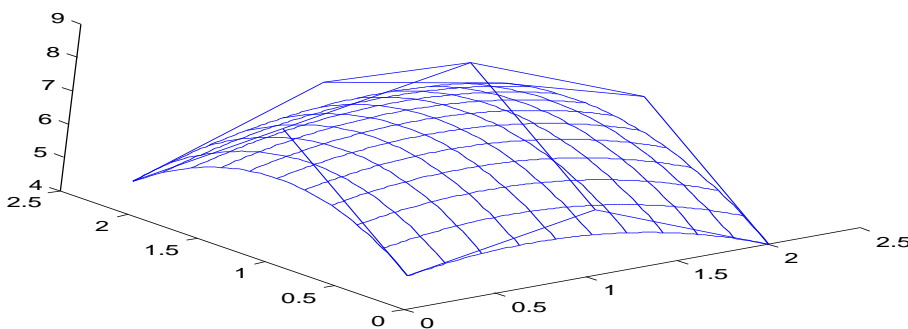
$$\mathbf{S}^2(u, v) = [B_0^2(u), B_1^2(u), B_2^2(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00}, & \mathbf{V}_{01}, & \mathbf{V}_{02} \\ \mathbf{V}_{10}, & \mathbf{V}_{11}, & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{20}, & \mathbf{V}_{21}, & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^2(v) \\ B_1^2(v) \\ B_2^2(v) \end{bmatrix}$$

Úloha: Napište formule pro parametrické křivky s $u, v = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$.

bikvadratický

Nakreslete kontrolní síť a odpovídající plát. Na obr. 20 je taková kontrolní síť s jedenácti souřadnicovými křivkami v každé proměnné.

bikvadraticky Bezieruv plat



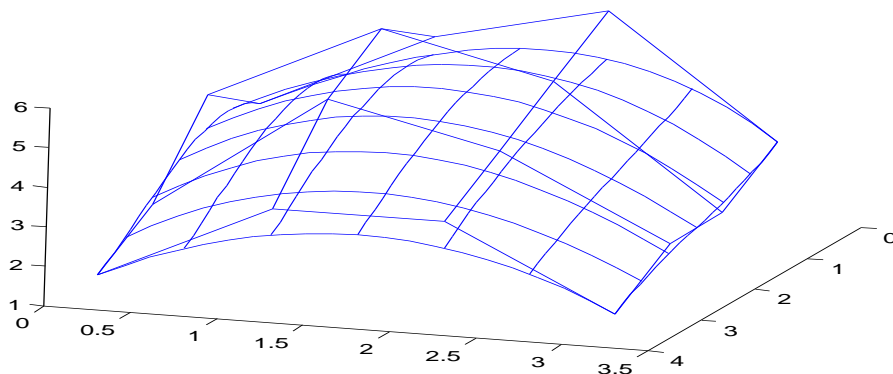
obr. 20 bikvadratický Bezierův plát

Pro $n = m = 3$ dostaneme bikubický Bezierův plát pro $u, v \in [0, 1] \times [0, 1]$

bikubický

$$\mathbf{S}^3(u, v) = [B_0^3(u), B_1^3(u), B_2^3(u), B_3^3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00}, & \mathbf{V}_{01}, & \mathbf{V}_{02}, & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10}, & \mathbf{V}_{11}, & \mathbf{V}_{12}, & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20}, & \mathbf{V}_{21}, & \mathbf{V}_{22}, & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30}, & \mathbf{V}_{31}, & \mathbf{V}_{32}, & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^3(v) \\ B_1^3(v) \\ B_2^3(v) \\ B_3^3(v) \end{bmatrix}$$

Nakreslete kontrolní síť a odpovídající plát! Příklad takové sítě a z ní generovaného bikubického plátu se sedmi souřadnicovými křivkami je na obr. 21.



obr. 21 bikubický Bezierův plát se sedmi souřadnicovými křivkami

Při spojování sousedních plátů na širší síti (složená Bezierova plocha) mají sousední pláty společný hraniční kontrolní polygon - tedy také společnou okrajovou křivku: výsledná plocha je tedy spojitá. K dosažení C^1 -spojitosti je třeba splnit další požadavky na konfiguraci kontrolní sítě - např. kolinearlnost segmentů kontrolní sítě dvou plátů ve společných hraničních bodech.

