

KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO

INTEGRÁLNÍ POČET

JIŘÍ KOBZA



VÝVOJ TOHOTO UČEBNÍHO TEXTU JE SPOLUFINANCOVÁN
EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Olomouc 2007

Abstrakt

Tento text distančního vzdělávání je věnován integrálnímu počtu funkcí jedné proměnné. Po zavedení používané symboliky jsou uvedeny pojmy primitivní funkce, neurčitý integrál a jejich vlastnosti. V dalším jsou uvedeny a procvičovány základní metody jejich výpočtu. V následujících kapitolách je uvedena definice určitého Riemannova integrálu, metody jeho výpočtu a aplikace v různých oborech.

V jednotlivých kapitolách jsou odkazy na možnosti využití programových systémů Maple, Matlab, Mathematica pro kontrolu ručních výpočtů, řešení složitějších úloh.

Cílová skupina

Text je primárně určen pro studenty distančního studia. Je vhodný též pro studenty interního studia informatiky.

Obsah

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Neurčitý integrál | 4 |
| 1.1 | Primitivní funkce - definice, základní vlastnosti | 4 |
| 2 | Výpočet primitivní funkce metodou per partes a substituční metodou | 7 |
| 2.1 | Integrace per partes | 7 |
| 2.2 | Substituční metoda | 9 |
| 2.3 | Integrace některých tříd funkcí | 12 |
| 2.3.1 | Integrace racionálních lomených funkcí | 12 |
| 2.3.2 | Integrace iracionálních funkcí | 14 |
| 2.3.3 | Integrace trigonometrických funkcí | 16 |
| 3 | Riemannův určitý integrál | 19 |
| 3.1 | Riemannova definice určitého integrálu | 19 |
| 3.2 | Vlastnosti určitého integrálu | 23 |
| 3.3 | Určitý integrál jako funkce horní meze, Newtonova-Leibnizova formule | 25 |
| 3.4 | Metody per partes a substituce pro určité integrály | 27 |
| 4 | Aplikace určitého integrálu | 29 |
| 4.1 | Obsah rovinné oblasti | 29 |
| 4.2 | Objem tělesa | 32 |
| 4.3 | Délka rovinné křivky | 35 |
| 4.4 | Plochy rotačních těles | 37 |
| 4.5 | Aplikace ve fyzice, technice, informatice | 39 |
| 5 | Nevlastní integrály | 40 |
| 5.1 | Nevlastní integrály 1. druhu (vlivem meze integrace) | 40 |
| 5.2 | Nevlastní integrály 2. druhu - z neohraničené funkce | 41 |
| 6 | Seznam obrázků | 44 |

1 Neurčitý integrál

Studijní cíle: V této kapitole zavedeme pojmy primitivní funkce a neurčitý integrál, uvedeme metody jejich výpočtu pro některé třídy funkcí

Klíčová slova: primitivní funkce, neurčitý integrál;

výpočet - z definice, pomocí tabulky derivací elementárních funkcí.

Potřebný čas: 180 minut.

1.1 Primitivní funkce - definice, základní vlastnosti

Průvodce studiem

V diferenciálním počtu jsme k dané funkci hledali její derivaci. Ta geometricky určovala směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Pro funkci popisující pohyb tělesa představovala derivace rychlost tohoto pohybu v daném bodě. V počtu integrálním se budeme nejprve zabývat úlohou opačnou (inverzní): k dané funkci $f(x)$ najít takovou funkci $F(x)$, jejíž derivací je funkce $f(x)$ (t.j. $F'(x) = f(x)$). Tedy při známém funkčním předpisu pro směrnici tečny najít rovnici odpovídající křivky, pro známý předpis pro rychlost pohybu najít formuli pro polohu tělesa.

Definice 1.1. Necht' interval $I \subseteq \mathbb{R}$, funkce $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí k funkci $f(x)$* , jestliže $\forall x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$ (v případě uzavřeného intervalu v krajních bodech se zde rozumí odpovídající jednostranná derivace). \square

Příklad 1.2. Z uvedené definice a známých výsledků pro derivaci elementárních funkcí plyne, že např.

- k funkci $x^{n+1}/(n+1)$ je primitivní funkcí $x^n + c$, $\forall x, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+$;
- k funkci $1/(1+x)$ je primitivní funkcí $\ln(1+x) + c$, $\forall x \in (-1, +\infty), c \in \mathbb{R}$;
- k funkci $\sin(2x)$ můžeme primitivní funkci najít ve formálně různých předpisech - např. $-\frac{1}{2}\cos(2x), 1 - \frac{1}{2}\cos(2x), \frac{1}{2}(3 - \cos(2x))$ ($I = \mathbb{R}$).

Z uvedených příkladů je vidět, že primitivní funkce k dané funkci není určena jednoznačně - konkrétní funkce je určena až hodnotou aditivní konstanty, která může být určena další podmínkou na primitivní funkci (např. bodem, kterým má její graf procházet). Přirozeně vzniká také řada otázek - jak spolu souvisí vlastnosti funkce a funkce k ní primitivní, zda ke každé funkci existuje primitivní funkce.

Příklad funkce $f(x) = c_1$ pro $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) = c_2 \neq c_1$ pro $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ která nemá derivaci v bodě $x = 0$ ukazuje, že primitivní funkce nemusí existovat pro každou funkci v celém jejím definičním oboru.

*základní
vlastnosti*

Věta 1.3.

1. Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I , pak $\{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$ je množinou primitivních funkcí k $f(x)$ na intervalu I .
2. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I , potom k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.
3. Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I , pak je funkce $F(x)$ na tomto intervalu spojitá.

Platnost prvního a třetího tvrzení plyne jednoduše z definice a vlastností derivace.
Platnost druhého tvrzení si ověříme v další kapitole (integrál jako funkce horní meze).

Definice 1.4. Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ nazveme jejím *neurčitým integrálem* a označujeme ji symbolem $\int f(x)dx$;
pro funkci $f(x)$ se používá termínů *integrand*, *integrovaná funkce*, pro proměnnou x *integrační proměnná*; proces nalezení (výpočtu) primitivní funkce *integrací funkce*.
Výsledek výpočtu se zapisuje ve tvaru

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (dx - \text{diferenciál proměnné, } c - \text{integrační konstanta}) \quad (1.1)$$

(v tabulkách integrálů a počítačových programech se integrační konstanta někdy nevy-
pisuje - tento způsob často použijeme i v tomto textu). \square

Z definice primitivní funkce a pravidel pro operaci derivování plynou následující
vlastnosti primitivních funkcí, kterých používáme pro jejich výpočet.

Věta 1.5. *Jestliže na intervalu I existují integrály $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$,
pak na tomto intervalu existuje i integrál z funkce $c_1f(x) + c_2g(x)$ a platí*

$$\int [c_1f(x) + c_2g(x)]dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Tuto vlastnost může formulovat také tak, že množina všech funkcí, které mají na daném
intervalu primitivní funkci, tvoří lineární prostor.

Příklad 1.6.

- S použitím definice primitivní funkce a tabulky pro derivace elementárních funkcí
si můžeme utvořit základní tabulku integrálů elementárních funkcí (provedte!).
- Pro integrál $F(x) = \int x^p dx$, $p \in \mathbb{R}$ platí výsledek $F(x) = x^{p+1}/(p+1) + c$
obecně jen pro $p \neq -1$, $x > 0$. Prodiskutujte !
- Pro $p = -1$ dostaneme z definice výsledek $\int (1/x)dx = \ln(x) + c$ pro $x > 0$,
 $\int (1/x)dx = \ln(-x) + c$ pro $x < 0$; oba výsledky se zpravidla zapisují společně
ve tvaru $\int (1/x)dx = \ln(|x|) + c$, $x \neq 0$.

Příklad 1.7. S použitím tabulky integrálů elementárních funkcí a Věty 1.5
spočítáme integrály

$$\int (x^2 - 2x)^2 dx = \int (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c, \quad I = \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1-x^2}{x^3-x^2} dx = \int \frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)} dx = - \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} - \ln(|x|) + c, \quad I = (0, +\infty),$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx = \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)} \right) dx =$$

$$= \tan(x) - \cot(x) + c, \quad I = (0, \pi/2) \text{ (obecněji } I = (k\pi/2, (k+1)\pi/2)).$$

Derivováním si ověříme, že platí

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{x}{2} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)} = \frac{\sin(x)}{2 \cos^2(x)} + \frac{1}{2} \ln \left(\left| \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{x}{2} \right| \right).$$

Kontrolní otázky

1. Jak je definována primitivní funkce (neurčitý integrál) k funkci $f(x)$?
2. Ke kterým elementárním funkcím znáte jejich primitivní funkci ?
3. Existuje primitivní funkce k funkci $\text{sign}(x)$?

Úkoly k textu

Najděte primitivní funkce k následujícím funkcím

- 1) $(1 - x^2)^{-1/2}$; 2) $a^x, a > 0$; 3) $\sinh(x)$; 4) \sqrt{x}
- 5) $1/\sqrt{x}$; 6) $x^2\sqrt{ax}$; 7) $[3 - 2\cot^2(x)]/\cos^2(x)$;
- 8) $(x^2 - 1)/(1 + x^2)$; 9) $2\sin(x)\cos(x)$; 10) $3x/\sqrt{1 + x^2}$.

Řešení

- 1) $\arcsin(x)$; 2) $a^x/\ln(a)$; 3) $\cosh(x)$; 4) $\frac{2}{3}x^{3/2}$;
- 5) $2\sqrt{x}$; 6) $\frac{2}{7}\sqrt{a}x^{7/2}$; 7) $3\tan(x) + 2\cot(x)$.
- 8) $x - 2\arctan(x)$; 9) $\sin^2(x)$; 10) $(3/2)\sqrt{1 + x^2}$.

Poznámka 1.8. Systém Maple používá k výpočtu neurčitého integrálu funkci $\text{int}(expr, x)$, kde

- $expr$ představuje funkční předpis integrandu,
- x označení integrační proměnné (k odlišení od jiných případných konstant).

Tato funkce má i další parametry pro výpočet pomocí řad nebo pro výpočet určitého integrálu.

Po zadání například $\text{int}(x/(x^3 - 1), x)$ dostaneme výstup

$$\frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x + 1)\sqrt{3}\right).$$

Na výstupu se mohou objevit i tzv. speciální funkce - definované jako součet řady funkcí, pro který nemáme vyjádření pomocí elementárních funkcí a jeho funkční hodnota se vyčísľuje pomocí speciálních algoritmů (s řadami funkcí a jejich součty se seznámíte v příštím semestru).

Například po zadání $\text{int}(\exp(-x^2), x)$; dostaneme na výstupu

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\text{erf}(x) \quad \text{se speciální funkcí } \text{erf}(x).$$

Podobnou funkci pro výpočet neurčitého integrálu najdeme také v Symbolic Computing Toolboxu v Matlabu nebo v systému Mathematica.

Tyto výpočetní prostředky nám dnes umožňují počítat neurčitý integrál i pro dost složité explicitní předpisy funkcí - základní techniky pro jejich výpočet uvedeme v následující kapitole.

*prostředky
symbolic
computing*

2 Výpočet primitivní funkce metodou per partes a substituční metodou

Studijní cíle: Tak jako neumíme napsat explicitní předpis pro každou funkci, jejíž graf si načrtne v rovině, tak také neumíme spočítat explicitně primitivní funkci ke každé takové funkci, nebo dokonce ani ke každé funkci se známým funkčním předpisem. Pro celou řadu tříd funkcí jsou ale známy postupy, jak spočítat jejich primitivní funkce. Využívá se v nich známých výsledků z diferenciálního počtu. Počítače s prostředky Symbolic Computing (Mathematica, Maple, Matlab) nám dnes dovedou spočítat primitivní funkce i k funkcím s dost složitým funkčním předpisem a odpovídajícím výsledkem.

Klíčová slova: integrace metodou per partes, metodou substituce, jejich kombinací

Potřebný čas: 180 minut.

Průvodce studiem

K základním metodám výpočtu integrálů patří metoda substituce a metoda integrace per partes (integrace po částech), kterým se budeme věnovat v této kapitole. Tyto metody používají definice primitivní funkce a známých vztahů z diferenciálního počtu pro derivaci součinu a složené funkce. Obě metody můžeme používat opakovaně i je vzájemně kombinovat.

2.1 Integrace per partes

Z formule pro derivování součinu dvou funkcí $(uv)' = u'v + uv'$, $u, v \in C^1(a, b)$ po úpravě $uv' = (uv)' - u'v$ a integraci obou stran dostaneme *pravidlo pro integraci per partes*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \quad (2.1)$$

*základní
pravidlo
metody pp*

To použijeme v situacích, jestliže rozpoznáme v integrandu na levé straně člen $v'(x)$ a integrál na pravé straně bude jednodušší pro výpočet. I tam však můžeme opakovaně použít metodu per partes. Tradičně se zapisuje při ručním výpočtu volba funkcí u, v' a dopočítávané funkce u', v tak, jak je ukázáno v následujících příkladech.

