

KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

**MATEMATICKÁ ANALÝZA 2:
ŘEŠENÉ PŘÍKLADY KE CVIČENÍM**

DOC. RNDR. MIROSLAV KOLAŘÍK, PH.D.,

OLOMOUC 2026

Toto skriptum je určeno nejen studentům Katedry informatiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, ale i dalším zájemcům o studium matematické analýzy. Obsahuje řešené příklady, které odpovídají sylabu předmětu Matematická analýza 2. Věřím, že bude čtenářům užitečnou studijní pomůckou.

V Olomouci, 14. března 2026

Miroslav Kolařík

Poslední modifikace: 14. března 2026.

Chyby a překlepy, kterých si všimnete, pošlete prosím na e-mail: miroslav.kolarik@upol.cz

Obsah

1	Neurčité integrály	2
2	Určité integrály	7
3	Nevlastní integrály	11
4	Diferenciální rovnice	13
5	Metrické prostory	19
6	Diferenciální počet funkcí více proměnných	23
7	Integrální počet funkcí více proměnných	35

1 Neurčité integrály

Příklad 1: Vypočtete neurčitý integrál:

(a) $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3} \sin x + 5^x - \frac{\pi}{x} \right) dx$

(b) $\int \frac{x^3}{x-2} dx$.

Řešení: (a)

$$\begin{aligned} \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3} \sin x + 5^x - \frac{\pi}{x} \right) dx &= 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \sin x dx + \int 5^x dx - \pi \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \sin x + \frac{1}{3} \cos x + \frac{5^x}{\ln 5} - \pi \ln |x| + C, \end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

(b) Zadaný integrand nejprve vhodně upravíme tak, aby stupeň polynomu v čitateli byl menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Platí

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x-2} &= \frac{x^2(x-2) + 2x^2}{x-2} = x^2 + \frac{2x(x-2) + 4x}{x-2} \\ &= x^2 + 2x + \frac{4(x-2) + 8}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}. \end{aligned}$$

Nyní již zadaný integrál snadno vypočítáme:

$$\int \frac{x^3}{x-2} dx = \int \left(x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln |x-2| + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

Příklad 2: Integrujte substitucí:

(a) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

(b) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3+1} dx$

(c) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

Řešení: (a) Integrál $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$ vypočítáme pomocí vhodné substituce. Položíme $u = \operatorname{arctg} x$, odkud $du = \frac{1}{1+x^2} dx$. Dosazením dostaneme:

$$\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{6} \sqrt[5]{(\operatorname{arctg} x)^6} + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

(b) S využitím vhodné zvolené substituce dostaneme:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt{x^3+1} dx &= \left[\begin{array}{l} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3+1)^3} + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x \\ du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right] \\ &= \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Příklad 3: Integrujte metodou per partes:

(a) $\int (x^2 + 3x)e^x dx$

(b) $\int (x^2 + 2x) \cos x dx$

(c) $\int x^2 \ln x dx$.

Řešení: (a) Pro výpočet integrálu $\int (x^2 + 3x)e^x dx$ použijeme metodu per partes s volbou $u = x^2 + 3x$ a $v' = e^x$, odkud plyne, že $u' = 2x + 3$ a $v = e^x$. Získáme

$$\int (x^2 + 3x)e^x dx = (x^2 + 3x)e^x - \int (2x + 3)e^x dx.$$

Integrál $\int (2x + 3)e^x dx$ vyřešíme opět metodou per partes, kde nyní volíme za $u = 2x + 3$ a $v' = e^x$, odkud $u' = 2$ a $v = e^x$. Je tedy

$$\int (2x + 3)e^x dx = (2x + 3)e^x - 2 \int e^x dx.$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x)e^x dx &= (x^2 + 3x)e^x - \int (2x + 3)e^x dx \\ &= (x^2 + 3x)e^x - \left((2x + 3)e^x - 2 \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x + 3x e^x - 2x e^x - 3e^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 + x - 1)e^x + C,\end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

(b) Metodu per partes aplikujeme opět dvakrát:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 2x) \cos x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 + 2x & v' = \cos x \\ u' = 2x + 2 & v = \sin x \end{array} \right] \\ &= (x^2 + 2x) \sin x - \int (2x + 2) \sin x dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = 2x + 2 & v' = \sin x \\ u' = 2 & v = -\cos x \end{array} \right] \\ &= (x^2 + 2x) \sin x - \left[(2x + 2)(-\cos x) + \int 2 \cos x dx \right] \\ &= (x^2 + 2x - 2) \sin x + (2x + 2) \cos x + C,\end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

(c) Máme:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \left[\begin{array}{ll} u' = x^2 & v = \ln x \\ u = \frac{x^3}{3} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Příklad 4: Integrujte s využitím rozkladu na parciální zlomky:

(a) $\int \frac{5x+7}{x^2+2x-3} dx$

(b) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2} dx$

(c) $\int \frac{35x-10}{(x+2)(x^2+36)} dx$.

Řešení: (a) Chceme rozložit zlomek $\frac{5x+7}{x^2+2x-3}$ na parciální zlomky. Nejprve faktorizujeme jmenovatel:

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

Nyní napíšeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{5x+7}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Vhodnými algebraickými úpravami zjistíme hodnoty reálných koeficientů A a B . Po vynásobení obou stran poslední rovnice výrazem $(x-1)(x+3)$ získáme:

$$5x+7 = A(x+3) + B(x-1).$$

Odtud nyní volbou $x = 1$ a následně pro $x = -3$ obdržíme hodnoty koeficientů A a B .

$$\text{Pro } x = 1 \text{ máme: } 5 + 7 = 4A, \text{ odkud } A = 3.$$

$$\text{Pro } x = -3 \text{ máme: } -15 + 7 = -4B, \text{ odkud } B = 2.$$

Vypočítané hodnoty koeficientů dosadíme a vypočítáme integrál ze zadání:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{x^2+2x-3} dx &= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \right) dx \\ &= 3 \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= 3 \ln|x-1| + 2 \ln|x+3| + C, \end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

(b) Zřejmě platí, že

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2} dx = \int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2} dx + \int \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

V prvním integrálu je integrandem zlomek, kde je čitatel derivací jmenovatele a tedy

$$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2} dx = \ln|x^3+x^2| + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Druhý integrál vyřešíme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Vynásobíme obě strany poslední rovnice výrazem $x^2(x+1)$ a dostaneme rovnost dvou polynomů

$$1 = A(x^2+x) + B(x+1) + Cx^2. \quad (1)$$

Odtud pro $x = -1$ máme $1 = C(-1)^2$ a tedy $C = 1$. Dále, porovnáním koeficientů u x^2 v (1) obdržíme

$$0 = A + C,$$

odkud $A = -1$. Při volbě $x = 0$ v (1) dostaneme $B = 1$.

Je tedy

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dohromady pak

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2} dx = \ln|x^3 + x^2| - \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C = \ln|x \cdot (x+1)^2| - \frac{1}{x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

(c) Integrál

$$\int \frac{35x - 10}{(x+2)(x^2+36)} dx$$

vyřešíme rozkladem na parciální zlomky. Protože jmenovatel obsahuje jeden lineární a jeden ireducibilní kvadratický činitel, hledáme rozklad ve tvaru

$$\frac{35x - 10}{(x+2)(x^2+36)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+36}.$$

Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $(x+2)(x^2+36)$ dostaneme

$$35x - 10 = A(x^2 + 36) + (Bx + C)(x + 2).$$

Koeficient A určíme výhodnou volbou $x = -2$. Dostáváme

$$35(-2) - 10 = A((-2)^2 + 36) + (B(-2) + C) \cdot 0,$$

tedy

$$-70 - 10 = 40A,$$

odkud

$$A = -2.$$

Nyní pravou stranu rozepíšeme:

$$35x - 10 = A(x^2 + 36) + (Bx + C)(x + 2) = Ax^2 + 36A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C,$$

tedy

$$35x - 10 = (A + B)x^2 + (2B + C)x + (36A + 2C).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ 2B + C &= 35, \\ 36A + 2C &= -10. \end{aligned}$$

Protože již víme, že $A = -2$, z první rovnice dostaneme

$$-2 + B = 0,$$

odkud

$$B = 2.$$

Ze druhé rovnice pak plyne

$$2 \cdot 2 + C = 35,$$

tedy

$$C = 31.$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{35x - 10}{(x + 2)(x^2 + 36)} = \frac{-2}{x + 2} + \frac{2x + 31}{x^2 + 36}.$$

Nyní již integrujeme:

$$\begin{aligned} \int \frac{35x - 10}{(x + 2)(x^2 + 36)} dx &= \int \left(\frac{-2}{x + 2} + \frac{2x + 31}{x^2 + 36} \right) dx \\ &= -2 \int \frac{1}{x + 2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 36} dx + 31 \int \frac{1}{x^2 + 36} dx. \end{aligned}$$

Jednotlivé integrály spočítáme zvlášť:

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{1}{x + 2} dx &= -2 \ln |x + 2| + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\ \int \frac{2x}{x^2 + 36} dx &= \ln(x^2 + 36) + C_2, C_2 \in \mathbb{R} \\ 31 \int \frac{1}{x^2 + 36} dx &= \frac{31}{36} \int \frac{1}{(\frac{x}{6})^2 + 1} dx = \frac{31}{6} \arctan \frac{x}{6} + C_3, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dohromady tedy dostáváme

$$\int \frac{35x - 10}{(x + 2)(x^2 + 36)} dx = -2 \ln |x + 2| + \ln(x^2 + 36) + \frac{31}{6} \arctan \frac{x}{6} + C,$$

kde $C_1 + C_2 + C_3 = C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

2 Určité integrály

Příklad 5: Vypočítejte určitý integrál:

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Řešení: Zřejmě

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 6:

Vypočítejte určitý integrál:

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Řešení: Nejprve v čitateli a ve jmenovateli vytkneme výraz $x + 1$, kterým následně zlomek zkrátíme. Poté provedeme dělení čitatele jmenovatelem tak, aby stupeň polynomu v čitateli byl menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Takto upravený výraz zintegrujeme. Máme tedy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1} dx &= \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 - x + 1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 3 \ln |x+1| \right]_0^1 = 3 \ln 2 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 7: Spočítejte určitý integrál

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx.$$

Řešení: Použijeme vzorec $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ a vypočteme:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2 x dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

Příklad 8: Spočítejte určitý integrál $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x dx$.

Řešení: Využijeme substituční metodu při níž transformujeme meze integrace:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \\ \sin 0 = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Příklad 9: Jaká je střední hodnota funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$?