Vlastnosti Bezierových plátů :

Celý plát leží v konvexním obalu svých vrcholů.

vlastnosti

Změna vrcholu se projeví v celém plátu (nejvíce v okolí takového bodu).

Vztah mezi body kontrolní sítě a Bezierovým plátem je afinně invariantní (případnou transformaci grafu plochy je možno provést transformací kontrolní sítě a vykreslení pak provést stejným algoritmem).

Na rozdíl od Bezierových křivek pro Bezierovy plochy obecně neplatí vlastnost "variation diminishing property".

Úloha: Napište program pro sestavení kontrolní sítě bikvadratického a bikubického Bezierova plátu, pro vykreslení jeho drátěného modelu, dostatečně husté sítě souřadnicových křivek.

6.6 Trojúhelníkové Bernštejnovy-Bezierovy pláty

Také pro trojúhelníkové sítě byla vyvinuta technika konstrukce ploch pomocí kontrolní sítě bodů ve vrcholech takové triangulace, případně na rovnoměrném zjemnění triangulace (de Casteljeau, 1963; Farin 1986; [4], [9]).

Pro trojúhelník $T = [V_1 V_2 V_3]$ můžeme jeho pravidelnou triangulaci (každá strana je rovnoměrně body sítě rozdělena na n částí, každý bod je spojen s odpovídajícími dvěma body na ostatních stranách trojúhelníka - s celkovým počtem $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ bodů) popsat pomocí vektorů $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]$, $m_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ svázanými podmínkou $|\mathbf{m}| = \sum_i m_i = n$ (viz obr. 22 pro $n=3$). Každý bod této sítě odpovídá nějakému takovému vektoru a má barycentrické souřadnice vzhledem k vrcholům trojúhelníka rovny $(1/n)\mathbf{m}$. Na takové síti jsme už ukazovali techniku řešení úlohy interpolace lineárním, kvadratickým a kubickým polynomem (totálního stupně v barycentrických souřadnicích) v kap. 6.3 .

Na obdélníkové síti jsme definovali Bernštejnovy polynomy technikou tenzorového součinu Bernštejnových polynomů v jedné proměnné. Na trojúhelníkové síti s barycentrickými souřadnicemi bodu $\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3]$ jsou Bernštejnovy polynomy stupně n definovány pro každý bod sítě předpisem

$$B_{\mathbf{m}}^n(\mathbf{t}) = \frac{n!}{\mathbf{m}!} t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_3^{m_3}, \quad |\mathbf{m}| = n, \quad \mathbf{m}! = m_1! m_2! m_3!.$$

Jsou to členy trinomického rozvoje $1^n = (t_1 + t_2 + t_3)^n$ a z toho plynou jejich následující vlastnosti (podobné vlastnostem takových polynomů v jedné a dvou proměnných):

1. $B_{\mathbf{m}}^n(\mathbf{t}) \geq 0$ pro $t_i \geq 0$ (pro body trojúhelníka T).
2. $\sum_{|\mathbf{m}|=n} B_{\mathbf{m}}^n(\mathbf{t}) \equiv 1$ (tvoří rozklad jednotky).
3. $B_{\mathbf{m}}^n = \sum_{i=1}^3 t_i B_{\mathbf{m}-\mathbf{t}_i}^{n-1}(\mathbf{t})$, $|\mathbf{m}| = n$ (rekurentní vztah).
4. $B_{\mathbf{m}}^n(\mathbf{t})$ má jediné maximum v bodě $\mathbf{t} = (1/n)\mathbf{m}$.

