Matematická logika

přednáška druhá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle textu R. Bělohlávka:
Matematická logika – poznámky k přednáškám, 2004.

a dle učebního textu R. Bělohlávka a V. Vychodila:
Diskrétní matematika pro informatiky I, Olomouc 2006.

Obsah

Obsah

Připomeňme si definici jazyka VL a definici formule VL.

Definice

Jazyk výrokové logiky se skládá

- z výrokových symbolů: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$
- ze symbolů výrokových spojek: $\neg$ (negace), $\Rightarrow$ (implikace)
- z pomocných symbolů: (,).

Definice

Nechť je dán jazyk VL. **Formule** daného jazyka VL

- je každý výrokový symbol (tzv. **atomická formule**)
- jsou výrazy $\neg\varphi$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ za předpokladu, že φ a ψ jsou formule.

Poznamenejme, že potřeba „umět číst formule“ je nezbytná ve většině informatických a matematických disciplín, ve kterých se formalizované výroky používají k přesnému vyjadřování vztahů v definicích, algoritmech, větách apod.

Nyní zavedeme symboly $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ jako zkratky za jisté posloupnosti symbolů jazyka VL.
Nechť φ a ψ jsou posloupnosti symbolů jazyka VL, pak posloupnosti $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou zkratky za následující posloupnosti:

$$\begin{array}{rrl} (\varphi \wedge \psi) & \text{je zkratkou za} & \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi), \\ (\varphi \vee \psi) & \text{je zkratkou za} & (\neg\varphi \Rightarrow \psi), \\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) & \text{je zkratkou za} & ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)), \\ & \text{tj. za} & \neg((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \neg(\psi \Rightarrow \varphi)). \end{array}$$

Posloupnosti, které jsou zkratkami formulí nejsou samy o sobě formule, pro jednoduchost jim však formule říkat budeme. Tedy řekneme například „formule $(p \wedge \neg q)$“, přestože bychom měli správně říct „formule, jejíž zkratkou je $(p \wedge \neg q)$“.

Konvence o vynechávání vnějších závorek:
Pro zpřehlednění zápisu formulí budeme vynechávat vnější závorky. Budeme psát $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ místo $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$, atp.

Poznamenejme, že se někdy uvažuje následující priorita symbolů výrokových spojek: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$; což umožňuje vynechávat některé závorky. My ji však používat nebudeme.

Důkaz strukturální indukcí pro formule VL

Formule byly definovány tzv. induktivním (nebo rekurzivním) způsobem. Takový způsob nám umožnil konečným způsobem definovat nekonečnou množinu (množina formulí je nekonečná). Navíc můžeme elegantně dokazovat tvrzení tvaru „Každá formule má vlastnost $\mathscr{V}$“. Platí totiž následující:

Věta – důkaz strukturální indukcí pro formule VL

Nechť $\mathscr{V}$ je vlastnost formulí VL. Nechť platí, že

- každý výrokový symbol má vlastnost $\mathscr{V}$
- mají-li formule φ a ψ vlastnost $\mathscr{V}$, pak vlastnost $\mathscr{V}$ mají i formule $\neg\varphi$ a $(\varphi \Rightarrow \psi)$.

Pak vlastnost $\mathscr{V}$ má každá formule VL.

Důkaz: Jednoduchý, s využitím principu strukturální indukce – viz algebra.

Ukázka použití důkazu strukturální indukcí

Příklad

Chceme dokázat, že počet levých závorek je v každé formuli VL roven počtu pravých závorek. Vlastnost $\mathscr{V}$ je „mít stejný počet levých a pravých závorek“.
Zřejmě každý výrokový symbol má vlastnost $\mathscr{V}$ (neboť každý výrokový symbol má 0 levých a 0 pravých závorek). Mají-li formule φ a ψ vlastnost $\mathscr{V}$, pak vlastnost $\mathscr{V}$ mají i formule $\neg\varphi$ a $(\varphi \Rightarrow \psi)$ (neboť v obou dvou případech přibude stejný počet levých a pravých závorek, konkrétně pro $\neg\varphi$ nula a pro $(\varphi \Rightarrow \psi)$ jedna), což spolu s indukčním předpokladem dokazuje tvrzení.

Příklad

Podobně jednoduše se dá strukturální indukcí dokázat, že nahradíme-li ve formuli VL výrokové symboly formulemi, dostaneme opět formuli VL.