Příklad 2.1. a) $\int xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^x \quad v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + c$

b) $\int x \cos(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos(x) \quad v = \sin(x) \end{array} \right| = x \sin(x) - \int \sin(x) dx =$
 $= x \sin(x) + \cos(x) + c.$

c) $\int \ln(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x) \quad u' = 1/x \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c.$

Při složitějším integrandu můžeme někdy metodu integrace per partes použít opakovaně. Tak například při výpočtu integrálů

$$a) \int x^2 \cos(x) dx, \quad b) \int x^2 \sin(2x) dx, \quad c) \int x^3 \sin(x) dx$$

(vyskytují se při výpočtu tzv. Fourierových koeficientů rozvoje funkcí x^2, x^3)
dostaneme tímto způsobem (postupně $u' = x^2, u' = x$) výsledky

$$a) (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x), \quad b) -\frac{1}{4}(2x^2 - 1) \cos(2x) + \frac{1}{2}x \sin(2x)$$

$$c) (3x^2 - 6) \sin(x) - (x^3 - 6x) \cos(x)$$

Jiné možnosti pro použití metody per partes nám ukáží následující příklady.

$$J = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x) & u' = 1/x \\ v' = 1/x & v = \ln(x) \end{array} \right| = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Pro hledaný integrál tak výpočtem z této rovnice dostaneme $J = \frac{1}{2} \ln^2(x) + c$.

V jiných případech nám metoda per partes umožní najít rekurzivní vztah pro primitivní funkci s celočíselným parametrem a při znalosti počátečních hodnot tak snadněji odvodit její tvar pro obecné hodnoty takového parametru. Například integrál

$$K_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \left| \begin{array}{ll} u = (x^2 + 1)^{-n} & u' = -2xn(x^2 + 1)^{-n-1} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx - 2n \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}.$$

Po úpravě tedy vidíme, že pro veličiny K_n platí rekurzivní vztah

$$K_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2 + 1)^n} + \frac{2n - 1}{2n} K_n. \quad (2.2)$$

*rekurze
pro integrál
s parametrem*

Protože pro $n = 1$ známe tabulkový integrál $K_1 = \int (1 + x^2)^{-1} dx = \arctan(x)$, můžeme z uvedené rekurze bez dalších integrací spočítat K_2, K_3, \dots . Podobně můžeme vypočítat $\int x^2 \exp(px) dx = \exp(px)(x^2/p - 2x/p^2 + 2/p^3)$ a najít rekurzi

$$\int x^m \exp(px) dx = \frac{1}{p} x^m \exp(px) - \frac{m}{p} \int x^{m-1} \exp(px) dx$$

(pro výpočet Laplaceovy transformace funkcí x^m).

Úkoly k textu

Vypočtete integrály

$$a) \int x \cdot \ln(x) dx, \quad b) \int x \cdot \arctan(x) dx, \quad c) \int x \cdot \ln^2(x) dx,$$

$$d) \int x \cdot \tan^2(x) dx, \quad e) \int (x^2 + 6x + 3) \cdot \cos(2x) dx,$$

$$f) S_n = \int \frac{dx}{\sin^n(x)}, \quad g) J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad h) I_n = \int \sin^n(x) dx.$$

$$i) \int \frac{x^2}{\exp(x)} dx, \quad j) \int \arcsin(x) dx, \quad k) \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$$

$$l) \int x e^x \sin(x) dx, \quad m) \int x^n \ln(x) dx, \quad n) \int \sin^2(x) dx,$$

$$o) \int \sin^n(x) dx, \quad p) \int \cos^n(x) dx \quad q) \int x^3 \exp(-ax^2) dx$$

$$r) \int e^{ax} P_n(x) dx \quad (P_n(x) \dots \text{polynom stupně } n).$$

Řešení

$$\begin{aligned} a) & \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2, & b) & \frac{1}{2}(x^2+1) \arctan(x) - \frac{1}{2}x, & c) & \frac{1}{2}x^2(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}) \\ d) & x \cdot \tan(x) + \ln(|\cos(x)|) - \frac{1}{2}x^2, & e) & \frac{1}{4}(2x^2+12x+5) \sin(2x) + \frac{1}{2}(x+3) \cos(2x), \\ f) & S_n = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin^{n-1}(x)} + \frac{n-2}{n-1} S_{n-2}, & S_2 & = -\cot g(x). \\ g) & J_1 = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c, & J_n & = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)J_{n-1} \right] \\ h) & I_n = -\frac{1}{n} \cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, & I_1 & = -\cos(x), & I_2 & = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \\ i) & -\frac{x^2+2x+2}{e^x}, & j) & x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}, & k) & x \cdot \tan(x) + \ln(|\cos(x)|) \\ l) & \frac{1}{2}e^x [x(\sin(x) - \cos(x)) + \cos(x)], & m) & \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln(x) - 1], \\ n) & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x), & o) & -\frac{1}{n} \cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx \\ p) & \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx & q) & -\frac{1}{2a^2} e^{-ax^2} (ax^2 + 1); \\ r) & e^{ax} (P_n(x)/a - P'_n(x)/a^2 + P''_n(x)/a^3 + \dots + (-1)^n P_n^{(n)}(x)/a^{n+1}). \end{aligned}$$

2.2 Substituční metoda

Substituční metoda patří k nejobecnějším metodám integrace a můžeme ji použít ve dvou základních situacích.

1) V symbolu integrálu je symbol $f(x)dx$ diferencíálem funkce $f(x)$. Pro diferenciál složené funkce $F(g(x))$ s primitivní funkcí F k funkci f platí podle pravidla o derivaci složené funkce $dF(g(x)) = F'(g(x))dx = f(g(x)) \cdot g'(x)dx$. Jestliže tedy v integrandu poznáme takový tvar se spojitými funkcemi $f(g(x)), g'(x)$, pak substitucí $g(x) = t$ a integrací dostaneme po zpětné substituci

*základní
formule*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + c = F(g(x)) + c. \quad (2.3)$$

Například pro některé integrály spočítané v předchozí části metodou per partes můžeme použít i substituční metodu

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) \cdot \sin(x) dx &= \left| \begin{array}{l} \cos(x) = t \\ -\sin(x) dx = dt \end{array} \right| = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3 + c = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + c. \\ \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = 1/x \end{array} \right| = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2} \ln^2(x) + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 3} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 3 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln(|x^2 - 3|) + c,$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln(x)} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = dx/x \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln(|\ln(x)|) + c$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x) dx \end{array} \right| = -1/\sin(x) + c,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3+x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \sqrt{3+x^2} + c,$$

$$\int (1+\sqrt{x-2}) dx = x + \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + c, \quad \int \frac{1}{(a+bx)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)b}(a+bx)^{1-n}, \quad n \neq -1.$$

Použitím substituční metody také dokážeme, že na odpovídajících intervalech platí pro integrály s integrandem obecnějších tvarů pravidla

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + c, \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c, \quad (F' = f) \quad (2.4)$$

2) Jestliže naopak po vhodné substituci $x = g(t)$ s diferenciálem $dx = g'(t)dt$ se *jiná* spojitými funkcemi $f(x)$, $g'(x)$ známe primitivní funkci $G(t)$ k funkci $f(g(t)) \cdot g'(t)$, *pravidla* pak při monotonnosti funkce $g(x)$ (zajišťuje existenci inverzní funkce $g^{-1}(x)$) platí

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = G(t) + c = G(g^{-1}(x)) + c. \quad (2.5)$$

Příklad 2.2.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin(t) \\ dx = \cos(t) dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos(t)}{(\cos^2(t))^{3/2}} dt = \int \frac{dt}{\cos^2(t)} = \\ &= -\tan(t) = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin(t) \\ dx = \cos(t) dt \end{array} \right| = \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int [1 + \cos(2t)] dt = \\ &= \frac{1}{4} [2t + \sin(2t)] = \frac{1}{2} [\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx &= \left| \begin{array}{l} x-a = (b-a) \sin^2(t) \\ dx = 2(b-a) \sin(t) \cos(t) dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{2x-(a+b)}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(x)} &= \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} dx = \left| \begin{array}{l} \cos(x) = t \\ -\sin(x) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} \right] = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \ln \sqrt{\left| \frac{1-\cos(x)}{1+\sin(x)} \right|} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Ověřte si výsledky pomocí definice primitivní funkce - jejím derivováním !

Při výpočtu integrálů složitějších funkcí se často dají kombinovat v jednotlivých krocích obě metody - per partes i substituce.

*kombinace
metod pp,
substituční*

Příklad 2.3.

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1+x}} dx = \left| \begin{array}{ll} u' = (1+x)^{-1/2} & u = 2\sqrt{1+x} \\ v = \arcsin(x) & v' = (1-x^2)^{-1/2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{1+x} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1+x} = 4\sqrt{1-x} + C$$

(po použití metody per partes a úpravách použita metoda substituční).

Kontrolní otázky

1. Na jakém principu je založena metoda per partes pro výpočet primitivní funkce ?
2. Jaké jsou jednotlivé varianty a fáze výpočtu primitivní funkce metodou substituce ?

Úkoly k textu

Substituční metodou vypočtete integrály

$$a) \int \sin^2(x) dx, \quad b) \int \cos^2(x) dx, \quad c) \int \tan^3(x) dx,$$

$$d) \int \frac{\sin(x)}{1+3\cos(x)} dx, \quad e) \int \frac{x^2}{(1-x^3)^2} dx, \quad f) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx,$$

$$g) \int \frac{1}{x} \sqrt{1+\ln(x)} dx, \quad h) \int \sqrt{3-2x^2} dx, \quad i) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} dx,$$

$$j) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx, \quad k) \int \frac{dx}{x \ln(x^2)}, \quad l) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Řešení

$$a) \frac{1}{4}(2x - \sin(2x)), \quad b) \frac{1}{4}(2x + \sin(2x)), \quad c) \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln(|\cos(x)|),$$

$$d) -\frac{1}{3} \ln(|1+3\cos(x)|), \quad e) \frac{1}{3(1-x^3)}, \quad f) \frac{2}{3} \sqrt{e^x-1}(e^x+2),$$

$$g) \frac{2}{3}(1+\ln(x))\sqrt{1+\ln(x)}, \quad h) \frac{3\sqrt{2}}{4} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{3-2x^2}, \quad i) \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$j) \frac{2}{3} \sqrt{e^x-1} \left(\frac{e^x-1}{3} + 1 \right), \quad k) \frac{1}{2} \ln(\ln(x^2)), \quad l) -\frac{2}{3}(2+x)\sqrt{1-x}.$$

2.3 Integrace některých tříd funkcí

V dlouhém vývoji integrálního počtu byly nalezeny metody výpočtu primitivních funkcí pro celou řadu funkcí - výsledky najdeme v přehledných příručkách, tabulkách a monografiích. Mnoho z nich bylo implementováno do prostředků Symbolic Computing (Mathematica, Maple, Matlab), kterých můžeme dnes použít ve složitějších případech, kdy ruční výpočet by byl náročný. K často se vyskytujícím typům integrandů patří (kromě základní tabulky integrálů) racionální funkce lomené a trigonometrické funkce.

2.3.1 Integrace racionálních lomených funkcí

Racionální lomená funkce je podílem dvou polynomů: $R(x) = P_m(x)/Q_n(x)$.

Při $m > n$ ji operací dělení polynomů můžeme upravit na součet polynomu $N_{m-n}(x)$ a ryze lomené racionální funkce ($m < n$) se stejným jmenovatelem $Q_n(x)$. Ten můžeme při znalosti jeho kořenů a jejich násobnosti pomocí základní věty algebry rozložit na součin lineárních a kvadratických faktorů a ryze lomenou racionální funkci rozložit na součet částečných zlomků typu

$$\frac{A_i}{(x - x_i)^j}, \quad j < n, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}, \quad p^2 - 4q < 0$$

(indexy j, k rostou od jedné po násobnost reálného či komplexního kořene, koeficienty A, B, C se počítají srovnáním koeficientů u stejných mocnin na levé a pravé straně rozkladu po vynásobení jmenovatelem $Q_n(x)$ - viz [10], učební texty z algebry).

S použitím substituce $t = x - x_i$ spočítáme primitivní funkce pro první typ částečných zlomků. Například

$$\int \frac{dx}{x^2(a + bx)} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{b^2}{a^2} \int \frac{dx}{a + bx} = \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bx}{x} \right| - \frac{1}{ax}.$$

U kvadratických faktorů po jejich úpravě na tvar $(x - a)^2 + b^2$ použijeme opět substituce

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{[(x - a)^2 + b^2]^k} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x - 2a}{[(x - a)^2 + b^2]^k} dx + \int \frac{aB + C}{[(x - a)^2 + b^2]^k} dx. \\ \int \frac{2x - 2a}{[(x - a)^2 + b^2]^k} dx &= \left| \begin{array}{l} (x - a)^2 + b^2 = t \\ (2x - 2a) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^k} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \ln(|(x - a)^2 + b^2|) & \text{pro } k = 1 \\ (1 - k)^{-1} [(x - a)^2 + b^2]^{1-k} & \text{pro } k \neq 1 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pro integrál s konstantním čitatelem dostaneme (po vytknutí této konstanty)

$$\int \frac{dx}{[(x - a)^2 + b^2]^k} = \left| \begin{array}{l} x - a = bt \\ dx = bdt \end{array} \right| = \frac{1}{b^{2k-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k} = \frac{1}{b^{2k-1}} K_k \left(\frac{x - a}{b} \right), \quad (2.7)$$

kde pro integrál K_k jsme odvodili rekurzivní formuli (2.2) v předešlém odstavci 2.1.

Poznámka 2.4. Pro dělení polynomů a rozklad jejich podílu na částečné zlomky (partial fractions)

má Maple funkce $rem(a, b, x, 'q')$, $divide(a, b, 'q')$, $convert(f, parfrac, x)$.