Řešení: V souladu s teorií je střední hodnota μ funkce x^2 na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ následující:

$$\mu = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Příklad 10: Během jednoho dne byly naměřeny teploty, které byly aproximovány funkcí

$$T(t) = 20 + 10 \sin\left(\frac{\pi t}{24}\right).$$

Jaká byla v daný den průměrná teplota, jestliže funkce $T(t)$ udává teplotu v čase $t \in \langle 0, 24 \rangle$?

Řešení: Zadání příkladu vede k využití věty o střední hodnotě integrálního počtu. Hledanou průměrnou teplotu $\bar{T}$ vyjádříme pomocí určitého integrálu funkce $T(t)$:

$$\bar{T} = \frac{1}{24-0} \int_0^{24} T(t) dt.$$

Máme:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{24} \int_0^{24} \left(20 + 10 \sin\left(\frac{\pi t}{24}\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{24} \left[20t - \frac{240}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{24}\right) \right]_0^{24} \\ &= 20 + \frac{20}{\pi} \doteq 26,37. \end{aligned}$$

Průměrná teplota za den tedy byla přibližně 26,37 stupňů. S využitím spojitosti zadané funkce dodejme ještě, že (podle věty o střední hodnotě integrálního počtu) existuje alespoň jeden čas c v intervalu $\langle 0, 24 \rangle$, kdy byla teplota rovna průměrné teplotě za den.

Příklad 11: Vypočítejte obsah plochy ohraničené osou x a grafem funkce $f(x) = x^6$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Řešení: Na zadaném intervalu je funkce x^6 nezáporná. Proto můžeme obsah plochy S vypočítat pomocí určitého integrálu následovně:

$$S = \int_0^2 x^6 dx = \left[\frac{1}{7} x^7 \right]_0^2 = \frac{1}{7} (2^7 - 0^7) = \frac{128}{7}.$$

Zjistili jsme, že obsah plochy ohraničené osou x a grafem funkce $f(x) = x^6$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ je $\frac{128}{7}$.

Příklad 12: Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$.

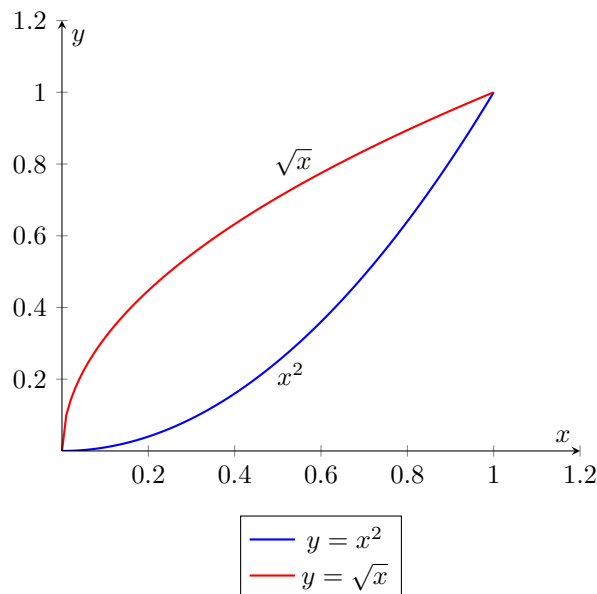
Řešení: Chceme vypočítat obsah obrazce ohraničeného funkcemi $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$. Pro určení intervalu integrace hledáme x -ové souřadnice bodů průsečíků obou funkcí:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x} \\ x^4 &= x \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \\ x(x-1)(x^2+x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice má právě dvě reálná řešení: $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$, což jsou příslušné x -ové souřadnice bodů průsečíků funkcí ze zadání. Získali jsme dolní a horní mez určitého integrálu, pomocí kterého vypočítáme obsah obrazce S integrací rozdílu funkcí v mezích od $x_1 = 0$ do $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme odečítali funkci x^2 od funkce $\sqrt{x}$, protože na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ pro každé x platí, že $\sqrt{x} \geq x^2$, viz Obr. 1. Obsah obrazce je $\frac{1}{3}$.



Obrázek 1: Funkce $y = x^2$ a funkce $y = \sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

Příklad 13: Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $y = \frac{1}{x}$ a $y = 6 - 5x$.

Řešení: Nejprve vypočítáme x -ové souřadnice společných bodů obou zadaných funkcí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 6 - 5x \\ 1 &= 6x - 5x^2 \\ 5x^2 - 6x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

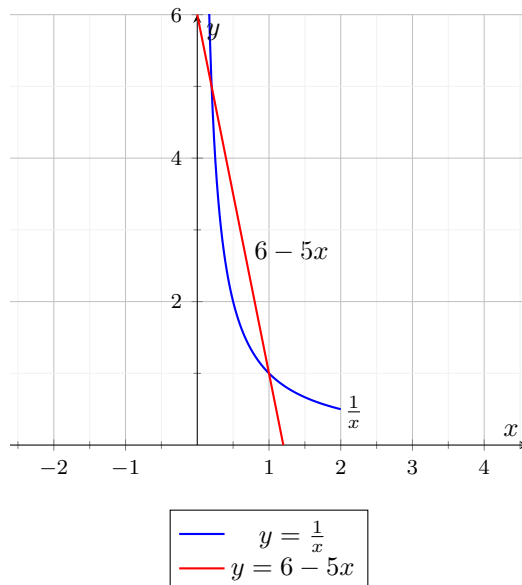
Řešením poslední (kvadratické) rovnice je dvojice reálných čísel x_1 a x_2 , kde

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10}.$$

Odtud $x_1 = \frac{1}{5}$ a $x_2 = 1$. Získali jsme dolní a horní mez integrace. Situaci zachycuje Obr. 2.

Pro hledaný obsah S máme:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{5}}^1 \left(6 - 5x - \frac{1}{x} \right) dx = \left[6x - \frac{5x^2}{2} - \ln|x| \right]_{\frac{1}{5}}^1 \\ &= \left(6 - \frac{5}{2} - \ln 1 \right) - \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{10} - \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{5} + \ln \frac{1}{5} \doteq 0,790562. \end{aligned}$$



Obrázek 2: Grafy funkcí $y = \frac{1}{x}$ a $y = 6 - 5x$.

Obsah obrazce je přibližně 0,790562.

Příklad 14: Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $f(x) = x^2$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Řešení: Pro výpočet objemu použijeme vzorec:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

kde a a b jsou krajní body intervalu rotace. V našem případě tedy platí $a = 0$ a $b = 2$. Dosazením funkce $f(x) = x^2$ dostaneme:

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \cdot \frac{1}{5} [x^5]_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Objem rotačního tělesa je $\frac{32\pi}{5}$.

Příklad 15: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací přímky $y = 3x - 2$ kolem osy x na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$.

Řešení: Objem V spočítáme pomocí vzorce pro výpočet objemu rotačního tělesa:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

kde $f(x) = 3x - 2$, dolní mez $a = 1$, horní mez $b = 3$. Dosadíme do vzorce a spočítáme určitý integrál:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 (3x - 2)^2 dx = \pi \int_1^3 (9x^2 - 12x + 4) dx = \pi [3x^3 - 6x^2 + 4x]_1^3 \\ &= \pi [(81 - 54 + 12) - (3 - 6 + 4)] = \pi [39 - 1] = 38\pi. \end{aligned}$$

Objem tělesa je 38π .

3 Nevlastní integrály

Příklad 16: Vypočítejte nevlastní integrály vlivem meze a rozhodněte o jejich konvergenci a divergenci:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$.

Řešení:

(a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Integrál konverguje.

(b)

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} [\ln |x|]_s^{-1} = \lim_{s \rightarrow -\infty} (\ln 1 - \ln |s|) = -\infty.$$

Integrál diverguje.

(c) Daný integrál nejprve rozdělíme na součet dvou nevlastních integrálů:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx.$$

Vypočítáme první nevlastní integrál:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \int_a^0 \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \cdot \left[2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\arctan(0) - \arctan\left(\frac{a}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Analogicky vypočítáme i druhý nevlastní integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{4+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(0) \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Dohromady máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

odkud ihned vyplývá, že zadaný integrál konverguje.

Příklad 17: Vypočítejte nevlastní integrály vlivem funkce a rozhodněte o jejich konvergenci a divergenci:

(a) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int_{-3}^0 \frac{1}{x^2} dx$.

Řešení:

(a)

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^3 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^3 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{a}) = 2\sqrt{3}$$

Integrál je konvergentní.

(b)

$$\int_{-3}^0 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-3}^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-3}^b = \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{b} - \frac{1}{3} \right) = +\infty$$

Integrál je divergentní.

4 Diferenciální rovnice

Příklad 18: Metodou separace proměnných vyřešte diferenciální rovnici:

$$y' = \frac{1}{t} \cdot (2y + 1).$$

Po získání obecného řešení, načrtněte do grafu několik integrálních křivek obecného řešení.

Řešení: Ze zadání je jasné, že $t \neq 0$. Přepíšeme rovnici jako separovatelnou. Máme

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \cdot (2y + 1),$$

odkud je pro $y \neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{2y + 1} = \frac{dt}{t}.$$

Integrujeme obě strany a provedeme vhodné úpravy, abychom získali obecné řešení:

$$\int \frac{1}{2y + 1} dy = \int \frac{1}{t} dt$$

$$\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = \ln |t| + \ln |C_1|, \quad \text{kde reálná konstanta } C_1 \neq 0$$

$$\ln |2y + 1| = \ln |C_2| t^2, \quad \text{kde } C_2 \neq 0$$

$$|2y + 1| = |C_2| t^2$$

$$2y + 1 = C_3 t^2, \quad \text{kde } C_3 \neq 0$$

$$y = C_4 t^2 - \frac{1}{2}, \quad \text{kde } C_4 \neq 0.$$

Snadno ověříme, že $y = -\frac{1}{2}$ je řešením zadané diferenciální rovnice. Proto má obecné řešení následující tvar:

$$y(t) = C t^2 - \frac{1}{2}, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

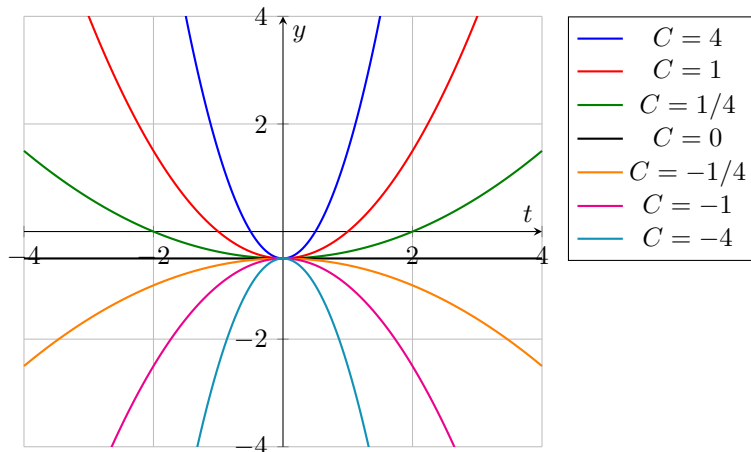
Na závěr ještě zobrazíme graf partikulárních řešení pro některé konkrétní hodnoty konstanty C , viz Obr. 3.

