

Matematická logika

přednáška první

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle textu R. Bělohlávka:
Matematická logika – poznámky k přednáškám, 2004.

a dle učebního textu R. Bělohlávka a V. Vychodila:
Diskrétní matematika pro informatiky I, Olomouc 2006.

- 1 Co a k čemu je logika?
- 2 Vztah logiky a informatiky
- 3 Stručná historie logiky
- 4 Logické paradoxy
- 5 Základní syntaktické pojmy VL

- 1 Co a k čemu je logika?
- 2 Vztah logiky a informatiky
- 3 Stručná historie logiky
- 4 Logické paradoxy
- 5 Základní syntaktické pojmy VL

Logika je vědou o správném usuzování. V logice jde o formu usuzování, ne o obsah usuzování. Logika má proto symbolický charakter.

Pro uvedené rysy bývá moderní logika označována jako logika formální, popř. symbolická. Je pochopitelné, že symbolický charakter umožňuje logice snadněji odhlédnout od obsahu a soustředit se na formy usuzování.

Logika zkoumá pojmy jako je pravdivost, dokazatelnost, vyvrátitelnost a zabývá se jejich vzájemnými vztahy. Logika si klade otázky typu: "Je každé dokazatelné tvrzení pravdivé?", "Co plyne z toho, že jsme došli nějakou úvahou ke sporu?".

Logikou se zabývají filozofové, právníci, matematici a informatici, přičemž zájem a cíl bývá odlišný. Poznamenejme, že pro informatika je logika nejen nástrojem, ale i plnoprávnou disciplínou zkoumanou v rámci teoretické informatiky.

Hlavními rysy soudobé logiky jsou idealizace a formalizace – logika zkoumá pouze formu usuzování, nezabývá se obsahem tvrzení, psychologickými interpretacemi, apod.

Specifikujme nyní jak logika formalizuje pojmy jako je tvrzení a úsudek. Formalizace pojmů a práce s nimi je ve skutečnosti závislá na konkrétním logickém kalkulu (soubor pravidel, která mimo jiné specifikují jak "jemná" formalizace se používá), se kterým pracujeme. Uvažujme tvrzení:

"Pokud má Petr 20 Kč, pak si může koupit čokoládu."

V případě, že si nebudeme všímat struktury v jednotlivých větách tohoto souvětí, jde o tvrzení tvaru "Jestliže A , pak B ". Ve druhé větě se vyskytuje vazba "moci", z tohoto úhlu pohledu se jedná o tvrzení tvaru "Jestliže A , pak může B ". Při ještě jemnější formalizaci bychom mohli zachytit i jednotlivé objekty ("20 Kč", "čokoláda", "Petr") a vztahy mezi nimi ("mít", "koupit").

Poznamenejme už nyní, že výroková logika zkoumá usuzování (z pohledu formalizace) na úrovni vět v souvětích; predikátová logika zkoumá usuzování (z pohledu formalizace) až na úrovni jednotlivých větných členů.

Učiníme-li studium forem usuzování předmětem našeho zájmu, vzniká přirozeně otázka, jakých metod při tomto studiu používat. O **matematické logice** hovoříme, rozhodneme-li se používat metod matematiky.

Studiem logiky matematickými prostředky lze dosáhnout hlubokých výsledků – některé z nich si později ukážeme.

Někdy bývá uváděno, že logika se dělí na matematickou logiku a filozofickou logiku. Toto dělení má své historické důvody. V současné době je však toto rozdělení umělé, nepřirozené a překonané.

Klasickou logikou se rozumí logika, ve které předpokládáme, že tvrzení mohou nabývat dvou pravdivostních hodnot (pravda a nepravda), ve které tvrzení mohou být spojována ve tvrzení složitější spojkami "není pravda, že ...", "... a ...", "... nebo ...", "jestliže ..., pak ...", "... právě když ..." a kvantifikátory "pro každé x ..." a "existuje x , pro které ..." a ve které pravdivostní hodnoty složených tvrzení závisí na pravdivostních hodnotách skládaných tvrzení. Jiná logika se považuje za **neklasickou** (tvrzení mohou nabývat více pravdivostních hodnot nebo je možné používat i jiné spojky nebo mají spojky jiný význam apod.).