Příklad 2.5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 + x^2 - x + 15} dx &= \int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x + 3)(x^2 - 2x + 5)} dx = \frac{19}{20} \int \frac{dx}{x + 3} + \frac{1}{20} \int \frac{x - 25}{x^2 - 2x + 5} dx = \\
&= \frac{19}{20} \ln(|x + 3|) + \frac{1}{20} \int \left(\frac{1}{2} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5} - 24 \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = \\
&= \frac{19}{20} \ln(|x + 3|) + \frac{1}{40} \ln(x^2 - 2x + 5) - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 4} = \\
&= \frac{19}{20} \ln(|x + 3|) + \frac{1}{40} \ln(x^2 - 2x + 5) - \frac{3}{5} \arctan\left(\frac{x - 1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Úkoly k textu

Vypočítejte integrály (ručním výpočtem, případně s pomocí počítače):

$$\begin{aligned}
a) \int \frac{x^3}{x - 2} dx, \quad b) \int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - 2x^2 - x - 2} dx, \quad c) \int \frac{dx}{x^4 - 1} dx, \\
d) \int \frac{ax + b}{cx + d} dx, \quad e) \int \frac{dx}{x^3 + 1}, \quad f) \int \frac{dx}{\sin^2(x) \cos(x)}, \\
g) \int \frac{5}{x^2 - 9x + 14} dx, \quad h) \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}, \quad k) \int \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\
l) \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}, \quad m) \int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx, \\
n) \int \frac{x^9}{x^7 + 3x^6 - x^5 - 4x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x + 2} dx.
\end{aligned}$$

Řešení

$$\begin{aligned}
a) \frac{1}{3} x^3 + x^2 + 4x + 8 \ln(|x - 2|), \quad b) -2 \ln(|x + 1|) - \frac{1}{3} \ln(|x - 1|) + \frac{13}{3} \ln(|x + 2|), \\
c) \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{1}{2} \arctan(x), \quad d) \frac{a}{c} x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln(|cx + d|), \\
e) \frac{1}{6} \ln\left(\frac{(x + 1)^3}{x^3 + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right), \quad f) -\frac{1}{\sin(x)} + \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{|\cos(x)|}\right), \\
g) \ln\left|\frac{x - 7}{x - 2}\right|, \quad h) \ln\left(\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}\right), \quad k) -\frac{1}{2} \left[\frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \arctan(x + 1) \right], \\
l) -\frac{2}{9} \ln(x + 2) - \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{9} \ln(x - 1), \\
m) \frac{1}{4} x^4 - \ln(x^4 + 2) + \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1), \\
n) \text{ vypočítejte pomocí počítače (rozklad, integrál, zkontrolujte derivaci).}
\end{aligned}$$

2.3.2 Integrace iracionálních funkcí

Termínem *iracionální funkce* se označují funkce, v jejichž funkčních předpisech se vyskytují odmocniny (mocniny s racionálním exponentem). Pokud má integrand tvar racionální lomené funkce z různých odmocnin stejné lineární nebo lineární lomené funkce, pak je vhodné použít substituce s odmocninou, která je nejmenším společným násobkem těchto odmocnin. Typický postup si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 2.6.

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx &= \left| \begin{array}{l} 1+x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt = \\
 &= \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \ln \frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{|x|}. \\
 2) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^{1/6} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{t^4}{t^3+1} dt = \\
 &= \int \left(6t + \frac{2}{t+1} - \frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{t^2-t+1} \right) dt = \\
 &= 3t^2 + 2 \ln(|t+1|) - \ln(t^2-t+1) - 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) = \\
 &= 3\sqrt[3]{x} + \ln\left(\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}\right) - 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}\right). \\
 3) \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)(1+x)^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right| \\
 &= \int t \frac{(t^2+1)(t^2+1)^2}{2} \frac{4t}{4t^4} \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \\
 &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right). \\
 4) \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{4} \int \left[1 - \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4} \right)^2 \right]^{-1/2} dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} t = 5x/4 + 1/4 \\ dt = 5dx/4 \end{array} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5} \arcsin \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Příklad 2.7. Při výpočtu integrálů ze složitějších iracionálních funkcí jsou výsledky zpravidla velmi komplikované - například už při výpočtu integrálu z funkce $f(x) = \sqrt{(x-1)/(x^3-2x^2+x+1)}$ je výstup z Maple na dvou stránkách a obsahuje i imaginární složky a speciální eliptické funkce.

Úkoly k textu

Vypočítejte integrály

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}, \quad b) \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}, \quad c) \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx, \\ d) \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx, \quad e) \int \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} dx, \quad f) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ g) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad h) \int \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{x + 1}}, \\ i) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx, \quad j) \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx. \\ k) \int \frac{x^3}{1 + 2x - x^2} dx, \quad l) \int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1 + 2x - x^2}}. \end{aligned}$$

(Integrály e), l) jsou náročnější na výpočet - použijte počítač, kontrolu výsledku; k výpočtu úlohy f) se používá některé z variant tzv. Eulerovy substituce $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$, $a > 0$).

Řešení

$$\begin{aligned} a) \quad & -\sqrt{x}/2 - \sqrt[3]{x}/3 + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1), \quad b) \quad 2 \ln(\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}), \\ c) \quad & 2 \arcsin(\sqrt{x/2}) - \sqrt{2x-x^2}, \quad d) \quad 4 \left(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{x} + \sqrt[4]{x} + \arctan(\sqrt[4]{x}) \right), \\ e) \quad & \sqrt{(x+a)(x+b)} - (a-b) \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}), \\ f) \quad & \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(|2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}|), \quad a > 0, \\ g) \quad & -\arcsin\left(\frac{2-x}{x\sqrt{5}}\right), \quad h) \quad \frac{-1}{2} \arctan(\sqrt{x+1}) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{(\sqrt{x+1}-3)^2}{|x-2|}, \\ i) \quad & 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \ln\left(\frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{|2x|}\right), \quad j) \quad 2 \arcsin(\sqrt{x/2}) - \sqrt{x(2-x)}, \\ k) \quad & \frac{1}{6} (19 + 5x + 2x^2) \sqrt{1 + 2x - x^2} - 4 \arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right), \\ l) \quad & \frac{\sqrt{1 + 2x - x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\left|\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2x - x^2}}{1-x}\right|\right). \end{aligned}$$

2.3.3 Integrace trigonometrických funkcí

Při použití trigonometrických substitucí při výpočtu integrálů často dostáváme složenou racionální lomenou funkci v těchto funkcích. Pokud se tam vyskytují obě funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$, lze často použít jednu ze substitucí $t = \cos(x)$, $t = \sin(x)$, $t = \tan(x)$, $t = \tan(x/2)$ na převedení původního integrálu z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t . Ukážeme si typický postup takového výpočtu na následujících příkladech - používá se v nich známých vztahů mezi trigonometrickými funkcemi.

$$1) \int \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos(x)} dx = \int \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} \sin(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right| =$$

$$= - \int \frac{1 - t^2}{1 + t} dt = -t + \frac{1}{2} t^2 = -\cos(x) + \frac{1}{2} \cos^2(x).$$

$$2) \int \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + 2\cos^2(x)} dx = \left| \begin{array}{ll} t = \tan(x) & \sin(x) = t/\sqrt{1+t^2} \\ dx = dt/(1+t^2) & \cos(x) = 1/\sqrt{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t}{(1+t^2)(2+t^2)} dt = \ln\left(\frac{1+\tan^2(x)}{2+\tan^2(x)}\right) = -\ln(1+\cos^2(x)).$$

3) S použitím "univerzální goniometrické substituce"

$$t = \tan(x/2), \quad dx = 2dt/(1+t^2), \quad dt = dx/[2\cos^2(x/2)]$$

a vztahů $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$, $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$ spočítáme integrál

$$\int \frac{dx}{4\sin(x) - 7\cos(x) - 7} = \int \frac{dt}{4t - 7} = \frac{1}{4} \ln(|4\tan(x/2) - 7|) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{4\sin(x)}{1+\cos(x)} - 7\right| = \frac{1}{4} \ln(|4\sin(x) - 7\cos(x) - 7|) - \frac{1}{4} \ln(1+\cos(x)).$$

Úkoly k textu

Vypočítejte následující integrály

$$a) \int \frac{dx}{1 + \sin(x)}, \quad b) \int \cos(2x) \sin(2x) dx, \quad c) \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx;$$

$$d) \int \frac{1 + \cos^2(x)}{\cos^4(x)} dx, \quad e) \int \frac{dx}{\sin(x) \cos(x)}; \quad f) \int \tan^3(x) dx.$$

Řešení

$$a) \frac{-2}{1 + \tan(x/2)}, \quad b) \frac{1}{4} \sin^2(2x) = -\frac{1}{4} \cos^2(2x), \quad c) -\frac{1}{3 \sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)}$$

$$d) 2 \tan(x) + \frac{1}{3} \tan^3(x), \quad e) \ln(|\tan(x)|), \quad f) \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln(|\cos(x)|).$$

Poznámka 2.8. Ukázali jsme zatím postup při výpočtu primitivních funkcí k několika třídám funkcí. V průběhu 17.-20. století byly odvozeny výsledky a postupy pro výpočet neurčitých integrálů pro mnoho tříd funkcí, které byly publikovány v řadě sbírek úloh, monografií a tabulek integrálů (např. Děmidovič [1], Rektorys [10], Bronštejn-Semend'ajev, Hlaváček [6], Prudnikov-Bryčkov-Maričko). Řada těchto algoritmů výpočtu primitivní funkce byla implementována do současných prostředků pro symbolické výpočty (Mathematica, Maple, Matlab), které dovedou najít i dost složité primitivní funkce. Stručná informace o funkci $\text{int}(expr, x)$ pro výpočet primitivní funkce v systému Maple je uvedena v závěru první kapitoly, podrobnější informace poskytuje jeho nápověda (Help).

Máme-li zadání pro primitivní funkci nějakou další podmínku, hledáme z ní takovou hodnotu aditivní konstanty, aby tato podmínka byla splněna. Například pro funkci $F(x) = \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$ podmínka $F(0) = 2$ je splněna pro $c = 2$.

I když víme, že primitivní funkce existuje ke každé spojitě funkci na daném intervalu, obecně nelze napsat v konečném (explicitním) tvaru primitivní funkce k takovým funkcím s poměrně jednoduchým předpisem jako jsou funkce

$$\exp(-x^2), \sin(x)/x, \cos(x)/x, \exp(x)/x, 1/\ln(x), \tan(x)/x, \\ x/\sin(x), \cos(x)/x^2, x \cdot \tan(x), \ln(\sin(x)), e^x \cdot \ln(x).$$

Takové primitivní funkce je pak nutno hledat pomocí jiných prostředků (rozvoje integrandů v řady jednodušších funkcí - např. Maclaurinovy, Taylorovy a jiné rozvoje).

Příklad 2.9. Při použití základní funkce v systému Maple pro výpočet primitivní funkce dostaneme například výsledek $\text{int}(\sin(x)/x, x) = \text{Si}(x)$ se speciální funkcí $\text{Si}(x)$. Pro objasnění její struktury použijeme následující postup:

Integrací Maclaurinova rozvoje $\sin(x)/x = 1 - x^2/6 + x^4/120 - x^6/5040 + \dots$ dostaneme aproximaci její primitivní funkce

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5 - \frac{1}{35280}x^7 + \dots$$

Příklad 2.10. Podobně pro primitivní funkci k funkci $x/\sin(x)$ dostaneme integraci jejího Maclaurinova rozvoje $x/\sin(x) \simeq 1 + (1/6)x^2 + (7/360)x^4 + \dots$

$$\int \frac{x}{\sin(x)} dx \simeq x + \frac{1}{18}x^3 + \frac{7}{1800}x^5 + \frac{31}{105840}x^7 + \dots$$

S pomocí příkazu $\text{int}(\text{series}(\ln(\sin(x)), x = 0, 6), x)$; v systému Maple dostaneme Maclaurinovým rozvojem a jeho integrací výsledek

$$\int \ln(\sin(x)) dx \simeq x \cdot \ln(x) - x - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{900}x^5 + O(x^7).$$

Úkoly k textu

Vypočítejte podobným způsobem aproximaci primitivní funkce k funkcím

$$a) \exp(-x^2), \quad b) \exp(x)/x, \quad c) \tan(x)/x, \quad d) 1/\ln(x).$$

Řešení

$$a) \int \exp(-x^2) dx \simeq x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 + \dots;$$

$$b) \frac{e^x}{x} \simeq \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 \dots, \quad \int \frac{e^x}{x} dx \simeq \ln(x) + x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{96}x^4 + \dots,$$

$$c) \frac{\tan(x)}{x} \simeq 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^6 + \dots; \quad \int \frac{\tan(x)}{x} dx \simeq x + \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{75}x^5 + \dots,$$

$$d) \frac{1}{\ln(x)} \simeq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(x-1)^2 + \frac{19}{720}(x-1)^3 + \dots,$$

$$\int \frac{dx}{\ln(x)} \simeq \ln(x-1) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{24}(x-1)^2 - \frac{19}{720}(x-1)^3 + \dots.$$

Poznámka 2.11. V průběhu 19.-20. století tak bylo prostudováno (a často podle autorů pojmenováno) mnoho tzv. "speciálních funkcí, vyšších transcendentních funkcí", se kterými se také setkáme v tabulkách integrálů nebo na výstupech z uvedených počítačových prostředků. Pro výpočet hodnot takové speciální funkce je pak třeba mít k dispozici odpovídající algoritmus (nebo použít prostředků počítače - funkce *evalf* a podobné).