Mějme v každém bodě \mathbf{m} sítě na trojúhelníku T zadánu hodnotu $b_{\mathbf{m}}$. Bod $[(1/n)\mathbf{m}, b_{\mathbf{m}}]$ pak tvoří kontrolní vrchol Bezierovy sítě na T , která vytváří lineární interpolant těchto bodů. Pomocí této sítě pak definujeme na T Bernštejnův-Bezierův polynom (ve zkratce BB-polynom) vztahem

$$b^n(\mathbf{t}) = \sum_{|\mathbf{m}|=n} b_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}}^n(\mathbf{t})$$

Protože Bernštejnovy polynomy definované na rovnoměrné síti tvoří bázi všech polynomů odpovídajícího celkového (totálního) stupně na trojúhelníku T , jsou naopak pro každý takový polynom jeho koeficienty $b_{\mathbf{m}}$ určeny jednoznačně. Okrajové křivky příslušného trojúhelníkového plátu jsou rovinné Bezierovy křivky, jejichž kontrolní sítě tvoří hranice kontrolní sítě nad T . Podobně jako u křivek je možno zvyšovat stupeň polynomu $b^n(\mathbf{t})$ definováním hustší sítě pro stejnou plochu (degree elevation). Při opakování tohoto procesu bude posloupnost kontrolních sítí konvergovat k ploše $b^n(\mathbf{t})$. Pro polynomy $b^n(\mathbf{t})$ platí také generující rekurze, která umožní vypočítat jeho hodnotu pomocí hodnot polynomů nižších stupňů.

Vzorce pro výpočet derivací ve směru jednotlivých stran trojúhelníka najdeme v [4], [9].

*Bernštejnovy
polynomy*

BB-polynom

Dva BB-polynomy na trojúhelnících se společnou stranou mají tam společnou okrajovou křivku a vytvářejí tak spojitou plochu. Pro spojitost prvních derivací na této společné hranici je třeba, aby trojúhelníky kontrolní sítě se společnou stranou na této síti byly koplánární. Pro vyšší hladkost spojení jednotlivých plátů je třeba splnit další podmínky na kontrolní síť ([4], [9]).

Celý BB-plát leží v konvexním obalu svých kontrolních vrcholů. Obecně opět neplatí mezi kontrolní sítí a jejím BB-plátem vlastnost "variation diminishing property".

Příklad 6.1. Pro kvadratický plát na trojúhelníku $T = [V_1V_2V_3]$ s rovnoměrnou sítí a s vrcholy její kontrolní sítě \mathbf{V}_{ijk} , $i + j + k = 3$ určenými barycentrickými souřadnicemi bodů rovnoměrné sítě a v nich předepsanými hodnotami b_{ijk} má jeho funkční předpis v barycentrických souřadnicích $\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3]$ bodů trojúhelníka parametrický tvar

$$S^2(\mathbf{t}) = t_1^2 \mathbf{V}_{200} + 2t_1 t_2 \mathbf{V}_{110} + t_2^2 \mathbf{V}_{020} + 2t_1 t_3 \mathbf{V}_{101} + 2t_2 t_3 \mathbf{V}_{011} + t_3^2 \mathbf{V}_{002}.$$

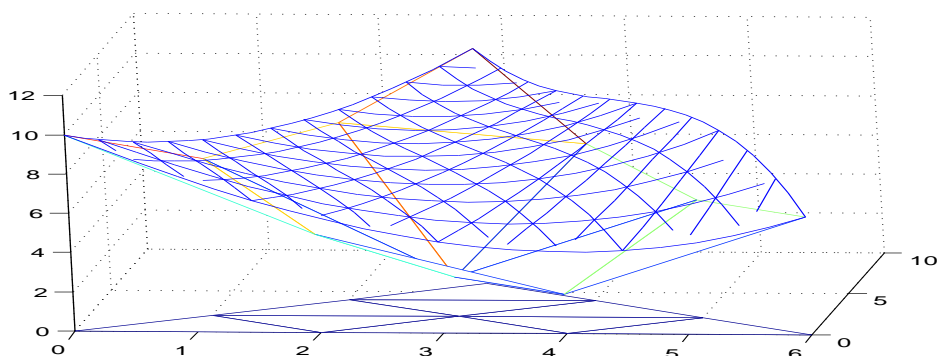
Pro souřadnicové křivky rovnoběžné se stranou V_2V_3 , ($t_1 = p \in \langle 0, 1 \rangle$) probíhá parametr t_2 interval $\langle 0, 1-p \rangle$, $t_3 = 1-p-t^2$, funkční hodnoty na dostatečně jemné síti počítáme z funkčního předpisu. Podobně na ostatních dvou systémech souřadnicových křivek (nakreslete si obrázek!).