Snadno nahlédneme, že každá integrální křivka „prochází“ bodem $V = [0, -\frac{1}{2}]$, který ale nemůže být součástí žádného řešení, protože $t \neq 0$. Je-li $C > 0$ pak je odpovídající integrální křivka konvexní parabolou s vrcholem v bodě V (ale bez bodu V). Pro $C = 0$ je integrální křivka přímkou (bez bodu V) rovnoběžnou s osou t a pro $C < 0$ je každá integrální křivka konkávní parabolou s vrcholem v bodě V (ale opět bez bodu V).

Příklad 19: Je dána následující diferenciální rovnice, která popisuje růst populace:

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

kde $P(t)$ je kladný počet jedinců v populaci v čase t a r je konstanta označující rychlost růstu populace. Rovnici vyřešte a určete, kolik bude jedinců po 200 dnech, jestliže jejich počáteční počet je 100 a rychlost růstu je $r = 0,06$ za den.



Obrázek 3: Graf obecného řešení s vybranými integrálními křivkami.

Řešení: Jedná se o separovatelnou rovnici. Nejprve oddělíme proměnné:

$$\frac{dP}{P} = r dt.$$

Integrací obou stran obdržíme:

$$\ln |P| = rt + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po úpravách máme:

$$P(t) = Ce^{rt},$$

kde C je libovolná reálná konstanta. Určíme ji z počáteční podmínky $P(0) = 100$:

$$100 = Ce^0 \implies C = 100.$$

Partikulární řešení zahrnující naši počáteční podmínku má tedy tvar:

$$P(t) = 100 \cdot e^{rt}.$$

Nyní dosadíme zadané hodnoty $r = 0,06$ a $t = 200$:

$$P(200) = 100 \cdot e^{0,06 \cdot 200} = 100 \cdot e^{12} \doteq 16\,275\,479.$$

Po 200 dnech bude mít populace přibližně 16 275 479 jedinců.

Příklad 20: Metodou variace konstanty vyřešte pro $t \neq 0$ následující nehomogenní lineární diferenciální rovnici:

$$y' - \frac{3y}{t} = t.$$

Řešení: Jedná se o lineární rovnici 1. řádu ve tvaru:

$$y' + p(t)y = q(t), \text{ kde } p(t) = -\frac{3}{t}, \quad q(t) = t.$$

V prvním kroku vyřešíme příslušnou homogenní rovnici:

$$y' - \frac{3}{t}y = 0.$$

Tuto rovnici řešíme jako separovatelnou:

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{t} dt \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{t} dt,$$

$$\ln |y| = 3 \ln |t| + K_1 \implies y = Kt^3.$$

Tedy obecné řešení homogenní rovnice je pro $K \in \mathbb{R}$ ve tvaru $y_h(t) = Kt^3$.

Ve druhém kroku budeme dále postupovat podle metody variace konstanty. Na konstantu K budeme nyní nahlížet jako na funkci proměnné t .

Předpokládáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru:

$$y(t) = K \cdot t^3.$$

Toto řešení dosadíme do původní rovnice:

$$K'(t) \cdot t^3 + K \cdot 3t^2 - \frac{3}{t}(K \cdot t^3) = t,$$

která se zjednoduší na:

$$K'(t) \cdot t^3 = t \implies K'(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Integrací získáme:

$$K(t) = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Výsledné řešení již snadno dopočítáme:

$$y(t) = K(t) \cdot t^3 = \left(-\frac{1}{t} + C\right) \cdot t^3 = -t^2 + Ct^3.$$

Obecné řešení rovnice je pro libovolnou reálnou konstantu C ve tvaru: $y(t) = Ct^3 - t^2$.

Příklad 21: Využitím vhodných substitucí převed'te zadané diferenciální rovnice

(a) $3tyy' = y^2 - t^2$

(b) $y' = \frac{t-3y+2}{2t+y-1}$.

na rovnice, kde se dají separovat proměnné. Nalezené rovnice dále neřešte.

Řešení:

(a) Máme rovnici

$$3tyy' = y^2 - t^2.$$

Nejprve vydělíme obě strany výrazem $3ty$ (pro $t \neq 0$ a $y \neq 0$; případy $y = 0$ a $t = 0$ je třeba ověřit zvlášť):

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{3ty}.$$

Tuto rovnici převedeme na homogenní diferenciální rovnici:

$$y' = \frac{\frac{y^2}{t^2} - 1}{3 \frac{y}{t}}.$$

Uplatníme substituci

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \implies y = tz.$$

Potom

$$y' = z + tz'.$$

Dosadíme do výrazu pro y' :

$$z + tz' = \frac{z^2 - 1}{3z}.$$

Odečteme z od obou stran rovnice a pravou stranu upravíme na jeden zlomek:

$$tz' = \frac{-2z^2 - 1}{3z}.$$

Tuto rovnici lze upravit do tvaru se separovanými proměnnými:

$$\frac{3z}{2z^2 + 1} dz = -\frac{1}{t} dt.$$

(b) Máme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{t - 3y + 2}{2t + y - 1}.$$

Chceme odstranit konstantní členy v čitateli a jmenovateli. Proto zavedeme substituce

$$T = t - a, \quad Y = y - b.$$

Po dosazení $t = T + a$, $y = Y + b$ dostaneme čítelel

$$(T + a) - 3(Y + b) + 2 = T - 3Y + (a - 3b + 2)$$

a jmenovatel

$$2(T + a) + (Y + b) - 1 = 2T + Y + (2a + b - 1)$$

. Chceme, aby

$$\begin{aligned} a - 3b + 2 &= 0 \\ 2a + b - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{5}{7}$. Zjistili jsme, že

$$T = t - \frac{1}{7}, \quad Y = y - \frac{5}{7}.$$

Zadaná rovnice se zjednoduší na tvar

$$\frac{dY}{dT} = \frac{T - 3Y}{2T + Y},$$

odkud

$$\frac{dY}{dT} = \frac{1 - 3\frac{Y}{T}}{2 + \frac{Y}{T}}.$$

Tato rovnice je již homogenní, proto dále použijeme standardní substituci

$$z = \frac{Y}{T} \quad (T \neq 0), \quad Y = zT.$$

Pak

$$\frac{dY}{dT} = z + T \frac{dz}{dT}.$$

Dosadíme do rovnice:

$$z + T \frac{dz}{dT} = \frac{1 - 3z}{2 + z}.$$

Izolujeme $T \frac{dz}{dT}$:

$$T \frac{dz}{dT} = \frac{1 - 3z}{2 + z} - z = \frac{1 - 3z - z(2 + z)}{2 + z} = \frac{1 - 5z - z^2}{2 + z}.$$

Tudíž dostáváme diferenciální rovnici, ve které lze separovat proměnné:

$$\frac{2 + z}{1 - 5z - z^2} dz = \frac{dT}{T}.$$

Tuto separovatelnou rovnici dále neřešíme.

Příklad 22: Využitím vhodné substituce převed'te diferenciální rovnici $y' + y + y^2 e^t$ na rovnici lineární, kterou dále neřešte.

Řešení: Rovnice

$$y' + y + y^2 e^t = 0$$

má tvar Bernoulliho rovnice $y' + P(t)y = Q(t)y^n$, kde $P(t) = 1$, $Q(t) = -e^t$, $n = 2$. Proto použijeme substituci

$$u = y^{1-n} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Spočteme u' . Platí

$$u' = -y^{-2}y'.$$

Nyní vynásobíme původní rovnici výrazem $-y^{-2}$:

$$-y^{-2}y' - y^{-1} - e^t = 0.$$

Použijeme $-y^{-2}y' = u'$ a $y^{-1} = u$ a dostaneme lineární rovnici pro u :

$$u' - u = e^t.$$

Příklad 23: Odhadněte stáří kosti metodou radiokarbonového datování. Poločas rozpadu izotopu ^{14}C je přibližně $T_{1/2} = 5730$ let. Měřením bylo zjištěno, že vzorek kosti obsahuje jen 35 % původního množství izotopu ^{14}C . Předpokládejte exponenciální rozpad a určete stáří vzorku.

Řešení: Radioaktivní rozpad popisuje obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

kde $N(t)$ je počet jader izotopu ^{14}C v čase t a $\lambda > 0$ je rozpadová konstanta.

Řešení této rovnice je

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počáteční množství izotopu ^{14}C v době vzniku organismu.

Rozpadová konstanta λ je spojena s poločasem $T_{1/2}$ vztahem

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Z podmínky měření $N/N_0 = 0,35$ dostaneme rovnici pro stáří t :

$$0,35 = e^{-\lambda t} \implies t = -\frac{1}{\lambda} \ln(0,35).$$

Dosadíme $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$:

$$t = -\frac{5730}{\ln 2} \ln(0,35).$$

Výpočtem zjistíme, že

$$t \doteq 8678,5 \text{ let.}$$

Podle tohoto modelu je stáří zkoumaného vzorku kosti přibližně 8,7 tisíc let.

Dodejme, že tento výpočet předpokládá konstantní počáteční obsah izotopu ^{14}C v atmosféře a zanedbává další možné korekce (izotopová frakcionace, změny koncentrace ^{14}C v čase, kontaminaci vzorku apod.), které se v praxi musí zohlednit. Výsledek je tedy orientační.

5 Metrické prostory

Příklad 24: Necht' X je množina všech řetězců binárních čísel délky $n \in \mathbb{N}$. Definujme dále zobrazení $d(x, y) : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jako počet indexů, na kterých se řetězce x a y liší. Ukažte, že dvojice (X, d) je metrický prostor.