Kontrolní otázky

1. Jak postupujeme při výpočtu integrálu z racionální lomené funkce ?
2. Jakých metod používáme při výpočtu integrálů z iracionálních funkcí ?
3. Jakých metod můžeme použít při integraci trigonometrických funkcí ?
4. Jaké přibližné metody můžeme použít pro výpočet integrálu z funkce, ke které neznáme explicitní tvar primitivní funkce ?

3 Riemannův určitý integrál

Studijní cíle: Ukážeme myšlenku konstrukce definice Riemannova určitého integrálu z jeho geometrické interpretace, výpočet určitého integrálu pomocí odpovídající primitivní funkce (Newton - Leibniz), jeho vlastnosti a pravidla výpočtu, aplikace v různých oblastech přírodních věd.

Klíčová slova: určitý integrál jako limita integrálních součtů, jeho vlastnosti; integrál jako funkce horní meze, Newtonova - Leibnizova věta; metody výpočtu integrálu - per partes, substituční metoda; věty o střední hodnotě; aplikace integrálu na výpočet délky křivky, povrchu a objemu těles; nevlastní integrál.
Potřebný čas: 240 minut.

vývoj
pojmu
integrál

Průvodce studiem

Geometrické představy pojmu určitého integrálu jako metody výpočtu plochy pod danou křivkou vznikaly již v antickém Řecku (Archimedes -sčítání nekonečně malých veličin). Pojem funkce a její derivace byl podrobněji studován až v 16.-18. století a otázka inverzního přístupu k této problematice vedla Newtona (teorie fluxí) a Leibnize (autor termínů diferenciál, integrál) k formulaci pravidla výpočtu určitého integrálu pomocí integrálu neurčitého. To vedlo je i řadu dalších vědců k aplikacím počtu diferenciálního a integrálního v geometrii, mechanice a fyzice (Cavalieri, Lagrange, Euler). Intuitivní geometrická definice určitého integrálu spojitě funkce byla postupně zpřesňována a zobecnována (Cauchy, Riemann, Dirichlet) v 19. století. Další rozvoj matematiky (teorie míry, funkcionální analýza) a jejích aplikací v 19.-20. století vedl k dalším zobecněním pojmu integrálu (Lebesgue, Darboux, Stieltjes, Young, Radon, Perron) pro širší třídy funkcí. Tato zobecnění však vesměs jen rozšiřují klasické výsledky pro Riemannův integrál a jeho aplikace, kterými se budeme zabývat v tomto textu.

3.1 Riemannova definice určitého integrálu

Geometrická idea určitého integrálu spojitě kladné funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ - který by měl představovat velikost plochy vymezené osou x a grafem funkce $f(x)$ - je založena na následujícím limitním procesu.

Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ na n subintervalů stejné délky $h = (b - a)/n$ s krajními body $x_i, i = 0(1)n$ a v každém z nich zvolme např. střed $\xi_i = x_i + h/2$ s funkční hodnotou $f(\xi_i)$. Součin $hf(\xi_i)$ představuje plochu jednoho obdélníčku, součet $\sum_i hf(\xi_i)$ pak při dostatečně malém h dává přibližnou velikost celé uvedené plochy (tato myšlenka je realizována např. v metodě středních obdélníků pro numerický výpočet takového integrálu). Přesnou hodnotu takové plochy (integrálu) dostaneme konstrukcí posloupnosti takových integrálních součtů s určením jejich limity při $h \rightarrow 0$ (tedy pro $n \rightarrow +\infty$).
Pokud funkce $f(x)$ nabývá kladných i záporných hodnot, potom velikost plochy vymezené jejím grafem, osou x a přímkami $x = a, x = b$ (v obvyklém smyslu velikosti plochy) je určena integrálem z funkce $|f(x)|$.

integrál -
velikost
plochy

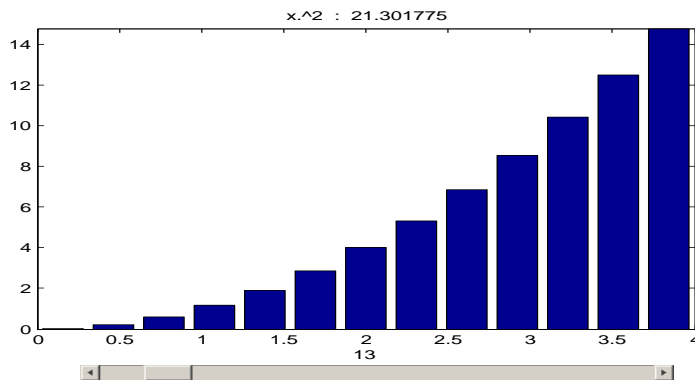
Příklad 3.1. Pro funkci $f(x) = x^2$ rozdělme interval $\langle 0, b \rangle$ na n podintervalů délky $h = b/n$ s dělicími body $x_i = ih = ib/n, i = 0(1)n$. Jestliže v každém intervalu vezmeme za reprezentanta jeho levý (resp. pravý) krajní bod, pak dostaneme dva

integrální součty S_l, S_r (formule levých a pravých obdélníků), pro které s použitím známé formule $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ dostaneme pro levé a pravé součty

$$S_l(D_n, x^2) = \sum_{i=0}^{n-1} (ih)^2 b/n = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = b^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) / 3,$$

$$S_r(D_n, x^2) = \sum_{i=1}^n (ih)^2 b/n = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = b^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) / 3.$$

Oba tyto součty mají při $n \rightarrow +\infty$ stejnou limitu rovnou $b^3/3$. Protože funkce $f(x) = x^2$ je na intervalu $\langle 0, b \rangle$ rostoucí funkcí, pak pro libovolný výběr reprezentantů $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ bude pro odpovídající součet $S(D_n, x^2)$ platit nerovnost $S_l(D_n, x^2) < S(D_n, x^2) < S_r(D_n, x^2)$ a každý takový součet má tedy stejnou limitu rovnou $b^3/3$, která je hledaným integrálem (jiná geometrická interpretace: velikost plochy obrazce pod grafem funkce x^3 je jednou třetinou velikosti plochy obdélníka o stranách b, b^2 na našem grafu). Na obr. 1 je znázorněn pravý součet pro interval $\langle 0, 4 \rangle$ s pomocí funkce `rsums('x^2', 0, 4)` ze Symbolic Computing Toolboxu v Matlabu, kde na dolní liště můžeme měnit krok sítě uzlů a nahoře dostáváme odpovídající hodnotu integrálního součtu - můžeme tak sledovat konvergenci součtů při zjemňování normy dělení.

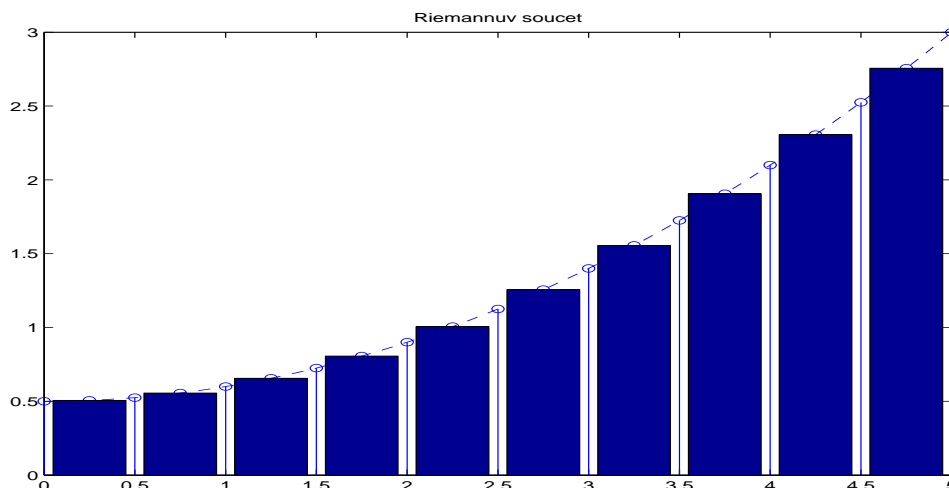


obr. 1 - Riemannův pravý součet pro funkci x^2

Maple umožňuje grafické zobrazení levých, pravých i středních integrálních součtů pomocí příkazů `leftbox`, `rightbox`, `middlebox` a symbolický tvar takových součtů v příkazech `middlesum`,

Střední Riemannův součet pro funkci $f(x) = (0.5 + x)^2$ na síti s krokem $h = 0.5$ je ilustrován na obr. 2 (bez uvedení jeho hodnoty).

Pro konstrukci určitého integrálu na obecnější třídě funkcí a vyšetřování jeho existence použil Riemann poněkud obecnější konstrukci, kde se používá obecně nerovnoměrného dělení výchozího intervalu a body ξ_i jsou libovolnými body uvnitř (případně i na okrajích) dílčích intervalů .



obr. 2 - Riemannův střední součet pro funkci $(0.5 + x)^2$

Definice 3.2. Necht' $f(x) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená funkce, body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ jsou *dělicími body* tohoto intervalu. Pro dělení intervalu $D_n = \bigcup_i \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ označme $\nu(D_n) = \max_{i=1, n} (x_i - x_{i-1})$ *normu dělení* D_n . Pro takové dělení a body $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (*výběr reprezentantů*) nazveme číslo

$$S(D_n, f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{integrálním součtem funkce } f(x) \text{ s dělením } D_n. \quad (3.1)$$

definice
Riemannova
integrálu

Jestliže pro každou posloupnost dělení D_n s vlastností $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$ (*nulovou posloupnost dělení*) a každý výběr reprezentantů $\{\xi_i\}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = I, \quad (\text{stejná limita}) \quad (3.2)$$

pak říkáme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ *riemannovsky integrovatelná* a tuto limitu nazýváme jejím *Riemannovým integrálem*, který označujeme symbolem

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{s vlastností} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ označíme $R(a, b)$. □

množina
R(a, b)

Poznámka 3.3.

1. Pomocí ϵ, δ - symboliky můžeme definici integrálu I formulovat takto:

$\epsilon - \delta$
definice

$$f \in R(a, b) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ takové, že } \forall \{D_n | \nu(D_n) < \delta\} \Rightarrow |S(D_n, f) - I| < \epsilon) \quad (3.3)$$

2. V symbolu určitého integrálu se používá termínů

- *integrand* pro funkci $f(x)$, *integrační proměnná* pro proměnnou x ,

- *dolní, horní mez integrálu* pro okraje intervalu a, b .

3. Určitý integrál tedy definuje číslo, které nezávisí na označení integrační proměnné. Z jeho definice plyne, že pro kladnou funkci na daném intervalu bude toto číslo kladné, pro zápornou funkci záporné. Pro funkci která nabývá na daném intervalu střídatě kladných i záporných hodnot, představuje její integrál rozdíl mezi celkovou velikostí

ploch mezi jejím grafem a osou x v intervalech s kladnými a zápornými hodnotami.

4. Riemannův integrál nemusí existovat pro každou ohraničenou funkci - typickým příkladem je tzv. Dirichletova funkce $\chi(x)$, nabývající hodnoty 0(1) pro x iracionální (racionální), která má tedy nekonečně mnoho bodů nespojitosti i na každém konečném intervalu. Na každém intervalu a jeho dělení můžeme pak vhodnou volbou reprezentantů ξ_i (iracionální, racionální čísla) dostat integrální součty s hodnotami nula i jedna - společná limita tedy neexistuje.

5. Protože Newton a Riemann formulovali pojem integrálu poněkud odlišně, najdeme v podrobnějších textech termíny *Newtonův integrál*, *Riemannův integrál*, které se mohou lišit na některých složitějších třídách funkcí. Pojem integrálu byl i dále zobecňován (Darboux, Lebesgue, ...), ale pro funkce spojitě a po částech spojitě jsou hodnoty takových integrálů i pravidla jejich výpočtu shodné.

Věta 3.4. Existence určitého integrálu

Má-li ohraničená funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ pouze konečný počet bodů nespojitosti, pak existuje její určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$.

existence
integrálu

Poznámka 3.5.

1) Pro funkce neohraničené na takovém intervalu - i s konečným počtem bodů nespojitosti - nemusí určitý integrál existovat; tento případ s body nespojitosti 2. druhu budeme diskutovat v kapitole 5 o nevlastních integrálech.

2) Funkce ohraničená s konečným počtem bodů nespojitosti 1. druhu - funkce po částech spojitá - je na takovém intervalu integrovatelná. Takový integrál můžeme vypočítat jako součet integrálů na intervalech spojitosti (plyne z definice Riemannova integrálu).

3) Je-li $f \in R(a, b)$, pak platí též $|f| \in R(a, b)$.

Úkoly k textu

1. Pomocí definice vypočtete integrál z funkce $f(x) = ax+b$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$. Ověřte výsledek pomocí geometrické interpretace (plocha).
2. Pomocí ideje Riemannova integrálu (a vzorce pro součet geometrické řady) vypočtete pomocí definice integrál $\int_0^1 a^x dx$.
3. Na intervalu $\langle a, b \rangle$, $0 < a < b$ s pomocí reprezentantů $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ na síti $\{x_i\}$ vypočítejte $\int_a^b (1/x^2) dx$.
4. V systému Maple se seznámte s funkcí `student[middlesum]`, která demonstruje tzv. *pravidlo středních obdélníků* pro přibližný výpočet integrálů (integrální součty s reprezentanty ve středních bodech intervalů dělení). Grafickou ilustraci této metody tam můžeme získat pomocí funkce `middlebox(f(x), x=a..b,...)`, pro levé a pravé součty podobnými funkcemi `leftbox`, `rightbox`.