Napište program pro vykreslení takového plátu, dvou sousedních plátů C^0, C^1 spojitých.

Příklad 6.2. Kubický plát na rovnoměrné síti trojúhelníka s kontrolní sítí \mathbf{V}_{ijk} , $i + j + k = 3$ má v barycentrických souřadnicích vektorový parametrický předpis

$$S^3(\mathbf{t}) = t_1^3 \mathbf{V}_{300} + t_2^3 \mathbf{V}_{030} + t_3^3 \mathbf{V}_{003} + 6t_1 t_2 t_3 \mathbf{V}_{003} + \\ + 3 [t_1^2 t_2 \mathbf{V}_{210} + t_1 t_2^2 \mathbf{V}_{120} + t_1^2 t_3 \mathbf{V}_{201} + t_2^2 t_3 \mathbf{V}_{021} + t_1 t_3^2 \mathbf{V}_{102} + t_2 t_3^2 \mathbf{V}_{012}]$$

Napište algoritmus a program pro vykreslení kontrolní sítě a sítě souřadnicových křivek takového plátu, pro konstrukci sítě pro C^0, C^1 – spojení takových plátů. Příklad kubického plátu s 13 souřadnicovými křivkami v každé barycentrické souřadnici je na obr. 22.



obr. 22 kubický Bezierův plát na rovnoměrné síti trojúhelníka

K vykreslení tohoto obrázku byl použit autorův M-file *trbez3.m*.

6.7 B-splajnové plochy určené sítí kontrolních vrcholů

U křivek určených kontrolním polygonem jsme k jejich konstrukci použili jak Bernšteinových polynomů, tak i B-splajnů, které generují hladkou křivku bez zvláštních požadavků na konfiguraci kontrolní sítě. Podobný postup můžeme uplatnit i při konstrukci ploch určených kontrolní sítí bodů na obdélníkové oblasti.

Na obdélníkové síti bodů $\{[u_i, v_j], i = 0(1)m, j = 0(1)n\}$ a s bázemi normovaných jednodimenzionálních B-splajnů $N_i^k(u), N_j^p(v)$ v každé proměnné (obecně různých stupňů k, p) můžeme utvořit bázi $B_{ij}(u, v) = N_i^k(u)N_j^p(v)$ dvoudimenzionálních splajnů. Pro body kontrolní sítě \mathbf{V}_{ij} můžeme pak B-splajnovou plochu (po vhodném rozšíření sítě pro generování bázových splajnů) definovat předpisem

$$\mathbf{S}^{kp}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_i^k(u)N_j^p(v)\mathbf{V}_{ij}, \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Parametrickými křivkami takové plochy (jeden z parametrů je konstantní) jsou B-splajnové křivky. Například pro konstantní hodnotu $u = u_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ je takovou křivkou

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(v) = \mathbf{S}^{kp}(u_0, v) &= \sum_{i,j} N_i^k(u_0)N_j^p(v)\mathbf{V}_{ij} = \sum_j N_j^p(v) \left(\sum_i N_i^k(u_0)\mathbf{V}_{ij} \right) = \\ &= \sum_j N_j^p(v)\mathbf{Q}_j(u_0), \quad \text{kde } \mathbf{Q}_j(u_0) = \sum_i N_i^k(u_0)\mathbf{V}_{ij}, \end{aligned}$$

- tedy B-splajnová křivka s kontrolními vrcholy $\mathbf{Q}_j(u_0)$.

Nejčastěji se používá pro vhodné rozšíření sítě násobných krajních uzlů $u, v = 0, 1$ a rovnoměrného dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, jindy stejnoměrné celočíselné sítě.