- (a) **modální logika** (logika modalit: možnosti, nutnosti): používá neklasické spojky "je možné, že ...", "je nutné, že ..."
- (b) **epistemická logika** (logika znalostí): používá neklasické spojky "ví se, že ...", "věří se, že ..."
- (c) **temporální logika** (logika času): zabývá se tvrzeními, ve kterých hraje roli čas.
- (d) **fuzzy logika** (logika více pravdivostních hodnot): zabývá se tvrzeními, které mohou mít kromě pravdivostních hodnot pravda a nepravda i jiné hodnoty.

Aplikovanou logikou se někdy rozumí studium problémů, které vznikají při pokusu použít logiku na tu či onu oblast, která má oproti situaci, kdy nás zajímá usuzování vůbec, svá specifika. Tato specifika umožňují řadu dodatečných (zjednodušujících) předpokladů, díky kterým se ve specifických oblastech metodami logiky dosahuje pozoruhodných výsledků. **Čistou logikou** se v této souvislosti rozumí logika všeobecná, zabývající se formami usuzování bez ohledu na konkrétní oblasti použití.

Nejprve se budeme zabývat tzv. **výrokovou logikou** (VL), poté tzv. **predikátovou logikou** (PL). Poznamenejme, že nejde "o dvě různé logiky". PL je rozšířením VL (přesněji řečeno zjemněním VL). Bylo by tedy možné VL vynechat a zabývat se rovnou PL. Protože je však VL jednodušší a protože nám navíc umožní ilustrovat základní problémy logiky v dostatečné míře, začneme z didaktických důvodů VL. (O tom jaký je přesně vztah mezi VL a PL se zmíníme později.)

- 1 Co a k čemu je logika?
- 2 Vztah logiky a informatiky**
- 3 Stručná historie logiky
- 4 Logické paradoxy
- 5 Základní syntaktické pojmy VL

Vztah logiky a informatiky je bohatý a různorodý. Se základy logiky by měl být obeznámen každý informatik. Znalost základů logiky nám umožňuje srozumitelně a jednoznačně se vyjadřovat a argumentovat. To je pochopitelně užitečné pro každého, nejen pro informatika. Pro informatika je to však navýsost důležité, protože svoje konstrukce a návrhy musí "sdělit počítači", např. ve formě zdrojového kódu napsaného ve vhodném programovacím jazyce. Zdrojový kód obvykle obsahuje výrazy, které se vyhodnocují podle pravidel logiky (např. podmínky v příkazech větvení "if ... then ... else ..."). Logika nás těmito pravidly učí.

Zdrojový kód musí být přesný, jinak je program chybný. Chyby mohou mít dalekosáhlé následky (pomysleme na program pro výpočet mezd, program pro řízení elektrárny apod.). Zdrojový program musí být také srozumitelný, jinak mu nikdo jiný než jeho autor nebude rozumět (a po čase mu nebude rozumět ani jeho autor). Logika nás učí přesnosti i srozumitelnosti. To je další významný efekt studia logiky.

Pokročilejší partie logiky jsou základem důležitých oblastí informatiky, pro příklad jmenujme logické programování, umělou inteligenci, expertní systémy, analýzu dat.

Vztah logiky a informatiky je velmi těsný. Logika je důležitá v informatice (formální metody specifikace, verifikace a analýzy dat) a elektrotechnice (logika el. obvodů). Naopak, výsledky informatických disciplín (teorie informace, teorie jazyků) jsou nepostradatelné v logice. Logika se zabývá například algoritmickými aspekty usuzování a konstrukcí automatických dokazovacích systémů – jde o speciální algoritmy, které jsou schopny, byť omezeně, mechanicky odvozovat tvrzení z jiných.

- 1 Co a k čemu je logika?
- 2 Vztah logiky a informatiky
- 3 Stručná historie logiky**
- 4 Logické paradoxy
- 5 Základní syntaktické pojmy VL

Logika je stejně stará disciplína jako filozofie. Od 6. st. př. n. l. se v Indii, Číně i v Řecku prosazoval racionální způsob uvažování, jehož základem byla logika.

Za zakladatele logiky je pokládán Aristoteles (384 – 322 př. n. l.), který podal systematický popis některých typů uvažování a oddělil správné úvahy od nesprávných. (Doba rozkvětu logiky u Řeků trvala asi 150 let.)

Současně se v Megarské škole rozvíjelo zkoumání myšlení; nejvíce vynikl Eukleidés z Megar (zemřel roku 360 př. n. l.), který jako první definoval axiomatický systém.