Řešení

- 1) $25a/2 + 5b$
- 2) $(a-1)/\ln a$
- 3) $\ln(a/b)$.

3.2 Vlastnosti určitého integrálu

Z definice Riemannova integrálu snadno plynou jeho následující vlastnosti:

Věta 3.6.

Pro funkce $f, g \in R(a, b)$ platí následující tvrzení (používaná při výpočtu integrálů)

$$1) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall c \in (a, b).$$

$$2) \quad \int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx; \quad f(x) \leq g(x), x \in (a, b) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

4) Pro sudou funkci $f(x)$ a lichou funkci $g(x)$ na intervalu $\langle -a, a \rangle$ platí

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad \int_{-a}^a g(x)dx = 0$$

5) Pro periodickou funkci f s periodou T platí

$$\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_d^{d+T} f(x)dx \quad [c, c+T, d, d+T \in \langle a, b \rangle].$$

6) Jestliže $g(x) \neq 0$, pak platí $f(x)/g(x) \in R(a, b)$.

7) Pro monotonní ohraničené funkce f, g platí: $f, g \in R(a, b) \Rightarrow f \cdot g \in R(a, b)$.

První tvrzení této věty ukazuje na *aditivitu určitého integrálu* - můžeme je zobecnit na rozdělení intervalu na konečný počet částí. Druhá vlastnost ukazuje, že funkce z prostoru $R(a, b)$ tvoří lineární prostor. Z třetího tvrzení pak plyne platnost následujícího odhadu hodnoty určitého integrálu a výraz pro jeho *integrální střední hodnotu*:

Věta 3.7. Necht' funkce $f(x) \in R(a, b)$ a platí $m \leq f(x) \leq M \forall x \in (a, b)$.

$$\text{Pak platí} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (3.4)$$

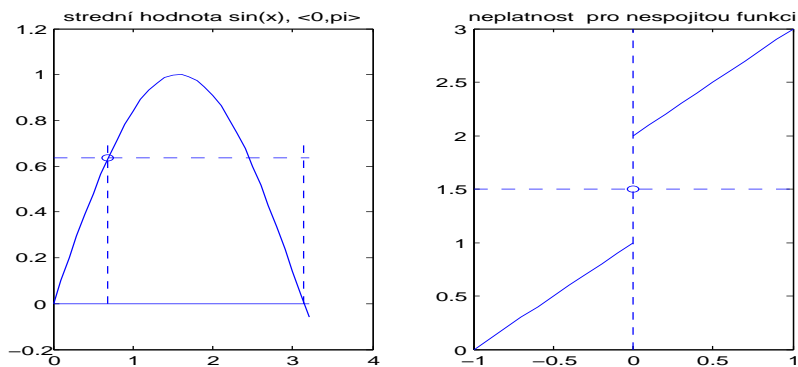
$$\text{Je-li } f \in C(a, b), \text{ pak } \exists \xi \in (a, b) \text{ takové, že } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu \quad (3.5)$$

Číslo μ se nazývá *integrální střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu (a, b)* - jeho geometrickou interpretací pro kladnou funkci je, že plocha velikosti $\mu \cdot (b-a)$ obdélníka o výšce $f(\xi)$ nad tímto intervalem je rovna ploše pod grafem funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Takový příklad je ukázán na obr. 3a), kde je vidět, že takových bodů $x = \xi$ může být v uvažovaném intervalu více.

Pro nespojitou funkci z $R(a, b)$ věta o integrální střední hodnotě nemusí platit - takový příklad je ilustrován na obr. 3b). Zde je integrální střední hodnota na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ rovna 1.5 - není ale pro nespojitost funkce její funkční hodnotou v žádném bodě tohoto intervalu. Pro každou funkci $f(x) \in R(a, b)$ leží však její integrální střední hodnota v intervalu $\langle m, M \rangle$.

*základní
vlastnosti*

*integrální
střední
hodnota*



obr. 3 a),b)- ilustrace věty o integrální střední hodnotě

První tvrzení této věty můžeme použít také k odhadu hodnoty integrálu - např. pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$ a funkci $\frac{1}{10+\sqrt{x^2+4}}$ platí

$$\frac{1}{10+3} < \frac{1}{10+\sqrt{x^2+4}} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{13} < \int_0^2 \frac{dx}{10+\sqrt{x^2+4}} < \frac{1}{5}.$$

V jednoduchých příkladech můžeme polohu bodu ξ nalézt výpočtem - v příkladu 6.3 jsme spočítali, že $\int_0^2 x^2 dx = 8/3$. Pro integrální střední hodnotu zde tedy platí $\mu = 4/3$, $\xi = 2/\sqrt{3}$.

Je známa i obecnější varianta věty o integrální střední hodnotě :

Věta 3.8. Necht' $f, g \in R(a, b)$, $f(x) \in C(a, b)$, $g(x)$ nemění znaménko na tomto intervalu . Pak

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ takové, že } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (3.6)$$

Příklad 3.9. Výpočtem snadno ověříme, že platí

$$\frac{15}{4} = \int_{-1}^2 x^3 dx = \int_{-1}^2 x \cdot x^2 dx = \frac{5}{4} \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{5}{4} \cdot 3.$$

Poznámka 3.10. Když použijeme v definici Riemannova integrálu na jednotlivých intervalech dělení D_n intervalu $\langle a, b \rangle$ jako reprezentanty body $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ z věty 3.7 a jejich integrální střední hodnoty, bude mít takový integrální součet hodnotu přesně rovnou hodnotě integrálu. Tedy histogram takové po částech konstantní funkce bude mít stejnou velikost plochy jako plocha s grafem funkce $f(x)$.

Inverzní úlohou by bylo najít k danému histogramu spojitou funkci, jejíž integrální střední hodnoty na takovém dělení jsou stejné jako plochy obdélníků histogramu (úloha interpolace integrálních středních hodnot).

Integrální střední hodnoty se používají například také v počítačové grafice k plošnému vzorkování obrazu (viz např. [11]).

3.3 Určitý integrál jako funkce horní meze, Newtonova-Leibnizova formule

Pro funkci $f \in R(a, b)$, $x, x + h \in (a, b)$ vyšetřeme funkci Φ s hodnotami

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \Phi(x + h) = \int_a^{x+h} f(t)dt.$$

Tato funkce je tedy *funkcí horní meze integrálu* funkce $f(x)$.

$$\int_a^x f(t)dt$$

Limitním přechodem ve vztahu $\Phi(x + h) - \Phi(x) \approx hf(x)$ dostaneme

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} = \Phi'(x).$$

To nám ukazuje, že taková funkce $\Phi(x)$ představuje vlastně jednu z primitivních funkcí k funkci $f(x)$ s vlastností $\Phi(a) = 0$.

Věta 3.11. *Jestliže funkce $f : C(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je v okolí bodu $x \in (a, b)$ spojitá, pak funkce horní meze jejího integrálu má v tomto bodě derivaci a platí $\Phi'(x) = f(x)$ - je tedy primitivní funkcí k funkci $f(x)$.*

Podobně bychom mohli také uvažovat o určitém integrálu jako funkci dolní meze.

Příkladem funkcí definovaných integrálem s proměnnou horní mezí jsou funkce (pro které neexistují funkční předpisy v explicitním tvaru) známé pod označením

*nové
funkce*

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}, \quad 0 < x < 1.$$

S použitím vlastnosti $(Si(x))' = \frac{\sin(x)}{x}$ a známé techniky pro hledání extrémů funkce tak najdeme, že funkce $Si(x)$ má maxima v bodech $x_k = (2k + 1)\pi$, minima v bodech $x_j = 2j\pi$, $k, j \in \mathbb{N}$.

Funkce $erf(x)$ je rostoucí a ohraničenou funkcí na intervalu $\{0, +\infty\}$, protože $(erf(x))' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) > 0$.

Počítat hodnotu určitého integrálu podle jeho definice by i v jednoduchých případech bylo pracné. Známe-li pro integrand jeho primitivní funkci v explicitním tvaru, pak pro jeho výpočet můžeme použít následující *základní formuli integrálního počtu*.

Věta 3.12. (Newton-Leibniz)

*základní
formule*

Jestliže $f \in C(a, b)$ a v tomto intervalu je $F(x)$ funkcí k ní primitivní, pak pro hodnotu integrálu z funkce $f(x)$ platí

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \{\text{obvyklý zápis} \quad \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\}. \quad (3.7)$$

Důkaz. Pro spojitou funkci $f(x)$ je odpovídající funkce horní meze $\Phi(x)$ jednou z jejích primitivních funkcí a pro každou jinou primitivní funkci $F(x)$ platí $\Phi(x) = F(x) + c$. Konstantu c vypočítáme z podmínky

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a).$$

Odtud plyne $\Phi(x) = F(x) - F(a)$, a speciálně pro $x = b$ tvrzení věty. □

Pomocí této formule a tabulky základních neurčitých integrálů můžeme snadno spočítat plochy vymezené krajními body intervalu, osou x a grafem elementárních funkcí. S použitím techniky výpočtu neurčitých integrálů (per partes, substituce, jejich kombinace) tak můžeme spočítat hodnoty určitých integrálů na konečných intervalech, kde integrand splňuje podmínky použitých vět. Podrobněji se tomu budeme věnovat v dalších částech textu.

Příklad 3.13.

$$1) \int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1} [x^{k+1}]_a^b = \frac{1}{k+1} [b^{k+1} - a^{k+1}], \quad k \neq -1.$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1, \quad \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0.$$

$$3) \int_1^b \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^b = \ln(b), \quad b > 1, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(x)} = [\tan(x)]_0^{\pi/4} = 1.$$

Úkoly k textu

1. Vyšetřete průběh funkce $li(x)$.
2. Vypočtěte plochu vymezenou grafy následujících funkcí na uvedených intervalech:
 - a) e^x , $\langle a, b \rangle$; b) $x \cdot \sin(x)$, $0 < x < k\pi$; c) $x \cdot \cos(x)$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 - d) $1/x^k$, $\langle 1, b \rangle$; e) $x \cdot \cos(x)$, $\langle 0, 2\pi \rangle$; f) $2x \exp(-x^2)$, $\langle 0, n \rangle$.

Řešení

1. Definiční obor $0 < x < 1$, $li(x)$ je klesající a konkávní funkcí.
2. a) $e^b - e^a$; b) $(-1)^{k-1} k\pi$; c) 0 ;
d) $(1 - b^{1-k}) / (k - 1)$, $k \neq 1$; e) 0 ; f) $1 - \exp(-n^2)$.

Poznámka 3.14. Když aproximujeme funkci $\exp(-x^2)$ jejím Maclaurinovým rozvojem, dostaneme pro její primitivní funkci následující rozvoj

$$\int_0^x \exp(-t^2) dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Kontrolní otázky

1. Jaká je idea konstrukce a definice Riemannova integrálu ?
2. Pro které funkce existuje Riemannův integrál, jaké má vlastnosti ?
3. Jaké metody a pravidla máme zatím pro výpočet Riemannova integrálu ?
4. Jak je definována integrální střední hodnota funkce, jaký je její geometrický význam ?

3.4 Metody per partes a substituce pro určité integrály

Z výpočtu primitivní funkce metodou per partes a Newtonovy-Leibnizovy formule plyne platnost následující formulace metody per partes pro výpočet určitého integrálu.

*metoda
pp*

Věta 3.15. Jestliže funkce $u, v \in C^1\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (3.8)$$

Použití metody per partes pro výpočet určitého integrálu je tedy podobné jako u neurčitého integrálu, jen je třeba uplatnit meze integrálu v obou členech (integrační konstanta se v rozdílu vynuluje).

Příklad 3.16. Použijeme-li volbu funkcí u, v z Příkladu 2.4, dostaneme

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = [e^x(x-1)]_0^2 = e^2 + 1.$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos(x) dx = [x \sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0.$$

$$\int_1^b \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^b - \int_1^b \frac{1}{x} dx = 5(\ln(5) - 1) - 1.$$

S použitím metody per partes na výpočet integrálu

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

dostaneme pro jeho výpočet rekurzivní formuli $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, která po výpočtu integrálů $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$ nám generuje explicitní formule

*rekurze
pro výpočet
integrálu*

$$I_{2k} = \frac{(2k+1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5 \cdot 3}.$$

Podobně použijeme k výpočtu určitého integrálu i obě varianty metody substituční - zde je ovšem třeba uplatnit změny mezí integrálu při použité substituci.

*matoda
substituční*

Věta 3.17. 1. Jestliže funkce $f(g(x)), g'(x) \in C\langle a, b \rangle$, pak se substitucí $g(x) = t$ platí

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt. \quad (3.9)$$

2. Jestliže $f(x) \in C\langle a, b \rangle$, $x = g(t) \in C^1\langle \alpha, \beta \rangle$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, $(a, b) \subset \text{Im}(g)$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt. \quad (3.10)$$

Použijeme-li první postup na některé integrály z odst. 2.2, dostaneme

$$\int_2^5 \frac{x}{x^2-3} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 3 \\ t \in \langle 1, 22 \rangle \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^{22} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(22).$$

$$\int_2^8 (1 + \sqrt{x-2}) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t-1 \\ t \in \langle 1, 3 \rangle \end{array} \right| = 2 \int_1^3 (t^2 - t) dt = 9\frac{1}{3}.$$

Podobně použijeme druhé varianty substituční metody na integrály (srovnejte s příkladem výpočtu primitivní funkce v 2.2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin^2(t) \\ t \in \langle 0, \pi/2 \rangle \end{array} \right| = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2t) dt = \left| \begin{array}{l} u = \sin(2t) \\ v' = \sin(2t) \end{array} \right| = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Kontrolní otázky

1. Čím se liší metody per partes a substituční při výpočtu určitého a neurčitého integrálu ?
2. Je třeba pro použití vztahu (3.10) vyžadovat monotonnost funkce $g(x)$?
3. Můžeme pro výpočet $\int_0^2 x dx$ použít substitute $x = \cos(t)$?