Vlastnosti B-splajnových ploch určených sítí kontrolních bodů

vlastnosti

1. Při násobných krajních uzlech (násobnost závisí na stupni splajnů) splývají rohové kontrolní body sítě s rohovými body plochy, partiální derivace ve směru okrajové parametrické křivky tam mají stejný směr jako derivace okrajové křivky.
2. Afinní invariance - afinní transformace plochy $S(u, v)$ je B-splajnovou plochou na stejně transformované síti.
3. Pro $u \in [u_r, u_{r+1}]$, $v \in [v_s, v_{s+1}]$ leží $\mathbf{S}(u, v)$ v konvexním obalu vrcholů \mathbf{V}_{ij} , $r - k \geq i \geq r$, $s - p \geq j \geq s$ - výraznější lokalizující vlastnost než u Bezierových ploch.
4. Kontrolní síť tvoří po vhodné triangulaci po částech lineární aproximaci plochy $\mathbf{S}(u, v)$.
5. Změna vrcholu \mathbf{V}_{ij} ovlivní plochu \mathbf{S} jen v obdélníku $[u_i, u_{i+k+1}] \times [v_j, v_{j+p+1}]$.
6. V j -násobném uzlu $u_i(v_i)$ splajnu je tato plocha $(k - j)$ -krát diferencovatelná podle proměnné u , $(p - j)$ -krát podle proměnné v .
7. Na rozdíl od vlastností B-splajnových křivek obecně u B-splajnových ploch nedochází k vyhlazování kontrolní sítě (variation diminishing property) - jsou známy negativní výsledky.

8. Výpočet funkčních hodnot $S(u, v)$ je možno provést opakovaným užitím jednodimenzionálních algoritmů. Problém interpolace funkčních hodnot zadaných v bodech obdélníkové sítě B-splajnovou plochou je možno řešit výpočtem vrcholů odpovídající kontrolní sítě .

Pro modelování složitějších tvarů ploch na obdélníkových sítích se podobným (o něco složitějším) způsobem v grafických systémech používá dvoudimenzionálních racionálních B-splajnů (NURBS plochy - viz [9], [13]).

Kontrolní otázky

1. Jakou základní vlastnost mají přímkové plochy a jak je můžeme modelovat ?
2. Jak je definována úloha polynomicke interpolace na obdélníkové síti a jakými způsoby můžeme hledat takový interpolant ?
3. Jak je definován bikubický interpolující splajn na obdélníkové síti - je určen jednoznačně zadáním funkčních hodnot v bodech sítě ?
4. Jaká jsou vstupní data pro bikubický Hermitův splajn a jeho výsledná hladkost ?
5. Jaký je rozdíl ve výstupu algoritmu při řešení úlohy interpolace bikubickým splajnem a pomocí kubických B-splajnů ?
6. Jaký je rozdíl mezi předpisem pro bikubický polynom na obdélníku a kubickým polynomem na trojúhelníkové síti (v barycentrických souřadnicích) ?
7. Popište kontrolní síť pro bikvadratický a bikubický plát na obdélníkové síti !
8. Jak jsou definovány (a jak můžeme spočítat) barycentrické souřadnice bodu vzhledem k danému trojúhelníku ? Jaké jsou jejich vlastnosti ?
9. Jaký je rozdíl mezi Bernštejnovými polynomy pro obdélníkovou a trojúhelníkovou oblast ?
10. Jak je definován BB-polynom na pravidelné obdélníkové síti jednoho trojúhelníka ?
11. Jakou vlastnost musí mít kontrolní síť sousedních trojúhelníků pro dosažení spojitosti, spojitých prvních derivací jejich BB-plátů ?
12. Co mají společné a čím se liší Bezierovy a B-splajnové plochy na obdélníkové síti ?
13. Jak bychom charakterizovali jednoduchou a složenou Bezierovu plochu ?
14. Jaké vlastnosti má mít kontrolní síť pro dosažení C^1 -spojitosti na obdélníkové síti, na trojúhelníkové síti ?

Úkoly k textu

1. Napište program pro vykreslení přímkové plochy generované dvěma prostorovými křivkami .
2. Popište postup řešení úlohy interpolace na síti 3x3 (4x4) bodů bikubickým (bikvartickým) polynomem metodou neurčitých koeficientů.
3. Řešte stejnou úlohu pomocí funkce *interp2* v Matlabu (případně podobných funkcí v jiných systémech) a porovnejte výsledky.
4. Porovnejte výsledky interpolace na obdélníkové síti pomocí polynomů, bikubických splajnů a Hermitových splajnů (včetně výpočetní náročnosti).