Řešení: Prokážeme splnění definičních podmínek metrického prostoru:

- totožnost: $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$
- symetrie: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- trojúhelníková nerovnost: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Totožnost je zřejmá z definice metriky. Ukážeme splnění podmínek symetrie a trojúhelníkové nerovnosti. Označme $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Symetrie: pro $x, y \in X$ platí $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d(y, x)$.

Trojúhelníková nerovnost: pro $x, y, z \in X$ platí

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Jsou splněny všechny tři definiční podmínky metrického prostoru, a proto je dvojice (X, d) metrickým prostorem.

Příklad 25: Ověřte, že $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ je metrika na $\mathbb{R}$.

Řešení: Funkce ρ je nezáporná:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \rho(x, y) \geq 0,$$

protože $|x - y| \geq 0$ a funkce $\ln(1 + t)$ je definovaná a nezáporná pro $t \geq 0$.

Ověříme, že funkce ρ splňuje příslušné tři axiomy metrického prostoru.

1. axiom totožnosti (nulová vzdálenost pouze pro shodné body):

$$\rho(x, y) = 0 \iff \ln(1 + |x - y|) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y.$$

2. axiom symetrie:

$$\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|) = \ln(1 + |y - x|) = \rho(y, x).$$

3. trojúhelníková nerovnost: Je třeba ověřit, že

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \text{tj.} \quad \ln(1 + |x - z|) \leq \ln(1 + |x - y|) + \ln(1 + |y - z|).$$

K tomu použijeme vlastnost logaritmu:

$$\ln(1 + |x - y|) + \ln(1 + |y - z|) = \ln[(1 + |x - y|)(1 + |y - z|)].$$

Stačí tedy ověřit:

$$1 + |x - z| \leq (1 + |x - y|)(1 + |y - z|).$$

Využijeme trojúhelníkovou nerovnost pro absolutní hodnotu:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \implies 1 + |x - z| \leq 1 + |x - y| + |y - z|.$$

Na druhé straně:

$$(1 + |x - y|)(1 + |y - z|) = 1 + |x - y| + |y - z| + |x - y||y - z| \geq 1 + |x - y| + |y - z|.$$

Máme:

$$1 + |x - z| \leq (1 + |x - y|)(1 + |y - z|),$$

což po aplikaci logaritmu zachovává nerovnost, protože logaritmus je rostoucí funkce.

Prokázali jsme, že funkce $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ splňuje všechny tři definiční axiomy metriky na $\mathbb{R}$, a proto je metrikou na $\mathbb{R}$.

Příklad 26: Zdůvodněte, která z následujících tří zobrazení nejsou metriky na $\mathbb{R}$:

$$\rho_a(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \rho_b(x, y) = \ln(1 - y + x), \quad \rho_c(x, y) = 3^{|x - y|} - 1.$$

Řešení: (a) $\rho_a(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2 + 1}$:

Pro $x \neq y$ je $\rho_a(x, y) \neq \rho_a(y, x)$. Například $\rho_a(0, 2) = \frac{2}{5} \neq -\frac{2}{5} \rho_a(2, 0)$. Tedy ρ_a nesplňuje axiom symetrie a není metrikou na $\mathbb{R}$.

(b) $\rho_b(x, y) = \ln(1 - y + x)$:

Argument logaritmu musí být kladný, což je ale porušeno, pokud $y \geq x + 1$. Funkce ρ_b tedy není obecně definovaná na celé množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a nemůže proto být metrikou na $\mathbb{R}$.

(c) $\rho_c(x, y) = 3^{|x - y|} - 1$:

Funkce ρ_c také není metrikou na $\mathbb{R}$, protože nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost, což ukážeme na následujícím příkladě. Vyberme konkrétní body, například $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$. Pak

$$\rho_c(0, 2) \not\leq \rho_c(0, 1) + \rho_c(1, 2),$$

neboť

$$\rho_c(0, 2) = 3^{|0 - 2|} - 1 = 3^2 - 1 = 8 \not\leq \rho_c(0, 1) + \rho_c(1, 2) = (3^1 - 1) + (3^1 - 1) = 4.$$

Příklad 27: Určete vzdálenost bodů $X = [1, 1, 2]$ a $Y = [4, 3, 1]$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

Řešení: Vzdálenost bodů X a Y budeme počítat v metrických prostorech $(\mathbb{R}^3, \rho_i)$ postupně pro $i = 1$, $i = 2$ a $i = \infty$. Pro $X = [x_1, x_2, x_3]$ a $Y = [y_1, y_2, y_3]$ platí:

$$\begin{aligned} \rho_1(X, Y) &= \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i| \\ \rho_2(X, Y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2} \\ \rho_\infty(X, Y) &= \max\{|x_i - y_i|; i = 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Dosažením konkrétních souřadnic bodů do definičních vzorců dostaneme:

$$\begin{aligned}\rho_1(X, Y) &= |1 - 4| + |1 - 3| + |2 - 1| = 3 + 2 + 1 = 6 \\ \rho_2(X, Y) &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (1 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14} \\ \rho_\infty(X, Y) &= \max\{|1 - 4|, |1 - 3|, |2 - 1|\} = \max\{3, 2, 1\} = 3.\end{aligned}$$

Vzdálenost bodů X a Y je v součtové metrice rovna 6, v euklidovské metrice je rovna $\sqrt{14}$ a v maximální metrice je rovna 3.

Příklad 28: Na uzavřeném reálném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ určete vzdálenost reálných funkcí $f(x) = e^x$ a $g(x) = \frac{x}{3}$ v metrice stejnoměrné konvergence ρ_C a v integrální metrice ρ_I .

Řešení: Pro spojitě reálné funkce $f(x)$, $g(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ definujeme:

$$\begin{aligned}\rho_C(f, g) &= \max\{|f(x) - g(x)|; x \in \langle a, b \rangle\} \\ \rho_I(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.\end{aligned}$$

Odtud po dosažení hodnot ze zadání obdržíme:

$$\begin{aligned}\rho_C(f, g) &= \max\{|e^x - \frac{x}{3}|; x \in \langle 0, 1 \rangle\} = e - \frac{1}{3} \doteq 2,385 \\ \rho_I(f, g) &= \int_0^1 (e^x - \frac{x}{3}) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = e - \frac{1}{6} \doteq 2,552.\end{aligned}$$

Vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je v metrice stejnoměrné konvergence přibližně 2,385 a v integrální metrice je přibližně 2,552.

Příklad 29: Na množině reálných čísel uvažujme pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ metriku $\rho(x, y) = |x - y|$. Jaký je průměr množin A a B , je-li $A = (-7; -3)$ a $B = (2; 4)$? Jaká je vzdálenost množin A a B ?

Řešení: Pro průměry množin A a B je zřejmé:

$$\begin{aligned}d(A) &= \sup\{\rho(x, y); x, y \in A\} = 4 \\ d(B) &= \sup\{\rho(x, y); x, y \in B\} = 2.\end{aligned}$$

Snadno určíme i vzdálenost množin A a B :

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y); x \in A, y \in B\} = 5.$$

Příklad 30: Na příkladu ukažte, že

- (a) sjednocení nekonečného systému uzavřených množin nemusí být uzavřená množina.
- (b) průnik nekonečného systému otevřených množin nemusí být otevřená množina.

Řešení:

(a) Pro přirozené číslo n stačí vzít množiny $A_n = \langle -3 + \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n} \rangle$. Nekonečným sjednocením těchto uzavřených intervalů je otevřený interval:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (-3; 2).$$

(b) Pro přirozené číslo n uvažujme množiny $B_n = (-\frac{1}{n}; \frac{5}{n})$. Nekonečným průnikem těchto otevřených intervalů není otevřená množina:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \{0\}.$$

Příklad 31: Necht' X je množina všech funkcí, které jsou spojité na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Definujme na X metriku d předpisem:

$$d(f, g) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x) - g(x)|.$$

Spočtete vzdálenost mezi funkcemi $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$.

Řešení: Využijeme definici metriky a dosadíme do ní konkrétní funkce f a g :

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |x^2 - x^3|.$$

Protože se jedná o spojitou funkci na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, nabývá na tomto intervalu maxima. Abychom toto maximum určili, nalezneme nejprve nulové body funkce $h(x) = x^2 - x^3$:

$$h'(x) = 2x - 3x^2.$$

Tento výraz položíme roven nule a dostaneme nulové body $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}$. Nyní stačí porovnat hodnoty funkce h v nulových bodech a v bodech na koncích intervalu. Máme

$$h(0) = 0, \quad h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}, \quad h(1) = 0.$$

Odtud:

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \max\left\{0, \frac{4}{27}, 0\right\} = \frac{4}{27}.$$

Vzdálenost mezi funkcemi $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$ v metrickém prostoru (X, d) je $\frac{4}{27}$.

Příklad 32: Mějme metrické prostory $(\{0, 1\}, d_1)$ a $(\{0, 1\}, d_2)$, kde d_1 a d_2 jsou definovány jako

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 1 & \text{pro } x \neq y, \end{cases} \quad d_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 2 & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

Uvažujme zobrazení $f : (\{0, 1\}, d_1) \rightarrow (\{0, 1\}, d_2)$ definované jako $f(x) = x$. Určete, zda je f izometrické zobrazení.

Řešení: Aby f bylo izometrické zobrazení, muselo by pro každé $x, y \in \{0, 1\}$ platit:

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Avšak, pokud vezmeme $x = 0$ a $y = 1$, pak $d_1(x, y) = d_1(0, 1) = 1$, a současně $d_2(f(0), f(1)) = d_2(0, 1) = 2$. Protože

$$d_2(f(0), f(1)) = 2 \neq 1 = d_1(0, 1),$$

není f izometrické zobrazení mezi $(\{0, 1\}, d_1)$ a $(\{0, 1\}, d_2)$.

6 Diferenciální počet funkcí více proměnných

Příklad 33: Vyšetřete definiční obor funkce

(a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \ln(1 - y^2)$

(b) $g(x, y) = \sqrt{\frac{1}{4 - x^2 - y^2}} + \ln(xy)$

a zobrazte jej v rovině.

