

## Ukázka možného typu první zápočtové písemky (max. 20 bodů)

**1. (4 body)** Navrhněte přehledně (jednopáskový) Turingův stroj  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_F\})$  podle následující specifikace:  $Q = \{q_0, q_F, \dots\} \dots$  doplňte další stavy, které použijete.

$\Sigma = \{a, b\}$ .  $\Gamma = \{a, b, \square, \dots\} \dots$  doplňte další páskové symboly, které použijete.

Pro počáteční konfiguraci  $q_0 w$  (kde  $w \in \Sigma^*$ ) výpočet skončí v konfiguraci  $wwq_F$ .

Funkci  $\delta$  zapište **přehledně** jako sadu instrukcí;

místo  $\delta(q, x) = (q', y, d)$  pište  $(q, x) \rightarrow (q', y, d)$  (zde  $d \in \{-1, 0, +1\}$  určuje posun hlavy). Jedna z instrukcí, kterou zřejmě použijete, bude  $(q_0, \square) \rightarrow (q_F, \square, 0)$ . Nutné jsou **vysvětlující komentáře** umožňující snadno pochopit, jaký algoritmus vlastně realizujete. Nakonec ukažte výpočet vašeho stroje  $M$  na slově  $baa$ , jako posloupnost konfigurací  $q_0 baa \vdash \dots \vdash \dots \vdash baabaaq_F$ .

**2. (4 body)** Vysvětlete, jak lze Turingův stroj (TS)  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_+, q_-\})$  s oboustranně nekonečnou páskou simulovat strojem  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, \{q'_+, q'_-\})$  s jednostranně nekonečnou páskou (TS  $M'$  se tedy nesmí dostat do situace, kdy stojí na nejlevějším políčku pásky a  $\delta'$  by předepisovala posun hlavy doleva). Popište jasně ideu konstrukce  $M'$ , a pak podle času popište  $M'$  co nejpřesněji (tedy co budou  $Q', \Gamma', \delta' \dots$ , když jsou dány  $Q, \Gamma, \delta, \dots$ ).

**3. (3 body)** Dokažte, že množina  $\{0, 1\}^*$ , tedy množina všech konečných posloupností symbolů 0, 1, je nekonečná spočetná. Pak dokažte, že množina  $\{0, 1\}^\omega$ , tedy množina všech nekonečných posloupností symbolů 0, 1, je nespočetná.

**4. (6 bodů)** Uvažujte jazyk  $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ přijímá všechna } u \in \{0, 1\}^*\}$ .

(Symbolem  $\langle M \rangle$  označujeme dohodnutý kód stroje  $M$  ve zvolené abecedě. Můžeme se omezit na stroje se vstupní abecedou  $\{0, 1\}$ .)

a) Vysvětlete, co znamená tvrzení "Jazyk  $L$  není rekurzivní".

b) Dokažte, že jazyk  $L$  není rekurzivní. Můžete přitom vycházet z faktu, že jazyk  $L_{HP} = \{\langle M \rangle w \mid \text{výpočet } M \text{ na } w \text{ je konečný}\}$  není rekurzivní.

c) Vysvětlete, co znamená tvrzení "Jazyk  $L$  je rekurzivně spočetný".

**5. (3 body)** Uvažujme následující vlastnosti Turingových strojů (vlastnost je dána otázkou, na niž je odpověď buď ANO, tedy zadaný stroj  $M$  vlastnost má, nebo NE, tedy  $M$  vlastnost nemá):

a) Existuje vstup, pro nějž  $M$  provede alespoň 100 kroků?

b) Vydá  $M$  pro nějaký vstup řetězec 10001 jako výstup?

c) Zastaví se  $M$  na všechny vstupy?

d) Je mohutnost množiny stavů  $M$  prvočíslem?

e) Vydá  $M$  pro nějaký vstup jako výstup svůj kód?

Uveďte a zdůvodněte případy, u nichž plyne nerozhodnutelnost uvedené vlastnosti z Riceovy věty. Uveďte i případy, u nichž si nejste jisti (jsou-li jaké).