Úkoly k textu

- 1) Opakováním metody per partes ukažte, že

$$\int_a^b uv'' dx = [uv' - u'v]_a^b + \int_a^b u'v dx.$$

- 2) Odvoďte formuli pro výpočet integrálu z polynomu $P_n(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$.
- 3) Metodou per partes a pomocí rozkladu spočítejte integrály

$$a) \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx, \quad b) \int_0^2 x^2 \exp(x) dx, \quad c) \int_0^1 \ln(x+1) dx,$$

$$d) \int_0^1 \arctan(x) dx, \quad e) \int_0^1 \arcsin(x) dx, \quad f) \int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$$

- 4) Substituční metodou (případně kombinací metod) vypočítejte integrály

$$a) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx, \quad b) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad c) \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx,$$

$$d) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(x) dx, \quad e) \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx, \quad f) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^3(x) dx$$

Řešení

- 3) a) $\pi/2 - 1$, b) $2(e^2 - 1)$, c) $\ln(4) - 1$
d) $\pi/4 - \ln(\sqrt{2})$, e) $\pi/2 - 1$, f) $\ln(3/2)$
- 4) a) $\sqrt{2} - 1$, b) $\arctan(e) - \pi/4$, c) $\ln(2)/2$
d) $\pi/2$, e) $1/3$, f) $2/15$.

4 Aplikace určitého integrálu

Studijní cíle: V této kapitole se budeme zabývat aplikacemi určitého integrálu na výpočet velikosti objemů a povrchů těles, výpočet délky křivek, na jeho aplikace ve fyzikálních, technických a inženýrských oborech.

Klíčová slova: délka křivky, velikost plochy rovinného obrazce, velikost plochy a objem tělesa, pohybové zákony v mechanice.

Potřebný čas: 120 minut.

Průvodce studiem

Limitní proces vedoucí k definici určitého integrálu byl diskutován od starověku v souvislosti s výpočtem veličin spjatých s mírou vlastností geometrických objektů (délka křivky, objem tělesa, velikost povrchu) a později pro výpočty spjaté s mechanikou těles a tekutin, s jejich spojitými pohyby. Integrály mají důležitou roli v teorii zpracování signálů; aparát diferenciálního a integrálního počtu je používán v teorii zpracování obrazu a v řadě technických oborů.

4.1 Obsah rovinné oblasti

1) V odstavci o definici Riemannova integrálu jsme uvedli, že velikost plochy oblasti vymezené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ je dána hodnotou integrálu $\int_a^b |f(x)| dx$. Zobecněním této základní geometrické interpretace je následující tvrzení o velikosti plochy vymezené dvěma křivkami.

Věta 4.1. Velikost plochy oblasti vymezené grafy funkcí $f, g \in C\langle a, b \rangle$ a přímkami $x = a$, $x = b$ je rovna $P = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

V případě protínání grafů těchto křivek rozdělíme tedy při takovém výpočtu původní interval na několik intervalů se stejným znaménkem rozdílu funkčních hodnot.

Příklad 4.2. Vypočtěme velikost plochy oblasti vymezené grafy funkcí $f(x) \equiv 2$, $g(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. (Nakreslete obrázek !)

$$P = \int_0^\pi [2 - \sin(x)] dx = [2x + \cos(x)]_0^\pi = 2\pi - 1 - 0 - 1 = 2(\pi - 1).$$

Příklad 4.3. Při výpočtu plochy vymezené křivkami $x = 2$, $x - 2y^2 = 0$ (nakreslete si obrázek !) můžeme výslednou plochu spočítat

a) jako integrál z funkce proměnné x : $P = 2 \int_0^2 \sqrt{x/2} dx = 8/3$;

b) jako plochu mezi křivkami $x = 2$, $x = 2y^2$; $P = 4 - \int_{-1}^1 2y^2 dy = 4 - 4/3 = 8/3$.

Jestliže má hraniční křivka oblasti v některých částech různé funkční předpisy, je třeba vhodně rozdělit interval integrace a použít vlastností integrálu z Věty 3.6 .

Příklad 4.4. Při výpočtu plochy vymezené křivkami

$$y = 0, \quad x + y = 2, \quad y = 4x - x^2 - 2$$

(křivočarý trojúhelník - nakreslete obrázek !) si spočítáme jejich průsečíky s osou x ($\dots x = 2 - \sqrt{2}$, 2) a souřadnice jejich průsečíku v bodě $[1, 1]$.

Pro výpočet velikosti plochy pak rozdělíme oblast na dvě části a celkově dostaneme

$$P = \int_{2-\sqrt{2}}^1 (4x - x^2 - 2)dx + \int_1^2 (2 - x)dx = \frac{9}{2}.$$

2) Je-li křivka zadána parametricky pomocí funkcí $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ a představuje graf funkce, pak z pravidla o substituci dostaneme pro velikost takové plochy číslo $P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$;

pro velikost plochy uzavřené křivkou s kladnou orientací (proti směru hodinových ručiček) formuli (odvozeno opět z geometrické interpretace) $P = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt$.

Ověříme si to například na výpočtu plochy kruhu o poloměru jedna, zadaného parametrickými rovnicemi kružnice $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

kde (kladná orientace, průběh hodnot proměnné x pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$)

$$\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = -\pi, \quad \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \pi.$$

Příklad 4.5.

a) Plocha vymezená osou x a jedním obloukem cykloidy s parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos(t)) \cdot a(1 - \cos(t))dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))dt = \\ &= a^2 \left[t - 2\sin(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

b) Pro plochu elipsy s parametrickými rovnicemi $x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ tak dostaneme hodnotu

$$S = \int_0^{2\pi} a \cos(t) \cdot b \cos(t)dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = ab \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Speciálně tak dostaneme známý vzorec pro plochu kruhu o poloměru $r = a = b$.

3) Formuli pro obsah rovinné plochy vymezené křivkou zadanou v polárních souřadnicích $\theta, \rho(\theta)$, $\theta \in \langle \alpha, \beta \rangle$ dostaneme tak, že nahradíme přibližně její výseč s malým úhlem $d\theta$ a poloměrem ρ kruhovou výsečí se stejným úhlem a poloměrem, pro jejíž velikost plochy platí přibližně $dP = \frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$. Limitním přechodem pak dostaneme pro celkovou velikost plochy formuli $P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)d\theta$.

Příklad 4.6. Pro velikost plochy čtyřlístku, vymezené křivkou o rovnici

$\rho = a \sin(2\theta)$, $a > 0$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (nakreslete si graf !)

dostaneme podle uvedené formule hodnotu

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(2\theta)d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4\theta))d\theta = \frac{a^2}{16} [4\theta - \sin(4\theta)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

(Plocha všech čtyř lístků je tedy polovinou plochy kruhu o poloměru a .)

Úkoly k textu

Vypočítejte velikost plochy vymezené křivkami

a) $y = x^n$, $y = x^m$, $y = 0$, $x = 0$, $x = b$; b) $y = x^2$, $x = y^2$;

c) $y = \frac{a}{2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) + \exp\left(\frac{-x}{a}\right) \right)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = b$ řetězovka;

d) $x = a \cos^3(t)$, $y = a \sin^3(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ astroida;

e) $x = a(t - \sin(t))$, $t = a(1 - \cos(t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $y = 0$ cykloida;

f) $\rho = a(1 + \cos(\theta))$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kardioida;

g) $\rho = a \sin(3\theta)$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ trojlístek.

- i) Ukažte, že plocha vymezená parabolou $f(x) = ax^2 + bx + c$,
 $b^2/4ac < 0$, $a > 0$ (její graf leží nad osou x)
a osou x v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ má velikost

$$P = \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{b-a}{6} [f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_2)];$$

této formule se používá k aproximaci integrálu obecné funkce $f(x)$ jejím kvadratickou aproximací - interpolantem (Simpsonova formule).

- j) Pomocí parametrického vyjádření ($y = tx$) vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkou $x^4 + y^4 = ax^2y$.

- k) Přejdem k polárním souřadnicím vypočtete obsah plochy ohraničené křivkou $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Řešení

a) $\left| \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{b^{m+1}}{m+1} \right|$; b) $1/3$; c) $\frac{a^2}{2} \left(\exp\left(\frac{b}{2}\right) - \exp\left(\frac{-b}{2}\right) \right)$;

d) $\frac{3}{8}\pi a^2$; e) $3\pi a^2$; f) $\frac{3}{2}\pi a^2$; g) $\frac{1}{4}\pi a^2$;

j) $\pi a^2/(8\sqrt{2})$; k) $3\pi a^2\sqrt{3}$.

4.2 Objem tělesa

1) Rotací grafu spojitě rovinné křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x dostaneme plášť rotačního tělesa. Jeho objem můžeme vyjádřit pomocí podobného limitního přechodu jako v případě výpočtu ploch. Provedeme dělení D_n intervalu a příčné řezy tělesa rovinami $x = x_i$ (viz obr. 6a); elementy objemu mezi jednotlivými řezy aproximujeme objemy válců $dV = \pi[f(x_i)]^2 dx$, $dx = x_{i+1} - x_i$ (případně $dV = \pi[f(\xi_i)]^2 dx$ s reprezentanty $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$). Po limitním přechodu v integrálním součtu dostaneme pro objem takového tělesa formuli $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Podobnou formuli dostaneme pro objem rotačního tělesa, které dostaneme rotací grafu funkce kolem osy y (odvoďte!).

V obecnější situaci pak z předchozího odvodíme platnost následujícího tvrzení.

Věta 4.7. Jestliže rotační těleso vznikne rotací plochy mezi křivkami $f_1(x)$, $f_2(x)$ kolem osy x a platí $f_1(x) \geq f_2(x)$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, pak pro jeho objem platí $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$.

Příklad 4.8. a) Objem tělesa, které vznikne rotací křivky $y = \sin(x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy x spočítáme jako

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) dx = \frac{\pi}{4} [2x - \sin(2x)]_0^\pi = \frac{1}{2} \pi^2.$$

b) Objem tělesa mezi kuželovými pláštěmi vzniklými rotací přímek $y = 2x$, $y = 3x$, $x \in \langle 0, b \rangle$ kolem osy x spočítáme jako

$$V = \pi \int_0^b (9x^2 - 4x^2) dx = \left[3x^3 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^b = \frac{5}{3}b^3.$$

2) Je-li křivka zadána parametricky, použijeme pro výpočet objemu stejné formule a substituce $dx = x'(t)dt$.

Příklad 4.9. Objem tělesa vytvořeného rotací plochy vymezené osou x a cykloidou $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos(t))^2 \cdot a(1 - \cos(t)) dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} [1 - 3\cos(t) + 3\cos^2(t) - \cos^3(t)] dt = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

3) Je-li křivka zadána v polárních souřadnicích, pak objem tělesa, které vznikne rotací plochy $\{0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}$ kolem polární osy ($\theta = 0$) je roven

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\theta) \sin(\theta) d\theta.$$

(Element objemu po rozřezání má jehlanovitý tvar o celkové ploše základny $2\pi\rho \sin(\theta) \cdot \rho d\theta$ a výšce ρ .)

Příklad 4.10. Kardioida (srdcovka) je křivka určená v polárních souřadnicích předpisem $\rho = a(1 + \cos(\theta))$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Její rotací kolem polární osy dostaneme těleso o objemu

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{2\pi} a^3 [1 + \cos(\theta)]^3 \sin(\theta) d\theta = \frac{8}{3} \pi a^3.$$

3) *Obecnější úloha* je vypočítat objem prostorového tělesa, jehož průřetem do osy x je interval $\langle a, b \rangle$, a pro které známe v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$ velikost plochy průřezu $S(x)$ tohoto tělesa rovinou kolmou k ose x v tomto bodě (viz příklady). Pak pro element (diferenciál) objemu platí

$$dV = S(x)dx \quad \text{a celkový objem tělesa je} \quad V = \int_a^b S(x)dx. \quad (4.1)$$

Podobně dostaneme vzorec pro známou plochu řezu rovinou kolmou k osám y, z .

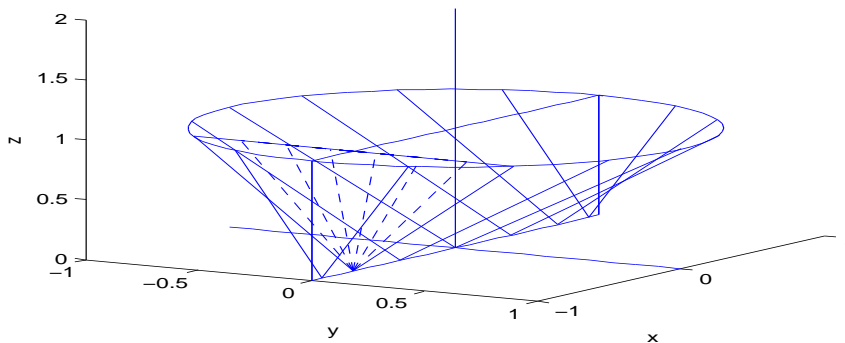
Příklad 4.11.