Řešení: (a) Výraz pod druhou odmocninou musí být nezáporný a argument logaritmu musí být kladný:

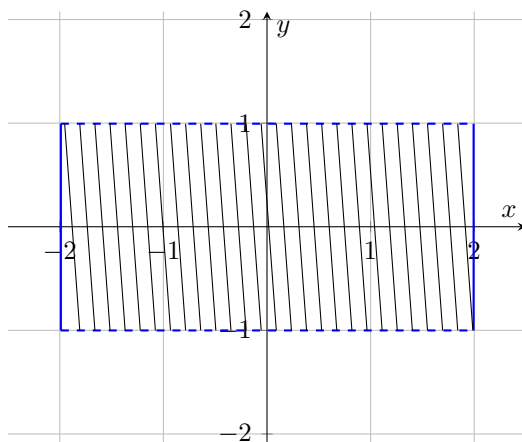
$$4 - x^2 \geq 0,$$

$$1 - y^2 > 0.$$

První nerovnost po úpravě dává $|x| \leq 2$, tedy $-2 \leq x \leq 2$. Druhá nerovnost po úpravě dává $-1 < y < 1$. Z toho dostáváme definiční obor funkce $f(x, y)$ jako

$$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle -2, 2 \rangle, y \in (-1, 1)\}.$$

Nakonec zobrazíme vypočítaný definiční obor v rovině, viz Obr. 4:



Obrázek 4: Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \ln(1 - y^2)$

(b) Aby byla funkce

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{1}{4 - x^2 - y^2}} + \ln(xy)$$

definována, musí být splněny podmínky pro existenci druhé odmocniny a logaritmu.

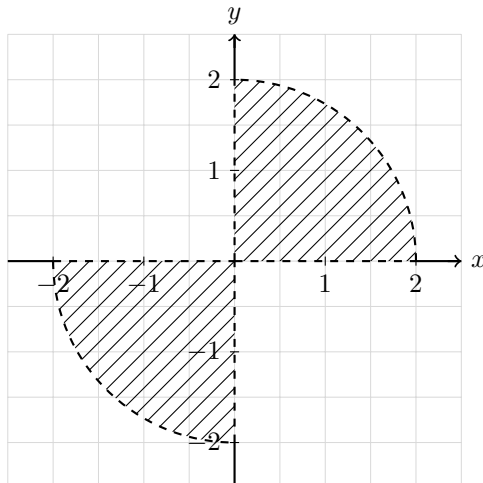
Výraz pod druhou odmocninou musí být nezáporný a také nelze dělit nulou. Proto musí být

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < 4.$$

Z podmínky pro logaritmus musí dále platit

$$xy > 0,$$

což znamená, že proměnné x a y jsou buď současně obě kladné, nebo jsou současně obě záporné.



Obrázek 5: Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{4-x^2-y^2}} + \ln(xy)$

Definiční obor funkce je tedy

$$D(g) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, xy > 0\}.$$

Jde o průnik otevřeného kruhu $x^2 + y^2 < 4$ s prvním a třetím kvadrantem, viz Obr. 5:

Příklad 34: Spočtete gradient funkce $f(x, y) = \frac{2x+y}{x-3y}$ v bodě $A = [5, 1]$.

Řešení: Nejprve spočteme obě parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2(x-3y) - (2x+y)}{(x-3y)^2} = \frac{-7y}{(x-3y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x-3y) - (2x+y)(-3)}{(x-3y)^2} = \frac{7x}{(x-3y)^2}. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $x = 5$ a $y = 1$, čímž získáme hodnoty parciálních derivací v bodě A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(5, 1) &= \frac{-7 \cdot 1}{(5 - 3 \cdot 1)^2} = -\frac{7}{4} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(5, 1) &= \frac{7 \cdot 5}{(5 - 3 \cdot 1)^2} = \frac{35}{4}. \end{aligned}$$

Gradient funkce $f(x, y)$ v bodě $A = [5, 1]$ je tedy $\nabla f(5, 1) = \left(-\frac{7}{4}, \frac{35}{4}\right)$.

Příklad 35: Pro funkci $f(x, y) = x \ln(xy)$ spočtete f'''_{xxy} a f'''_{xyy} .

Řešení: Chceme spočítat parciální derivace třetího řádu pro funkci $f(x, y) = x \ln(xy)$. Nejprve spočítáme parciální derivaci prvního řádu podle proměnné x , přičemž derivujeme podle vzorce pro součin dvou funkcí. Máme:

$$f'_x = 1 \cdot \ln(xy) + x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \ln(xy) + 1.$$

Odtud dále vypočítáme potřebné druhé parciální derivace, tedy f''_{xx} a f''_{xy} :

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \left(\ln(xy) + 1 \right)'_x = \frac{1}{xy} \cdot y + 0 = \frac{1}{x} \\ f''_{xy} &= \left(\ln(xy) + 1 \right)'_y = \frac{1}{xy} \cdot x + 0 = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Odsud již snadno dopočítáme požadované třetí parciální derivace:

$$\begin{aligned} f'''_{xxy} &= \left(\frac{1}{x} \right)'_y = 0 \\ f'''_{xyy} &= \left(\frac{1}{y} \right)'_y = -\frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

Příklad 36: Vypočítejte limity

(a)

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 y}{3x^4 + 2y^4},$$

(b)

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{25 + x^2 + y^2} - 5}{x^2 + y^2},$$

(c)

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} (x^2 + y + z) \cdot \cos \frac{3}{x} \cdot \sin \frac{1}{y^2} \cdot \sin z^2.$$

Řešení:

- (a) Jedná se o limitu typu nula děleno nulou. Ukážeme, že limita neexistuje. Použijeme k tomu metodu svazku přímk. Proměnná x se bude blížit limitně k nule a proměnná y se bude limitně blížit k nule po přímkách kx , kde $k \in \mathbb{R}$ je směrnice. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow kx} \frac{x^3 y}{3x^4 + 2y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{3x^4 + 2k^4 x^4} = \frac{k}{3 + 2k^4}.$$

Vidíme, že po úpravách záleží výsledek na k . Limita proto neexistuje, protože pro různé hodnoty směrnice k obdržíme různé výsledky ve tvaru $\frac{k}{3+2k^4}$.

- (b) Opět se jedná o limitu typu nula děleno nulou, přímo dosadit tedy nemůžeme. Limitu budeme řešit rozšířením, aby po vhodných úpravách přešla na typ, kde lze nulové hodnoty pro proměnné x a y přímo dosadit. Platí:

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{25 + x^2 + y^2} - 5}{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{25 + x^2 + y^2} - 5}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{25 + x^2 + y^2} + 5}{\sqrt{25 + x^2 + y^2} + 5} = \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2) \cdot (\sqrt{25 + x^2 + y^2} + 5)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{\sqrt{25 + x^2 + y^2} + 5} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Tato limita tedy existuje a její hodnota je rovna $\frac{1}{10}$.

(c) Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} (x^2 + y + z) = 0.$$

Všimneme si dále, že

$$-1 \leq \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \cos \frac{3}{x} \cdot \sin \frac{1}{y^2} \cdot \sin z^2 \leq 1,$$

jelikož funkční hodnoty funkce sinus a funkce kosinus jsou vždy z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, což platí i pro součin těchto funkčních hodnot. Podle věty o limitách víme, že nulová limita vynásobena omezenou limitou dává nulovou limitu, odkud s využitím spojitosti

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} (x^2 + y + z) \cdot \cos \frac{3}{x} \cdot \sin \frac{1}{y^2} \cdot \sin z^2 = \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} (x^2 + y + z) \cdot \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \cos \frac{3}{x} \cdot \sin \frac{1}{y^2} \cdot \sin z^2 = 0.$$

Příklad 37: Určete body nespojitosti funkcí

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y + 2}{x^2 - y^2}$

(b) $f(x, y, z) = e^{\frac{3}{x+2}} \cdot \ln y^2 \cdot \cos \frac{2}{z-\pi}.$

Řešení:

- (a) Polynomy $x^2 - 3y + 2$, $x^2 - y^2$ jsou spojitě v celé rovině, tedy pro libovolné reálné hodnoty proměnných x a y . Zadaná funkce $f(x, y)$ proto není spojitá jen v bodech, ve kterých není definována, tj. když $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$. Body, v nichž funkce $f(x, y)$ není spojitá tvoří dvě přímky dané rovnicemi $y = x$ a $y = -x$.
- (b) Exponenciální funkce, logaritmická funkce a funkce kosinus jsou spojitě na jejich definičních oborech. Součinem spojitých funkcí je spojitá funkce. Body nespojitosti u zadané funkce $f(x, y, z)$ jsou proto pouze ty, pro které zmíněné tři funkce nejsou definovány. Dostáváme tak, že $x \neq -2$, $y \neq 0$ a $z \neq \pi$. Body nespojitosti pro funkci $f(x, y, z)$ tak leží výhradně v rovinách daných rovnicemi: $x = -2$, $y = 0$ a $z = \pi$.

Příklad 38: Zjistěte, zda je funkce $f(x, y)$ spojitá v bodě $[0, 0]$, je-li

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Řešení: Aby zadaná funkce $f(x, y)$ byla spojitá v bodě $[0, 0]$, musí platit

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0,$$

tedy, že limita jdoucí k bodu $[0, 0]$ se rovná funkční hodnotě v tomto bodě: $f(0, 0) = 0$. S využitím metody svazku parabol ukážeme, že tomu tak není. K bodu $[0, 0]$ se budeme blížit po parabolách daných rovnicemi $y = kx^2$, kde x se blíží k nule. Výpočtem zjistíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + (kx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \cdot k}{x^4 \cdot (1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Výsledek této limity závisí na hodnotě reálného parametru k , a proto tato limita neexistuje. Odtud již přímo vyplývá, že zadaná funkce není spojitá v bodě $[0, 0]$.

Příklad 39: Podle definice (s využitím limitního zlomku) vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = x^2y$ v bodě $A = [2, 3]$ ve směru vektoru $\mathbf{u} = (1, -2)$.

Řešení: Podle definice je:

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t \cdot \mathbf{u}) - f(A)}{t},$$

což v našem případě dává:

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f([2, 3] + t \cdot (1, -2)) - f(2, 3)}{t}.$$

Vypočítáme bod:

$$[2, 3] + t \cdot (1, -2) = [2 + t, 3 - 2t]$$

a získané souřadnice dosadíme do funkce:

$$\begin{aligned} f(2 + t, 3 - 2t) &= (2 + t)^2 \cdot (3 - 2t) \\ &= (4 + 4t + t^2)(3 - 2t) \\ &= 12 - 8t + 12t - 8t^2 + 3t^2 - 2t^3 \\ &= 12 + 4t - 5t^2 - 2t^3. \end{aligned}$$

Dopočítáme ještě funkční hodnotu v bodě $A = [2, 3]$. Zřejmě je

$$f(2, 3) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nyní již známe všechny potřebné hodnoty a můžeme příklad dopočítat. Dosadíme do definice:

$$f'_{\mathbf{u}}(2, 3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{12 + 4t - 5t^2 - 2t^3 - 12}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t - 5t^2 - 2t^3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (4 - 5t - 2t^2) = 4.$$

Příklad 40: S využitím gradientu určete derivaci funkce $f(x, y, z) = \ln(1 + x + y^2 + z^4)$ v bodě $[1, -1, 1]$ ve směru vektoru $(5, 0, -12)$.