Pokračovateli byli stoikové, zejména Zenón a Chrysippos.

V 19. století začal rozvoj symbolické (matematické) logiky. Podněty k intenzivnímu zkoumání přinesly logické paradoxy (například v teorii množin). Slova běžného jazyka byla odstraněna, logika získala formální charakter.

Z nejvýznamějších představitelů logiky 19. a 20. století n. l. jmenujme alespoň: B. Bolzano, G. Boole, A. de Morgan, G. Frege, G. Peano, D. Hilbert, B. Russell, A. Tarski, T. Skolem, A. Church, J. Herbrand, A. Turing, G. Gentzen a K. Gödel.

- 1 Co a k čemu je logika?
- 2 Vztah logiky a informatiky
- 3 Stručná historie logiky
- 4 Logické paradoxy**
- 5 Základní syntaktické pojmy VL

Formalizace usuzování je podstatná i vzhledem k (logickým) paradoxům:

- **paradox lháře**

"V tomto okamžiku lžu."

- **Grellingův paradox**

Adjektiva dělíme na autologická (mají vlastnost, kterou vyjadřují, například "čtyřslabičný", "český") a heterologická (nemají vlastnost, kterou vyjadřují, například "jednoslabičný", "anglický"). Každé adjektivum patří právě do jedné třídy. Do jaké třídy patří slovo "heterologický"?

- **Russelův paradox**

Definujme normální množinu jako množinu, která neobsahuje samu sebe (tj. není svým vlastním prvkem). Je množina \mathcal{M} všech normálních množin normální množinou?

Všimněme si, že předchozí paradoxy jsou založeny na tom, že výpověď se vztahuje sama na sebe.

- 1 Co a k čemu je logika?
- 2 Vztah logiky a informatiky
- 3 Stručná historie logiky
- 4 Logické paradoxy
- 5 Základní syntaktické pojmy VL**

VL se zabývá formálním usuzováním o **výrocích**, tj. o tvrzeních, u kterých má smysl uvažovat o jejich pravdivosti. Přirozený jazyk (čeština) se pro formalizaci nehodí – je komplikovaný a nejednoznačný.

Chceme-li zkoumat formy usuzování o výrocích bez ohledu na jejich obsah, bude užitečné označovat výroky pomocí symbolů. Atomické (dále nedělitelné) výroky, např. "Sněží." budeme označovat spec. symboly, tzv. **výrokovými symboly**. Spojky, kterými se výroky spojují ve složené výroky, budeme označovat **symboly výrokových spojek**. Dovolíme ještě použít **pomocné symboly** – závorky. Tedy například místo výroku "Jestliže sněží a mrzne, pak lze stavět sněhuláky." napíšeme $(p \wedge q) \Rightarrow r$.

Následuje definice (formálního) jazyka VL.

Definice

Jazyk výrokové logiky se skládá z

- **výrokových symbolů** p, q, r, \dots , popř. s indexy, p_1, p_2, \dots ; předpokládáme, že máme spočetně mnoho výrokových symbolů;
- **symbolů výrokových spojek** \neg (negace), \Rightarrow (implikace) [případně dále \wedge (konjunkce), \vee (disjunkce), \Leftrightarrow (ekvivalence)];
- **pomocných symbolů** $(,), [,]$ (různé druhy závorek).

Formální jazyk odstraňuje nevýhody přirozeného jazyka.

V jazyku VL například nejsou formulovatelná tvrzení obsahující autoreferenci (viz paradoxy).

Ze symbolů jazyka sestávají formule VL. (Poznamenejme, že formule jsou přesným zavedením intuitivního pojmu výrok.)

Definice

Nechť je dán jazyk výrokové logiky. **Formule** daného jazyka výrokové logiky je definována následovně

- každý výrokový symbol je formule (tzv. **atomická formule**);
- jsou-li φ a ψ formule, jsou i výrazy $\neg\varphi$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formule.

Formule jsou tedy jisté konečné posloupnosti symbolů jazyka VL. Například posloupnosti q_3 , $\neg\neg\neg p$, $((\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg\neg r)$ jsou formule VL, naproti tomu posloupnosti $\neg(p)$, $q \Rightarrow$, $p\neg p$, $(($ nejsou formule VL. (Stejně tak "Prší \Rightarrow sněží.", " \neg prší" nejsou formule VL.)