1) Objem šikmého hranolu o výšce h , jehož každý průřez rovinou kolmou k ose z je obdélník o stranách a, b můžeme spočítat formulí $V = \int_0^h a \cdot b dz = abh$ - je tedy stejný jako objem kolmého hranolu o stejné základně a výšce (demonstruje to známý *Cavalieriho princip* pro výpočet objemů takových těles).

2) Pro těleso, jehož plášť dostaneme spojením bodů kružnice ležící v rovině $z = c$ a splňující rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ s body na ose x o stejné souřadnici $x \in \langle -r, r \rangle$ jsou řezy rovinami kolmými k ose x rovnoramenné trojúhelníky o výšce c a základně délky $2\sqrt{r^2 - x^2}$. Pro velikost plochy takového řezu tedy platí $S(x) = c\sqrt{r^2 - x^2}$ a pro objem tohoto tělesa (vzhledem k symetrii - viz obr. 4)

$$V = \int_{-r}^r c\sqrt{r^2 - x^2} dx = 2c \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi r^2 c.$$

objem telesa s přímkovým pláštěm

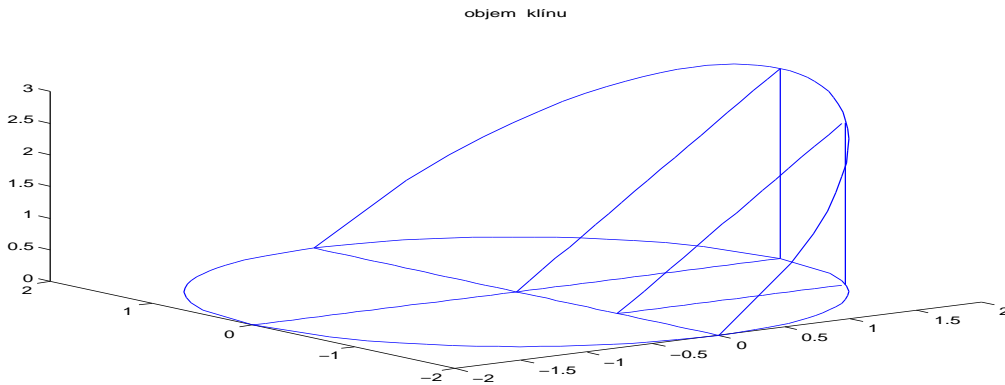


obr. 4 : objem tělesa s přímkovým pláštěm a kruhovou plošinou

3) Jestliže vedeme válcem o poloměru r šikmý řez vedoucí středem základny pod úhlem α (viz obr. 5), pak pro plochu řezu tohoto klínu rovinou kolmou k hraně v základně ve vzdálenosti x od středu (je to pravoúhlý trojúhelník) platí $S(x) = \frac{1}{2} \tan(\alpha)(r^2 - x^2)$. Jeho celkový objem tedy je

$$V = \int_{-r}^r S(x)dx = \frac{1}{2} \tan(\alpha) \int_{-r}^r r(r^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}r^3 \tan(\alpha) = \frac{2}{3}r^2 h, \quad h = r \tan(\alpha).$$

(Stejný výsledek dostaneme i s použitím obdélníkových řezů rovinami kolmými k předchozím.)



obr. 5 : objem klínu vzniklého při řezu válcem

4) Toroid je kruhové těleso, které vznikne rotací kružnice $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ ležící v rovině x, z se středem v bodu $[a, 0, 0]$ a o poloměru r kolem osy y . Jeho řezy rovinou procházející osou rotace jsou kruhy o poloměru r a ploše velikosti $S(\theta) = \pi r^2$. Objem řezu pro element ds kružnice o celkové délce $2\pi a$ je $dV = \pi r^2 ds$ a celkový objem toroidu je tedy

$$V = \int_0^{2\pi a} \pi r^2 ds = \pi r^2 \int_0^{2\pi a} ds = 2\pi^2 ar^2.$$

Takový postup při výpočtu objemu můžeme použít i v obecnějších případech.

První Guldinova věta:

Objem tělesa vzniklého rotací rovinné oblasti kolem osy která ji neprotíná je roven součinu plochy této oblasti a délky kružnice, kterou opisuje při rotaci její těžiště.

Úkoly k textu

Vypočítejte objemy následujících těles

- rotačního kužele, b) koule, c) kulové úseče s výškou v ,
- rotačního elipsoidu e) komolého kužele,
- komolého čtyřbokého jehlanu s rovnoběžnými obdélníkovými plochami horní a dolní základny o rozměrech a, b, c, d a výškou h ,
- klínovitého stanu s obdélníkovou základnou o rozměrech a, b , výškou h a délkou horní hrany c .
- Ověřte, že objem tělesa vzniklého rotací rovinné křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy y je $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$.

Řešení

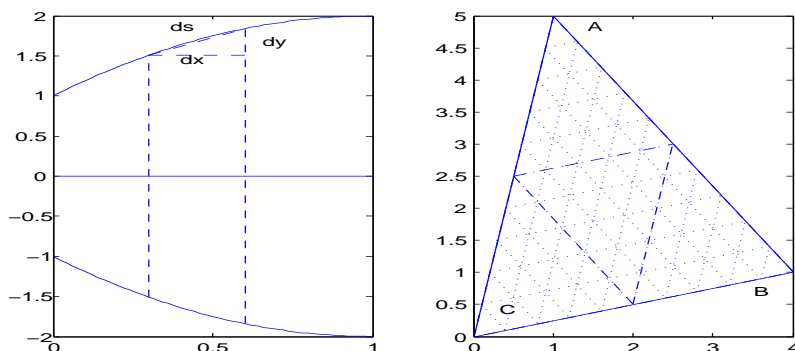
$$c) \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v), \quad d) \frac{4}{3}\pi ab^2,$$

$$f) h[(2a + c)b + (a + 2c)d]/6, \quad g) bh(2a + c)/6.$$

4.3 Délka rovinné křivky

Při zkoumání metod pro výpočet délky rovinné křivky pomocí limitního přechodu posloupnosti jejích aproximací po částech lineárními aproximacemi bylo třeba překonat některé problémy, které můžeme demonstrovat na následujícím příkladu.

V trojúhelníku ABC (obr. 6b) provedme posloupnost jeho rovnoměrných triangulací, kde každá z nich rozdělí každý trojúhelník v předchozí triangulaci na čtyři stejné trojúhelníky. součtu délek úseček AB, AC . Opakováním tohoto postupu zjistíme, že délka spojitě lomené čáry z bodu A do bodu B sestávající ze stran trojúhelníků přiléhajících k úsečce AB , jejichž body se k ní stejnoměrně přibližují s rostoucím počtem dělení, má stále stejnou délku rovnou součtu délek úseček AB, AC . Ta ovšem závisí na poloze bodu C a může proto nabývat libovolných kladných hodnot - tedy posloupnost takových aproximací délky strany AB nemá limitu ! To souvisí s tím, že úhly které svírají jednotlivé segmenty takové aproximace s aproximovanou křivkou jsou stále stejné. Vedlo to k poznatku, že vhodné aproximace by měly aproximovat také směrnice tečny vyšetřované křivky (například pomocí sečen) - tedy souviset s derivací takové funkce. Na obr. 6a) vidíme, že pro takovou aproximací elementu oblouku ds křivky



obr. 6a) - ds ... element délky křivky 6b) - nevhodná aproximace ds

$y = f(x)$, $x \in C^1(a, b)$ platí podle Pythagorovy věty

$$ds^2 \cong dx^2 + dy^2 = (1 + [f'(x)]^2)(dx)^2 \quad \text{a tedy délka} \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4.2)$$

Podobně dostaneme pro délku oblouku křivky zadané parametricky (substitucí za dx, dy) nebo v polárních souřadnicích (geometricky nebo z parametrického zápisu polárních souřadnic $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$) formule

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2} d\theta \quad (4.3)$$

Příklad 4.12.

1) Délka logaritmické křivky $\ln(x)$, $x \in \langle 1, b \rangle$ je

$$\begin{aligned} s &= \int_1^b \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^b \sqrt{1 + x^2} \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} 1 + x^2 = t^2 \quad t \in \langle \sqrt{2}, \sqrt{1+b^2} \rangle \\ \frac{dx}{x} = \frac{t}{t^2-1} dt \quad c = \sqrt{1+b^2} \end{array} \right| = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^c \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^c \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \left[t + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \right]_{\sqrt{2}}^c = \sqrt{1+b^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{1+b^2}-1}{\sqrt{1+b^2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

2) Délku jednoho oblouku cykloidy $x = r(t - \sin(t))$, $y = r(1 - \cos(t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vypočítáme podle uvedené formule jako

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos^2(t)) + r^2 \sin^2(t)} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} dt = \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2r \left[-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8r. \end{aligned}$$

3) Délka oblouku Archimedovy spirály s rovnicí v polárních souřadnicích $\rho = a\theta$, $a > 0$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je tedy podle (4.3)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2 + 1}{\sqrt{\theta^2 + 1}} d\theta = \frac{a}{2} \left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a}{2} [2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})] \simeq \frac{a}{2} \cdot 42,5126. \end{aligned}$$

Úkoly k textu

Vypočítejte délky následujících křivek (příp. s pomocí počítače)

- mocnin ax^k , sinusovky, logaritmu, exponenciály, elipsy,
- délku a plochu řetězovky $y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$ v intervalu $\langle b, c \rangle$;
- astroidy $x = a \cdot \cos^3(t)$, $y = a \cdot \sin^3(t)$; kardioidy $r = a(1 + \cos(\varphi))$, čtyřlístku $r = a \cdot \sin(2\theta)$;
- evolventy kružnice $x = a(\cos(t) + t \sin(t))$, $y = a(\sin(t) - t \cos(t))$, $t \in \langle 0, T \rangle$,
- délku a plochu hypocykloidy $x = 2a \cos(t) + a \cos(2t)$, $y = a[2 \sin(t) - \sin(2t)]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
- délku oblouku logaritmické spirály $r = c \cdot \exp(a\theta)$, $\theta \in \langle \alpha, \beta \rangle$;

Řešení

a) Pro délku křivky $f(x) = 2x^2$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$ dostaneme

$$s = \sqrt{17} - \frac{1}{4} \ln(-4 + \sqrt{17}) \simeq 4.65,$$

při vyšších mocninách patří počítané integrály do tříd speciálních funkcí a jejich hodnoty můžeme spočítat v Maple pomocí funkce *evalf(..)*, nebo obecně pomocí metod numerické integrace;

$$\ln(x), x \in \langle 1, 5 \rangle \cdots s \simeq 4.3675; \quad \exp(x), x \in \langle -1, 2 \rangle \cdots s \simeq 7.98$$

$$x \in \langle -2, 2 \rangle \cdots s \simeq 9.01; \quad x \in \langle 0, 2 \rangle \cdots s \simeq 6.79;$$

$$\text{b) } a = 1, x \in \langle -2, 2 \rangle \cdots s \simeq 15.645, \quad a = 3, x \in \langle -2, 2 \rangle \cdots s \simeq 33.29$$

$$\text{c) } 6a, \quad 8a, \quad 4a \cdot 2, 422 \dots \quad \text{d) } \frac{1}{2}aT^2, T > 0.$$

$$\text{e) } s = 16a, \quad P = 2\pi a^2; \quad \text{f) } c\sqrt{1+a^2}(e^{a\beta} - e^{a\alpha})/a.$$

4.4 Plochy rotačních těles

Problém výpočtu velikosti povrchu těles pomocí aproximace povrchu rovinnými segmenty se potýká s podobnými problémy jako výpočet délky křivek. Ukažme si jen jednoduchou ideu výpočtu velikosti povrchu pláště tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x - viz obr. 6a) (podobný výsledek platí i pro rotaci kolem osy y). Provedeme-li pro funkci $f \in C^1(a, b)$ dělení intervalu D_n a příčné řezy v jeho bodech x_i , pak povrch jednoho segmentu pláště představuje pásek o šířce přibližně $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ a délce $2\pi f(\xi_i)$, $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Součet povrchů těchto segmentů a limitní přechod při $\nu(D_n, f) \rightarrow 0$ nám dá následující výsledek :

Věta 4.13. *Plocha pláště rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$, $f \in C^1(a, b)$ má velikost*

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| ds = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (4.4)$$

Diferenciál ds můžeme opět vyjádřit i pro křivku v parametrickém vyjádření nebo v polárních souřadnicích (viz předchozí kap. 4.3) a pro velikosti těchto ploch pak platí

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{r^2 + [r']^2} d\theta. \quad (4.5)$$

Příklad 4.14.

1) Velikost plochy povrchu tělesa vzniklého rotací sinusoidy kolem osy x v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ vypočítáme jako hodnotu integrálu

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx = \left| \begin{array}{ll} \cos(x) = t & t_1 = 1 \\ \sin(x) dx = -dt & t_2 = -1 \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 + t^2}} dt = 2\pi [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] \simeq 2\pi \cdot 2,2956. \end{aligned}$$

2) Pro velikost plochy povrchu tělesa vzniklého rotací cykloidy

$x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x

jsme už při výpočtu její délky spočítali, že diferenciál $ds = 2a \sin(t/2) dt$.