Řešení: Chceme spočítat derivaci funkce

$$f(x, y, z) = \ln(1 + x + y^2 + z^4)$$

v bodě $A = [1, -1, 1]$ ve směru vektoru $\mathbf{v} = (5, 0, -12)$.

Nejprve spočítáme délku směrového vektoru:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Tento vektor nyní normalizujeme. Ponecháme tedy jeho směr, ale změníme jeho velikost na hodnotu 1. Obdržíme vektor $\mathbf{u}$, který později využijeme:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{5}{13}, 0, -\frac{12}{13} \right).$$

Gradient funkce f je:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{1}{1 + x + y^2 + z^4}, \frac{2y}{1 + x + y^2 + z^4}, \frac{4z^3}{1 + x + y^2 + z^4} \right),$$

odkud

$$\nabla f(A) = \nabla f(1, -1, 1) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, \frac{4}{4} \right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Hledaná derivace ve směru vektoru $\mathbf{u}$ je skalární součin:

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{u}}(A) &= \nabla f(A) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1\right) \cdot \left(\frac{5}{13}, 0, -\frac{12}{13}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{13} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 1 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) \\ &= \frac{5}{52} - \frac{12}{13} = \frac{5}{52} - \frac{48}{52} = -\frac{43}{52}. \end{aligned}$$

Příklad 41: Ověřte, že po částech definovaná funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{pro } [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ různé smíšené parciální derivace druhého řádu. Stručně zdůvodněte, proč to tak v tomto případě může být.

Řešení: Nejprve ověříme, že je funkce f v okolí bodu $[0, 0]$ definovaná a že v tomto bodě existují obě parciální derivace prvního řádu. Máme:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} \cdot 0 = 0, \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3}{h^3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dále se zaměříme na výpočet smíšených parciálních derivací druhého řádu v bodě $[0, 0]$. Nejprve vypočítáme derivaci $f''_{xy}(0, 0)$ pomocí definice:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, h) - f'_x(0, 0)}{h}.$$

Pro $x = 0$ a $y \neq 0$ platí:

$$f(x, y) = \frac{0 \cdot y(0 - y^2)}{0 + y^2} = 0,$$

odkud

$$f'_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = -y.$$

Je tedy:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Analogicky spočítáme:

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h, 0) - f'_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Zjistili jsme, že

$$-1 = f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

Funkce má v bodě $[0, 0]$ různé smíšené parciální derivace druhého řádu. To je možné, protože Schwarzova věta (věta o záměně smíšených derivací) platí pouze za předpokladu, že tyto derivace jsou spojité v okolí daného bodu. V tomto případě ale nejsou smíšené derivace v okolí bodu $[0, 0]$ spojité.

Příklad 42: Pomocí (totálního) diferenciálu přibližně vypočtěte

(a) $1,01^{4,02}$

(b) $\sqrt{3,03^2 + 3,99^2 + 0,01}$.

Řešení:

- (a) Označme $f(x, y) = x^y$. Zvolme bod $A = [1, 4]$, v jehož okolí aproximujeme hodnotu funkce $f(1,01; 4,02)$.
Určíme totální diferenciál zadané funkce v obecném bodě $[x, y]$:

$$df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy.$$

V bodě $A = [1, 4]$ platí:

$$f'_x(A) = 4 \cdot 1^3 = 4, \quad f'_y(A) = 1^4 \cdot \ln 1 = 0.$$

Vypočítáme difference: $dx = 1,01 - 1 = 0,01$, $dy = 4,02 - 4 = 0,02$ a dosazením do vzorce obdržíme výsledek:

$$f(1,01; 4,02) \doteq f(A) + df(A) = 1^4 + 4 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,02 = 1 + 0,04 = 1,04.$$

- (b) Označme $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z}$. Zajímá nás přibližná funkční hodnota $f(3,03; 3,99; 0,01)$. Nejprve určíme totální diferenciál funkce $f(x, y, z)$ v bodě $[x, y, z]$:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz,$$

kde

$$f'_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z}}, \quad f'_y(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z}}, \quad f'_z(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z}}.$$

Pro konkrétní bod $B = [3, 4, 0]$ máme:

$$f'_x(B) = \frac{3}{5}, \quad f'_y(B) = \frac{4}{5}, \quad f'_z(B) = \frac{1}{10}.$$

Pro difference zřejmě platí: $dx = 0,03$, $dy = -0,01$, $dz = 0,01$.

Dosazením do vzorce obdržíme výsledek:

$$f(3,03; 3,99; 0,01) \doteq f(B) + df(B) = 5 + \frac{3}{5} \cdot 0,03 + \frac{4}{5} \cdot (-0,01) + \frac{1}{10} \cdot 0,01 = 5 + 0,018 - 0,008 + 0,001 = 5,011.$$

Příklad 43: Spočítejte Taylorův polynom $T_2(x, y)$ funkce $f(x, y) = 2 \sin x \cdot \sin y$ v bodě $A = [0, 0]$.

Řešení: Zřejmě $f(A) = 0$. Vypočítáme hodnoty parciálních derivací prvního a druhého řádu funkce f v bodě $A = [0, 0]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2 \cos x \cdot \sin y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \sin x \cdot \cos y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2 \sin x \cdot \sin y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2 \cos x \cdot \cos y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2 \sin x \cdot \sin y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0. \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty dosadíme do Taylorova polynomu druhého stupně:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot y \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \cdot x \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \cdot y^2 \right) \\
&= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} (0 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y + 0) = 2xy.
\end{aligned}$$

Příklad 44: Určete Taylorův polynom čtvrtého stupně pro funkci $f(x, y) = 2 \cos x \cdot \cos 3y$ v bodě $A = [0, 0]$.

Řešení: Zřejmě $f(A) = 2 \cos 0 \cdot \cos 0 = 2$. Vypočítáme hodnoty parciálních derivací prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce f v bodě $A = [0, 0]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2 \sin x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -6 \cos x \cdot \sin 3y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2 \cos x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 6 \sin x \cdot \sin 3y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -18 \cos x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -18 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= 2 \sin x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A) = 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= 6 \cos x \cdot \sin 3y \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A) = 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= 18 \sin x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A) = 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= 54 \cos x \cdot \sin 3y \implies \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A) = 0 \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} &= 2 \cos x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(A) = 2 \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} &= -6 \sin x \cdot \sin 3y \implies \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(A) = 0 \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} &= 18 \cos x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(A) = 18 \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} &= -54 \sin x \cdot \sin 3y \implies \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(A) = 0 \\
\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= 162 \cos x \cdot \cos 3y \implies \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(A) = 162.
\end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty dosadíme do Taylorova polynomu čtvrtého stupně:

$$\begin{aligned}
T_4(x, y) &= f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot y \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \cdot x \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \cdot y^2 \right) \\
&+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A) \cdot x^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A) \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A) \cdot x \cdot y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A) \cdot y^3 \right) \\
&+ \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(A) \cdot x^4 + 4 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(A) \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(A) \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(A) \cdot x \cdot y^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(A) \cdot y^4 \right) \\
&= 2 + 0 + 0 + \frac{1}{2} (-2x^2 + 0 - 18y^2) + \frac{1}{6} (0 + 0 + 0 + 0) + \frac{1}{24} (2x^4 + 0 + 18x^2y^2 + 0 + 162y^4) \\
&= 2 - x^2 - 9y^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{27}{4}y^4.
\end{aligned}$$

Příklad 45: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4y$.

Řešení: Nejprve spočteme parciální derivace prvního řádu:

$$\begin{aligned}
f'_x &= 2x + 2y \\
f'_y &= 2x + 6y + 4.
\end{aligned}$$

Nalezneme stacionární body, ve kterých jsou obě vypočtené parciální derivace rovny nule:

$$\begin{aligned}
2x + 2y &= 0 \\
2x + 6y + 4 &= 0.
\end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že $x = -y$, což po dosazení do druhé rovnice dává:

$$2(-y) + 6y + 4 = 0.$$

Odtud snadno vypočítáme, že $y = -1$ a po dosazení do rovnice $x = -y$ obdržíme $x = 1$.

Potenciální lokální extrém tedy může nastat pouze ve stacionárním bodě $A = [1, -1]$. Nyní zjistíme, zda se jedná o maximum, minimum nebo sedlový bod. K tomu použijeme determinant Hessovy matice:

$$\det H_2(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 8 > 0.$$

Zjistili jsme, že determinant Hessovy matice je v každém bodě kladný, což spolu s faktem, že $\det H_1(x, y) = f''_{xx}(A) = 2 > 0$ znamená, že se v bodě $A = [1, -1]$ nachází lokální minimum.

Příklad 46: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 12x + 6y - 6$.

Řešení: Vypočítáme parciální derivace prvního řádu:

$$\begin{aligned}
f'_x &= 3x^2 - 12 \\
f'_y &= -6y^2 + 6.
\end{aligned}$$

Určíme stacionární body, ve kterých jsou obě vypočtené parciální derivace rovny nule:

$$\begin{aligned}
3x^2 - 12 &= 0 \\
-6y^2 + 6 &= 0.
\end{aligned}$$

Rovnice jsou ekvivalentní s tím, že

$$\begin{aligned}x^2 &= 4 \\y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Odtud již snadno dopočítáme, že $x = \pm 2$ a $y = \pm 1$. Získali jsme tak souřadnice čtyř stacionárních bodů: $A = [2, 1]$, $B = [2, -1]$, $C = [-2, 1]$ a $D = [-2, -1]$. O tom, zda v těchto bodech nastanou lokální extrémy rozhodneme s pomocí Hessiany matice:

$$H_2(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix}.$$

Hodnoty determinantů Hessianých matic ve stacionárních bodech A, B, C, D jsou:

$$\begin{aligned}\det H_2(A) &= \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -144 < 0, & \det H_2(B) &= \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0, \\ \det H_2(C) &= \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144 > 0, & \det H_2(D) &= \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -144 < 0.\end{aligned}$$

Podle Sylvestrova kritéria v bodech A a D extrém nenastává. Vzhledem k tomu, že $\det H_2(B) > 0$ a $f''_{xx}(B) = 12 > 0$, nastává v bodě B lokální minimum. Dále pak máme, že $\det H_2(C) > 0$ a $f''_{xx}(C) = -12 < 0$, a tedy v bodě C se nachází lokální maximum.