5. Nakreslete pravidelnou síť pro polynomy 3. a 4. stupně na trojúhelníku a vypište pro každý její bod odpovídající Bernštejnův polynom.
6. Popište hlavní kroky algoritmu pro vykreslení plochy interpolantu na předchozích sítích.
7. Popište a realizujte algoritmus pro vykreslení kontrolní sítě bodů na obdélníkové a trojúhelníkové síti.
8. Sestrojte kontrolní síť pro složenou C^1 -spojitou kvadratickou a kubickou Bezierovu plochu na čtverci rozděleném na čtyři čtverce nebo trojúhelníky.
9. Pro zadanou kontrolní síť popište hlavní kroky algoritmu pro vykreslení dostatečného počtu souřadnicových křivek Bezierových ploch na obdélníkové a trojúhelníkové síti.

Reference

- [1] De Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*. Springer 2001, ISBN 0-387-95366/3
- [2] Drdla J.: *Geometrické modelování křivek a ploch*. UP Olomouc 2001
- [3] Drdla J.: *Počítačová geometrie 1,2*. UP Olomouc 2004,2005
- [4] Farin G.: *Curves and Surfaces for CAGD*. Acad. Press 1993
- [5] Gallier J.: *Curves and Surfaces in Geometric Modelling*. Morgan - Kaufmann 2000, ISBN 1/55860/-599-1
- [6] Hagen H., (ed.): *Curve and Surface Design I, II* SIAM 1992
- [7] Hronek J.: *Počítačová geometrie prakticky*. Text KMI PřFUP, Olomouc 2006
- [8] Ježek F.: *Geometrické a počítačové modelování*. FAV ZČU Plzeň, 2000
- [9] Kobza J.: *Splajny*. VUP Olomouc, 1993
- [10] Krupka M.: *Geometrie pro informatiky*. Text KMI PřF UP (ESF)
- [11] Marsh D.: *Applied Geometry fo Computer Graphics and CAD*. Springer
- [12] Rektorys K.: *Přehled užité matematiky I, II*. Prometheus, Praha 2000. ISBN 80-7196-179-5
- [13] Žára J.- Beneš B.- Sochor J. - Felkel P.: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press , Brno 2004. ISBN 80-251-0454-0
- [14] *Open GL Programming Guide*. Addison-Wesley Publishing Company
- [15] *Manuály programových systémů Matlab, Maple, Mathematica*

7 Seznam obrázků

- obr. 1 svazek rovin a trs rovin
- obr. 2 rotace trojúhelníka kolem počátku
- obr. 3 křivka a) v polárních souřadnicích b) parametrická
- obr. 4 hyperbola - obálka soustavy přímek
- obr. 5 prostorová parametrická křivka
- obr. 6 prostorová křivka jako průnik ploch
- obr. 7 interpolace polygonem s11, po částech hermitovská (pchip), P_{10}
- obr. 8 interpolace kubickým splajnem, polynomem P_{10}
- obr. 9 bázovésplajny na celočíselné síti a jejich segmenty
- obr. 10 interpolant a aproximace MNČ z 10 hodnot funkce $\sin(x)$
- obr. 11 interpolace parametrickou křivkou - různé parametrizace
- obr. 12 interpolant $x(t)$, aproximace MNČ pro $y(t) - P_2, P_3, P_5$
- obr. 13 Bernštejnovy polynomy 3. stupně
- obr. 14 Bezierovy křivky 2. a 3. stupně
- obr. 15 a) prostorová Bezierova křivka b) složená Coonsova kubika
- obr. 16 a) přímková plocha generovaná 4 body b) generovaná dvěma kružnicemi
- obr. 17 interpolace splajny na obdélníkové síti
- obr. 18 kvadratický interpolant na rovnoměrné síti trojúhelníka
- obr. 19 kubický interpolant na rovnoměrné síti trojúhelníka
- obr. 20 bikvadratický Bezierův plát
- obr. 21 bikubický Bezierův plát se sedmi souřadnicovými křivkami
- obr. 22 kubický Bezierůvplát na rovnoměrné síti trojúhelníka