Proto velikost plochy bude rovna

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos(t)) \cdot 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt = \left| \begin{array}{l} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = z \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2z dz \end{array} \right| = \\ &= 16\pi a^2 \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = 16\pi a^2 \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

3) Pro výpočet velikosti povrchu tělesa vytvořeného rotací kardioidy

$r = 2a(1 - \cos(\varphi))$, $a > 0$ kolem polární osy spočítáme $(r')^2 = 4a^2 \sin^2(\varphi)$

a z výrazu pro diferenciál ds dostaneme

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^\pi 2a(1 - \cos(\varphi)) \sin(\varphi) \cdot 2a\sqrt{(1 - \cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)} d\varphi = \\
&= 8\pi a^2 \int_0^\pi (1 - \cos(\varphi)) \sin(\varphi) \sqrt{2(1 - \cos(\varphi))} d\varphi = \\
&= 64\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left| \begin{array}{l} \sin^2(\varphi/2) = t \\ t_1 = 0, t_2 = 1 \end{array} \right| = \\
&= 64\pi a^2 \int_0^1 t\sqrt{t} dt = 64\pi a^2 \cdot \frac{2}{5} [t^{5/2}]_0^1 = \frac{128}{5} \pi a^2.
\end{aligned}$$

Poznámka 4.15. Zobecněním předchozích postupů pro výpočet velikosti ploch vzniklých rotací rovinné křivky kolem osy dostaneme následující výsledek.

Druhá Guldinova věta: Velikost povrchu plochy vzniklé rotací rovinné křivky kolem osy která ji neprotíná je rovna součinu délky této křivky a délky kružnice opsané těžištěm křivky.

Úkoly k textu

1. Vypočtete velikost povrchů ploch, vzniklých rotací mocniny ax^k , tangenty, exponenciály, řetězovky kolem osy x na zvoleném intervalu.
2. Vypočtete velikost povrchů ploch, vzniklých rotací cykloidy, astroidy kolem osy y .
3. Vypočtete velikost povrchu koule, elipsoidu, toroidu.

Řešení

1. $y = x^2/2, x \in \langle 0, 1 \rangle \dots S \simeq 1, 32; \quad x \in \langle 0, 2 \rangle \dots S \simeq 15, 24;$
 $x \in \langle 0, 3 \rangle \dots S \simeq 70.1;$
 $y = x^3/5, x \in \langle 0, 1 \rangle \dots S \simeq 0.34, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle \dots S \simeq 9.64;$
 $y = x^4, x \in \langle 0, 1 \rangle \dots S \simeq 3.44, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle \dots S \simeq 805.7;$
 $y = \tan(x), x \in \langle 0, \pi/4 \rangle \dots S \simeq 3.84, \quad x \in \langle 0, 3\pi/8 \rangle \dots 19.55;$
 $y = \exp(x), x \in \langle 0, 1 \rangle \dots S \simeq 22.94, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle \dots S \simeq 174;$
 $y = (\exp(x) + \exp(-x))/2, x \in \langle 0, 1 \rangle \dots S \simeq 8.84,$
 $x \in \langle 0, 2 \rangle \dots S \simeq 49.15$

2. cykloida $\dots 2\pi r \cdot 12, 57; \quad$ astroida $\dots 3\pi a^2/8$

3. koule $4\pi R^2, \quad$ elipsoid $4\pi ab, \quad$ toroid $4\pi^2 Rr.$

(V obtížnějších případech použijte počítač !)

4.5 Aplikace ve fyzice, technice, informatice

Vývoj diferenciálního a integrálního počtu byl silně svázán s potřebou formulovat pohybové zákony ve fyzice a astronomii. Pojem derivace funkce souvisí s pojmem okamžitě rychlosti, druhá derivace s mechanickým pojmem zrychlení pohybu. Při studiu pohybových zákonů v mechanice se setkáme s pojmy *těžiště*, *statické momenty* pro křivky, plochy a tělesa, ve kterých vystupují integrály (jednoduché, dvojné, trojné). O vztazích mezi polohou těžiště, délkami křivek a velikostí odpovídajících rotačních ploch platí *první Guldinova věta*, mezi plochou rotující oblasti a objemem vzniklého rotačního tělesa *druhá Guldinova věta*. Jejich znění najdeme v odst. 4.2, 4.4, odvození např. ve [4] (Fichtengolc II, str.351).

Na výpočet integrálů vedou také úlohy na výpočet délky dráhy tělesa při známé závislosti jeho rychlosti na čase, nebo výpočet velikosti vykonané práce v silovém poli.

Délka křivky je tzv. "přirozeným parametrem" u parametricky zadaných křivek při formulaci jejich vlastností v diferenciální a počítačové geometrii.

Diferenciálního a integrálního počtu se široce používá v teorii i praktických výpočtech v oblasti mechaniky tekutin (proudění), elektromagnetismu a elektrodynamiky .

Diferenciálního a integrálního počtu se používá při zpracování obrazů v počítačové grafice (ostření obrazu, plošné vzorkování (používá integrální střední hodnoty), generování odstínů, osvětlování, míchání barev (váhy barev s daným spektrálním rozložením), průhlednost, zobrazování objemů, pohlcování světla).

V teorii zpracování signálů (signal processing) se používá integrálů při rozkladu a skládání signálů pomocí jejich frekvenčních komponent (výpočet Fourierových koeficientů dané funkce, skládání signálu z jeho komponent - Fourierova analýza) i nevlastních integrálů (viz následující kapitola) při realizaci Fourierovy transformace a konvoluce funkcí.

Pro rekonstrukci spojité funkce se také používá varianty speciální funkce $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ (označované jako "sinc filtr").

Kontrolní otázky

1. Jak se vypočítá velikost plochy vymezené křivkami zadanými v různých souřadnicích ?
2. Jaká je idea výpočtu objemu těles a odpovídající formule ?
3. Jak si odvodíme vztah pro velikost elementu délky křivky v různých souřadnicích ?
4. Jak vznikne výraz pro diferenciál povrchu plochy ?

5 Nevlastní integrály

Studijní cíle: Definice Riemannova určitého integrálu předpokládala konečnost a uzavřenost intervalu integrace a omezenost integrované funkce v tomto intervalu. Definice určitého integrálu jako funkce horní (resp. dolní) meze ovšem dává prostor k úvahám o vyšetřování limitního procesu, kdy taková mez se blíží k nekonečnu nebo k vlastnímu bodu, ve kterém má funkce nevlastní limitu. V geometrické interpretaci tedy řešit problém, zda neohrazená oblast může mít konečnou velikost plochy, objemu - případně za jakých podmínek.

Klíčová slova: neohrazený interval, nevlastní limita, nevlastní integrál prvního a druhého druhu (vlivem meze, vlivem nevlastní limity ve vlastním bodě).

Potřebný čas: 60 minut.

5.1 Nevlastní integrály 1. druhu (vlivem meze integrace)

S poznatky z odstavce o určitém integrálu jako funkci horní (dolní) meze, jeho vlastnostech a výpočtu prodiskutujeme nyní možnosti a výsledky limitních procesů, ve kterých taková horní (dolní) mez se blíží k nevlastním bodům $+\infty(-\infty)$.

Definice 5.1. Jestliže funkce $f(x)$ je definována v intervalu $\langle a, +\infty \rangle$, riemanovsky integrovatelná v každém intervalu $\langle a, x \rangle$, $x > a$ a existuje konečná limita

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \quad \text{pak píšeme} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt \quad (5.1)$$

a tuto limitu nazveme *nevlastním integrálem 1. druhu této funkce* a říkáme, že *tento integrál konverguje*. Jestliže taková limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme že *tento integrál diverguje*. \square

Poznámka 5.2. Analogickou definicí a s použitím aditivity určitého integrálu můžeme definovat nevlastní integrály

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

Příklad 5.3.

$$1) \int_0^{+\infty} \exp(-x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\exp(-t)]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-x} + e^0] = 0 + 1 = 1.$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - \ln(1)] = +\infty.$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-m}}{1-m} = \frac{1}{1-m} \quad \text{pro } m > 1, \quad \text{integrál diverguje pro } m \leq 1.$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{(t-1)^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t-1}{2}\right) \right]_{-x}^x = \pi/2.$$

Poznámka 5.4. Když se v integrandu vyskytne kromě integrační proměnné ještě další parametr, je hodnota takového integrálu závislá na tomto parametru - je jeho funkcí. Lze pak vyšetřovat vlastnosti takové funkce a různé operace s ní (v případě vlastních i nevlastních integrálů). U nevlastních integrálů 1. druhu jsou takovými funkcemi například

$$\int_0^{+\infty} \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad \int_0^{+\infty} \exp(-ax) \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

V řadě případů ovšem neznáme explicitní formu takových funkcí - například u funkcí

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{x-1} dt, \quad B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

5.2 Nevlastní integrály 2. druhu - z neohraničené funkce

Pro funkce s nevlastními limitami ve vlastních bodech definičního oboru můžeme vyšetřovat podobný limitní proces s integrálem jako funkcí horní (dolní) meze.

Definice 5.5. Nechť funkce $f(x)$ je definována v intervalu $\langle a, b \rangle$, neohraničená v okolí bodu b a riemannovsky integrovatelná v každém intervalu $\langle a, x \rangle$, $a < x < b$.

Jestliže existuje konečná limita zleva

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = I, \quad \text{pak ji značíme symbolem} \quad I = \int_a^b f(x) dx \quad (5.2)$$

a nazýváme ji *nevlastním integrálem 2. druhu (se singularitou v horní mezi)*. Říkáme také, že *tento integrál konverguje*. V případě neexistence takové limity říkáme, že *takový integrál diverguje*. \square

Podobně definujeme nevlastní integrál se singularitou v dolní mezi (případně v dolní i horní mezi). Pokud je v intervalu integrace více bodů s nevlastními limitami, můžeme jeho rozdělením na dílčí intervaly opakovaně použít předchozích výsledků (integrál bude konvergentní v případě konvergence všech dílčích integrálů).

Příklad 5.6.

$$a) \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 4 \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - \sqrt{1-x}) = 4.$$

$$b) \int_0^1 \frac{1}{x^m} dx \quad \text{konverguje (diverguje) pro} \quad 0 \leq m < 1 \quad (m > 1).$$

$$c) \int_0^\pi \frac{dx}{1+2\cos(x)}, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \dots \text{divergují}$$

Poznámka 5.7. V podrobnějších textech (například lit. [1,4,7]) najdeme srovnávací kritéria pro rozhodování o konvergenci či divergenci nevlastních integrálů, která nám někdy zjednoduší takové rozhodování. Je tam také zaveden absolutně konvergentního nevlastního integrálu (existuje integrál z funkce i její absolutní hodnoty - nepatří tam např. konvergentní integrál $\int_a^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$, $a > 0$.)

Také tam najdeme diskusi tzv. "hlavních hodnot (valeur principal)" nevlastních integrálů.

Poznámka 5.8. Pomocí Maclaurinova rozvoje můžeme dostat jeho integraci pro nevlastní integrál (Fresnel)

$$\int_0^x \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x} \left(1 - \frac{x^2}{5 \cdot 2!} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} - \frac{x^6}{13 \cdot 6!} + \dots \right), \quad x > 0.$$

Kontrolní otázky

1. Pro které funkce a jak je definován nevlastní integrál 1. nebo 2. druhu ?
2. Jak zjistíme konvergenci či divergenci nevlastních integrálů a jejich hodnotu ?
3. Pro které hodnoty parametru m konvergují či divergují nevlastní integrály $\int_1^{+\infty} x^{-m} dx$, $\int_0^1 x^{-m} dx$?

Úkoly k textu

- a) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací hyperboly $xy = 1$, $x > 1$ kolem osy x .
- b) Vypočítejte $\int_{-1}^1 x^{-2/3} dx$.
- c) Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}, \quad \int_0^{\pi/2} \tan(x) dx.$$

- d) Vypočítejte délku lemniskaty ($r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$).

Řešení

- a) π , b) 0, c) divergují
- d) $4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} \simeq a \cdot 5,244$.

Reference

- [1] I. Černý - M. Rokyta, *Differential and Integral Calculus of one Real Variable*. Praha, Karolinum 1998, ISBN 80-7184-661-9
- [2] I. Černý, *Úvod do inteligentního kalkulu I*. Academia 2002, ISBN 80/200-1017-3
- [3] B.P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment 2003. ISBN 80-7200-587-1
- [4] G.M.Fichtengolc, *Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija I-III*. Moskva 1962
- [5] P. Fuchs - V. Krupková, *Matematika I*. ÚM FEKT Brno (elektr. text).
- [6] A. Hlaváček, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. SPN Praha, 1965
- [7] V. Jarník, *Integrální počet*. Academia 1976, Praha
- [8] V. Mošová, *Matematická analýza I*. KI PřF UP Olomouc, 2002 (elektr. text)
- [9] V. Mádrová - J. Marek, *Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I*. PřF UP Olomouc, 2004. ISBN 80-244-0958-5
- [10] K. Rektorys, *Přehled užité matematiky*. Prometheus 2000, Praha. ISBN 80-7196-179-5
- [11] Žára J.- Beneš B. - Sochor J.- Felkel P., *Moderní počítačová grafika*. Computer Press 2004, ISBN 80-251-0454-0
- [12] Literatura k používání programových produktů Maple, Matlab, Mathematica .
- [13] Učební texty zpracované na jiných vysokých školách pro různé studijní obory.
- [14] Tabulky integrálů a speciálních funkcí (v celé řadě matematických příruček, knižních publikací).

6 Seznam obrázků

- obr. 1 Riemannův pravý součet pro funkci x^2
- obr. 2 Riemannův střední součet pro funkci $0.5 + x^2$
- obr. 3 a),b) - ilustrace věty o integrální střední hodnotě
- obr. 4 objem tělesa s přímkovým pláštěm a kruhovou plošinou
- obr. 5 objem klínu vzniklého při řezu válcem
- obr. 6 a) ds - element délky křivky b) nevhodná aproximace ds