Příklad 47: Určete lokální extrémy funkce tří proměnných

$$f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z.$$

Řešení: Nejprve spočteme parciální derivace prvního řádu:

$$\begin{aligned}f'_x &= 2y^2 - 4y + 2x \\f'_y &= 4xy - 4x \\f'_z &= 2z - 2.\end{aligned}$$

Všechny tři vypočtené parciální derivace položíme rovny nule. Obdržíme tak soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejíž všechna řešení jsou hledané stacionární body. Po jednoduchých úpravách příslušných rovnic má soustava následující tvar:

$$\begin{aligned}y^2 - 2y + x &= 0 \\x(y - 1) &= 0 \\z - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Ze třetí rovnice ihned plyne, že $z = 1$. Z první rovnice je patrné, že $x = y(2 - y)$, což po dosazení do druhé rovnice dává:

$$y(2 - y)(y - 1) = 0.$$

Odtud je zřejmé, že $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ a $y_3 = 1$. Nyní z rovnice $x = y(2 - y)$ snadno dopočítáme příslušné hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 1$.

Potenciální lokální extrém může nastat pouze ve stacionárních bodech: $A = [0, 0, 1]$, $B = [0, 2, 1]$ a $C = [1, 1, 1]$. Nyní zjistíme, zda se jedná o maxima, minima nebo o sedlové body. K tomu použijeme tři determinanty Hessiany matice:

$$\det H_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4y - 4 & 0 \\ 4y - 4 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16x - 2(4y - 4)^2,$$

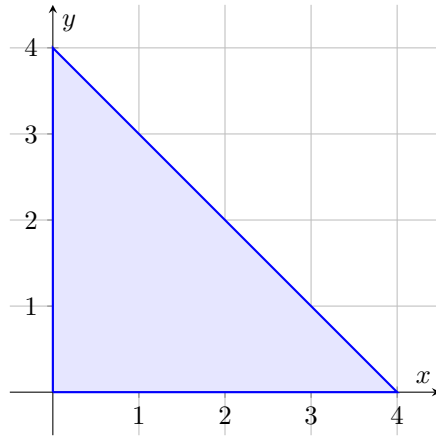
$$\det H_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4y-4 \\ 4y-4 & 4x \end{vmatrix} = 8x - (4y-4)^2,$$

$$\det H_1(x, y, z) = |f''_{xx}| = 2.$$

Na závěr postupně dosadíme souřadnice stacionárních bodů A , B , C a aplikujeme Sylvesterovo kritérium. V bodě A extrém nenastává, protože $\det H_2(A) = -16 < 0$. Také v bodě B nemůže být extrém, neboť $\det H_2(B) = -16 < 0$. V bodě C je lokální minimum, neboť $\det H_3(C) = 16 > 0$, $\det H_2(C) = 8 > 0$ a $\det H_1(C) = 2 > 0$.

Příklad 48: Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množině M dané nerovnicemi $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x + y \leq 4$.

Řešení: Nejprve načtneme oblast M , vzhledem ke které máme hledat globální extrémy, viz Obr. 6



Obrázek 6: Náčrt oblasti M .

Nalezneme stacionární body uvnitř množiny M . K tomu vytvoříme soustavu dvou rovnic $f'_x = 0$ a $f'_y = 0$:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 6 &= 0, \\ -4y + 4x &= 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice plyne, že $x = y$. Dosazením tohoto faktu do první rovnice obdržíme: $2x + 4x - 6 = 0$, odkud $x = 1$, $y = 1$. Toto je jediné řešení dané soustavy rovnic $f'_x = 0$ a $f'_y = 0$. Jediným stacionárním bodem je tedy bod $A = [1, 1]$. Tento bod leží uvnitř množiny M , takže je kandidátem na globální extrém funkce $f(x, y)$. Snadno dopočítáme, že $f(A) = f(1, 1) = 1 - 2 + 4 - 6 - 1 = -4$.

Dále určíme extrémy na hranici množiny M . Množina M je trojúhelník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[4, 0]$, $[0, 4]$. Postupně prozkoumáme hodnoty funkce $f(x, y)$ na jednotlivých stranách trojúhelníka, tedy na hranici množiny M .

$$(a) \quad y = 0, x \in \langle 0, 4 \rangle$$

$$u(x) = f(x, 0) = x^2 - 6x - 1, \quad u'(x) = 2x - 6 = 0 \implies x = 3.$$

Bod $B = [3, 0]$ leží na hranici množiny M , spočteme:

$$f(B) = f(3, 0) = 9 - 18 - 1 = -10.$$

Dopočítáme ještě funkční hodnoty v krajních bodech $C = [0, 0]$ a $D = [4, 0]$. Zřejmě $f(C) = u(0) = -1$ a $f(D) = u(4) = 16 - 24 - 1 = -9$.

(b) $x = 0, y \in \langle 0, 4 \rangle$

$$v(y) = f(0, y) = -2y^2 - 1, \quad v'(y) = -4y = 0 \implies y = 0.$$

Vypočtený bod $[0, 0]$ je bod C , který jsme řešili v případě (a). Pro kontrolu, i zde nám vyjde $f(C) = v(0) = -1$. Druhým krajním bodem strany trojúhelníka je bod $E = [0, 4]$. Funkční hodnota v něm je $F(E) = v(4) = -2 \cdot 16 - 1 = -33$.

(c) $y = 4 - x, x \in \langle 0, 4 \rangle$

$$\begin{aligned} w(x) &= f(x, 4 - x) = x^2 - 2 \cdot (4 - x)^2 + 4x \cdot (4 - x) - 6x - 1 \\ &= x^2 - 32 + 16x - 2x^2 + 16x - 4x^2 - 6x - 1 \\ &= -5x^2 + 26x - 33. \end{aligned}$$

Podobně jako v předchozích dvou případech nyní vyšetříme extrémy funkce jedné reálné proměnné $w(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. Vzhledem ke spojitosti funkce $w(x)$ může extrém nastat pouze ve vnitřním bodě daného intervalu nebo na jeho dvou koncích. Pomocí derivace nyní určíme stacionární body:

$$w'(x) = -10x + 26 = 0 \implies x = \frac{13}{5}, \quad \text{odkud} \quad y = 4 - \frac{13}{5} = \frac{7}{5}.$$

Získali jsme bod $F = [\frac{13}{5}, \frac{7}{5}] \in M$. Protože v něm může být hledaný globální extrém, zjistíme funkční hodnotu $f(F)$. Máme

$$f(F) = w(F) = -5 \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^2 + 26 \cdot \left(\frac{13}{5}\right) - 33 = \frac{4}{5}.$$

Funkční hodnoty v krajních bodech strany trojúhelníka v případě (c) už jsme počítali. Pro kontrolu správnosti předchozích výpočtů je raději spočítáme znovu, tentokrát přes funkci $w(x)$. Platí, že

$$f(D) = f(4, 0) = w(4) = -5 \cdot 4^2 + 26 \cdot 4 - 33 = -9 \quad \text{a} \quad F(E) = F(0, 4) = w(0) = -33.$$

Výsledky jsou stejné, kontrola správnosti vyšla.

Nyní již známe všechny body, ve kterých může nastat globální extrém funkce $f(x, y)$ vzhledem k množině M . Může to být v bodě A (v jediném vnitřním bodě množiny M) nebo v bodech B, C, D, E, F (v pěti bodech na hranici množiny M). Stačí srovnat velikosti funkčních hodnot všech šesti získaných bodů:

- $f(A) = -4$
- $f(B) = -10$
- $f(C) = -1$
- $F(D) = -9$
- $f(E) = -33$
- $f(F) = \frac{4}{5}$.

Zjistili jsme, že funkce $f(x, y)$ má na množině M globální maximum v bodě $[\frac{13}{5}, \frac{7}{5}]$ a globální minimum v bodě $[0, 4]$. Přitom $\max f = \frac{4}{5}$ a $\min f = -33$.

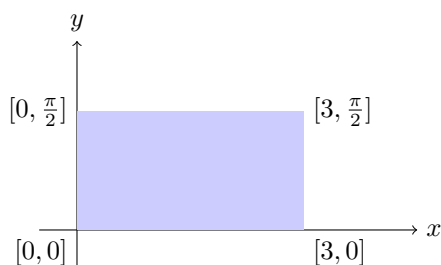
7 Integrální počet funkcí více proměnných

Příklad 49: Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_A 3x^2 \cdot \sin y \, dx \, dy,$$

kde oblastí A je obdélník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[3, 0]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[3, \frac{\pi}{2}]$.

Řešení: Znázorníme oblast A , viz Obr. 7. Zřejmě se jedná o elementární oblast typu (x, y) a také typu (y, x) , přičemž $x \in \langle 0, 3 \rangle$ a $y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.



Obrázek 7: Obdélníková oblast A .

Podle Fubiniho věty převedeme úlohu na výpočet dvou jednoduchých integrálů. Platí

$$\iint_A 3x^2 \cdot \sin y \, dx \, dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 \cdot \sin y \, dy \right) dx.$$

S využitím Dirichletovy věty pak

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 \cdot \sin y \, dy \right) dx &= \int_0^3 3x^2 \, dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \\ &= \left[x^3 \right]_0^3 \cdot \left[-\cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 27 \cdot (0 - (-1)) = 27. \end{aligned}$$

Příklad 50: Vypočtěte dvojný integrál $\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$, kde Ω je trojúhelník určený body $[0, 0]$, $[0, 2]$, $[2, 0]$.

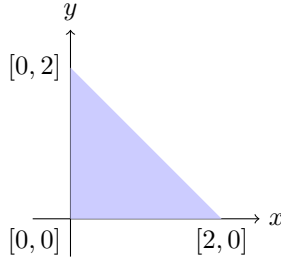
Řešení: Nejprve nakreslíme obrázek trojúhelníkové oblasti Ω , viz Obr. 8.

S využitím obrázku dále rozepíšeme meze integrace pro proměnnou x a pro proměnnou y , přičemž si uvědomíme, že body $[0, 2]$ a $[2, 0]$ prochází přímka daná rovnicí $y = 2 - x$. Zřejmě platí, že $0 \leq x \leq 2$. Proměnná y je závislá na proměnné x , přičemž nabývá hodnot od 0 do $2 - x$ (pro x od 0 do 2).

Podle Fubiniho věty můžeme zadaný integrál napsat následovně:

$$\int_0^2 \left(\int_0^{2-x} xy \, dy \right) dx.$$

Integrováním podle proměnné y nyní vypočítáme vnitřní integrál:



Obrázek 8: Trojúhelníková oblast Ω určená body $[0, 0]$, $[0, 2]$, $[2, 0]$.

$$\int_0^{2-x} xy \, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{2-x} = \frac{x(2-x)^2}{2} = \frac{x(4-4x+x^2)}{2} = 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

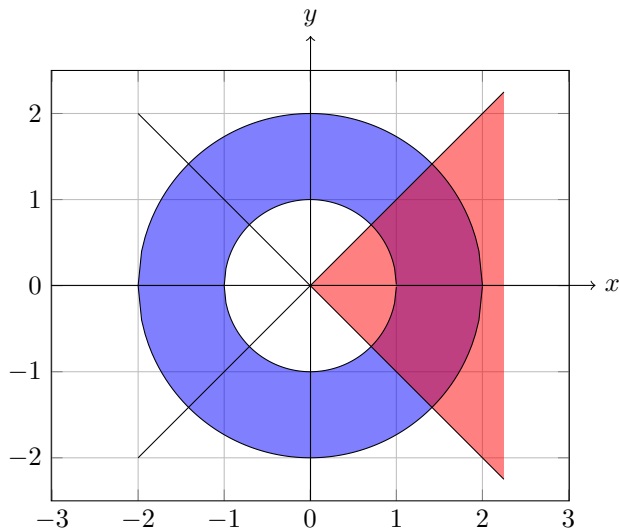
Nakonec integrujeme podle proměnné x :

$$\int_0^2 \left(2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2} \right) dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + 2 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}.$$

Zjistili jsme, že $\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \frac{2}{3}$.

Příklad 51: Spočítejte dvojný integrál $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, kde Ω je část roviny vymezená nerovnostmi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $-x \leq y \leq x$.

Řešení: Oblast Ω je průnikem mezikruží (určeným nerovnostmi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$) a úhlu (určeným nerovnostmi $-x \leq y \leq x$). Na Obr. 9 je celé mezikruží, které je vymezeno dvěma kružnicemi se středem v počátku a s poloměrem 1, respektive 2 zaznačeno světle modrou barvou. Na Obr. 9 je úhel s vrcholem v počátku a s rameny, které tvoří polopřímky $y = x$ a $y = -x$ znázorněn světle červenou barvou. Oblast Ω je pak znázorněna světle fialovou barvou.



Obrázek 9: Oblast daná nerovnostmi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ a $-x \leq y \leq x$.

Pro značně jednodušší výpočet zadaného dvojného integrálu aplikujeme převod do polárních souřadnic. Příslušné transformační rovnice jsou:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi,\end{aligned}$$

přičemž příslušný jakobián je roven r . Po převodu do polárních souřadnic má výraz $\sqrt{x^2 + y^2}$ hodnotu r , protože $r \geq 0$, odkud

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{r^2} = r.$$

Z Obr. 9 vyplývá, že $1 \leq r \leq 2$ a $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 r^2 dr \right) d\varphi \\&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) d\varphi \\&= \frac{7}{3} \cdot \left[\varphi \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}.\end{aligned}$$

Příklad 52: Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_A xy^2 z dx dy dz,$$

kde oblast A je kvádr $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení:

Oblast A je kvádr, takže meze integrace jsou konstantní a můžeme integrovat postupně:

$$\iiint_A xy^2 z dx dy dz = \int_1^2 \left(\int_1^3 \left(\int_0^2 xy^2 z dx \right) dy \right) dz.$$

Nejprve integrujeme podle x :

$$\int_0^2 xy^2 z dx = y^2 z \int_0^2 x dx = y^2 z \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = y^2 z \cdot \frac{4}{2} = 2y^2 z.$$

Dále integrujeme podle y :

$$\int_1^3 2y^2 z dy = 2z \int_1^3 y^2 dy = 2z \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^3 = 2z \left(\frac{27-1}{3} \right) = 2z \cdot \frac{26}{3} = \frac{52}{3} z.$$

Nakonec integrujeme podle z :

$$\int_1^2 \frac{52}{3} z dz = \frac{52}{3} \int_1^2 z dz = \frac{52}{3} \left[\frac{z^2}{2} \right]_1^2 = \frac{52}{3} \cdot \frac{4-1}{2} = \frac{52}{3} \cdot \frac{3}{2} = 26.$$

Hodnota trojného integrálu je

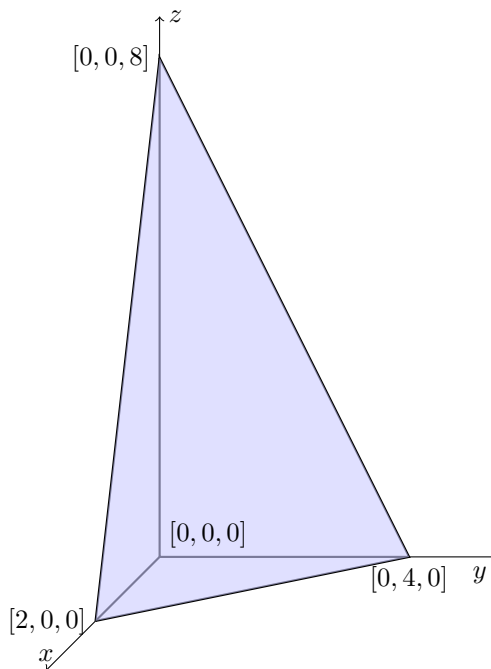
$$\iiint_A xy^2 z dx dy dz = 26.$$

Příklad 53: Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz,$$

kde uzavřená oblast Ω je určena vztahy: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a $4x + 2y + z \leq 8$.

Řešení: Oblastí Ω je čtyřstěn umístěný v prvním oktantu a shora omezený rovinou $4x + 2y + z = 8$. Pro ilustraci uvádíme obrázek oblasti Ω (viz Obr. 10), kde jsou znázorněny průsečíky roviny $4x + 2y + z = 8$ s osami x , y , z .



Obrázek 10: Náčrt oblasti Ω .

Typ elementární oblasti můžeme u čtyřstěnu vybrat libovolně, zvolme například (x, y, z) . Platí:

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 - 2x, \quad 0 \leq z \leq 8 - 4x - 2y.$$

Aplikujeme Fubiniho větu:

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} x \, dz \, dy \, dx.$$

Integrujeme podle z :

$$\int_0^{8-4x-2y} x \, dz = x(8 - 4x - 2y).$$

Integrujeme podle y :

$$\begin{aligned} \int_0^{4-2x} x(8 - 4x - 2y) \, dy &= x \int_0^{4-2x} (8 - 4x - 2y) \, dy = x \left[(8 - 4x)y - y^2 \right]_0^{4-2x} \\ &= x \left((8 - 4x)(4 - 2x) - (4 - 2x)^2 \right) = x \left[(32 - 32x + 8x^2) - (16 - 16x + 4x^2) \right] = 16x - 16x^2 + 4x^3. \end{aligned}$$

Nakonec integrujeme podle x :

$$\int_0^2 (16x - 16x^2 + 4x^3) dx = \left[8x^2 - \frac{16}{3}x^3 + x^4 \right]_0^2 = 8 \cdot 4 - \frac{16}{3} \cdot 8 + 16 = 48 - \frac{128}{3} = \frac{144 - 128}{3} = \frac{16}{3}.$$

Výsledek:

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{16}{3}.$$

Příklad 54: Integrujte transformací do válcových souřadnic:

$$\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz,$$

kde oblast Ω je vymezena rovinami $z = 0$, $z = 5$, přičemž proměnné x a y splňují nerovnost $x^2 + y^2 \leq 4$.

Řešení: Tento trojný integrál budeme řešit přechodem do válcových souřadnic. Přitom využijeme převod:

- $x = r \cos \theta$,
- $y = r \sin \theta$,
- $z = z$,
- $dx dy dz = r dr d\theta dz$.

Poznamenejme, že proměnná r za relací rovnosti v předchozím řádku souvisí s tím, že absolutní hodnota jakobiánu je rovna právě r .

Převědeme integrand a oblast Ω do válcových souřadnic. Pro integrand máme

$$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2.$$

Oblast Ω bude převedena na oblast Ω' , kde:

- $z \in \langle 0, 5 \rangle$,
- $x^2 + y^2 \leq 4 \implies r \in \langle 0, 2 \rangle$,
- $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Přepíšeme zadaný integrál do válcových souřadnic:

$$\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega'} r^2 \cdot r dr d\theta dz = \iiint_{\Omega'} r^3 dr d\theta dz,$$

kde, jak víme, Ω' je válcová oblast, ve které $r \in \langle 0, 2 \rangle$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $z \in \langle 0, 5 \rangle$.

Seřadíme integraci v pořadí: $dr d\theta dz$:

$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 dr d\theta dz.$$

Nyní vypočítáme jednotlivé části:

- vnitřní integrál (dle r):

$$\int_0^2 r^3 dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

- prostřední integrál (dle θ):

$$\int_0^{2\pi} 4 \, d\theta = 4 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 8\pi$$

- vnější integrál (dle z):

$$\int_0^5 8\pi \, dz = 8\pi \cdot [z]_0^5 = 40\pi.$$

Zadaný trojný integrál má tedy hodnotu 40π .

Příklad 55: Integrujte transformací do sférických souřadnic:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

kde trojrozměrnou oblast Ω tvoří všechny body splňující:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

Řešení: Oblast Ω je ohraničena dvěma kulovými plochami se středem v počátku soustavy souřadnic o poloměrech 1, respektive 2. Zavedeme sférické souřadnice:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

Použili jsme fakt, že absolutní hodnota příslušného jakobiánu je $r^2 \sin \theta$.

Zadaný integrál $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ nyní transformujeme na:

$$\iiint_{\Omega^*} r^2 \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \iiint_{\Omega^*} r^4 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi,$$

přičemž pro oblast Ω^* máme:

$$r \in \langle 1, 2 \rangle, \quad \theta \in \langle 0, \pi \rangle, \quad \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Integrujeme:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 r^4 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_1^2 r^4 \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{31}{5} = \frac{124\pi}{5}.$$

Zadaný trojný integrál je roven hodnotě $\frac{124\pi}{5}$.