Obsah

Zatím jsme se věnovali jen tzv. syntaktické stránce výrokové logiky. Řekli jsme si, co je to jazyk VL a co jsou formule VL. Zatím však nevíme, co to je pravdivá formule apod. Formule jsou jisté posloupnosti symbolů jazyka, samy o sobě však nemají žádný význam. Přiřazení významu syntaktickým objektům je záležitostí tzv. **sémantiky**. Právě sémantice výrokové logiky se budeme nyní věnovat.

Definice

(Pravdivostní) ohodnocení je libovolné zobrazení e výrokových symbolů daného jazyka výrokové logiky do množiny $\{0, 1\}$, tj. ohodnocení e přiřazuje každému výrokovému symbolu p hodnotu 0 nebo 1.

0 a 1 reprezentují pravdivostní hodnoty nepravda a pravda. Hodnotu přiřazenou ohodnocením e symbolu p označujeme $e(p)$. Je tedy $e(p) = 0$ nebo $e(p) = 1$. Je-li dáno ohodnocení e, můžeme říci, co je to pravdivostní hodnota formule.

Pravdivostní hodnota formule VL

Pravdivostní hodnota libovolné formule je pravdivostním ohodnocením jednoznačně určena a je definována takto:

Definice

Nechť je dáno ohodnocení e. **Pravdivostní hodnota formule φ při ohodnocení e**, označujeme ji $\| \varphi \|_e$, je definována následovně:

- Je-li φ výrokovým symbolem p, pak $\| p \|_e = e(p)$.
- Je-li φ složená formule, tedy má tvar $\neg\psi$ nebo $\psi \Rightarrow \theta$, pak
  $\| \neg\psi \|_e = 1$, pokud $\| \psi \|_e = 0$;
  $\| \neg\psi \|_e = 0$, pokud $\| \psi \|_e = 1$ a

  $\| \psi \Rightarrow \theta \|_e = 1$, pokud $\| \psi \|_e = 0$ nebo $\| \theta \|_e = 1$;
  $\| \psi \Rightarrow \theta \|_e = 0$ jinak.

Je-li $\| \varphi \|_e = 1$ ($\| \varphi \|_e = 0$), říkáme, že **formule φ je při ohodnocení e pravdivá** (**nepravdivá**).

Poznámka: Uvědomme si, že nemá smysl říci „formule φ je pravdivá“ nebo „nepravdivá“ (musíme říci při jakém ohodnocení!). Neboli pravdivost formule chápeme vždy vzhledem k nějakému ohodnocení.

Poznámka: Alternativně lze zadat pravdivostní funkci (operaci) logických spojek tabulkami:

a	$\neg\!\!\!\neg\, a$
0	1
1	0

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

Pak pravdivostní hodnotu složených formulí $\neg\psi$, $\psi \Rightarrow \theta$, při ohodnocení e, lze definovat takto:

$\|\, \neg\psi \,\|_e = \neg\!\!\!\neg\, \|\, \psi \,\|_e$;

$\|\, \psi \Rightarrow \theta \,\|_e = \|\, \psi \,\|_e \to \|\, \theta \,\|_e$.

Tautologie, splnitelné formule a kontradikce

Definice

Formule VL se nazývá

- **tautologie**, je-li při každém ohodnocení pravdivá,
- **kontradikce**, je-li při každém ohodnocení nepravdivá,
- **splnitelná**, je-li pravdivá při alespoň jednom ohodnocení.

Zřejmě splnitelné formule jsou právě ty, které nejsou kontradikcemi. Fakt, že formule φ je tautologie, zapisujeme $\models \varphi$, popřípadě $\| \varphi \| = 1$.

Označení: Je-li φ formule VL, pak píšeme $\varphi(p_1,\ldots,p_n)$, chceme-li zdůraznit, že všechny výrokové symboly vyskytující se ve φ jsou mezi $p_1,\ldots,p_n$ (tj. žádný jiný výrokový symbol než některý z $p_1,\ldots,p_n$ se ve φ nevyskytuje).

Lemma

Platí-li pro ohodnocení e a e', že $e(p_1) = e'(p_1),\ldots,e(p_n) = e'(p_n)$, pak pro každou formuli $\varphi(p_1,\ldots,p_n)$ platí $\parallel \varphi \parallel_e = \parallel \varphi \parallel_{e'}$.

Důkaz: Jednoduchý – strukturální indukcí pro formule VL. Vlastnost $\mathscr{V}$ je tvrzení Lemmy.

Jinak řečeno, pravdivostní hodnota formule VL závisí jen na tom, jaké hodnoty přiřazuje dané ohodnocení výrokovým symbolům, které se ve formuli vyskytují.

Pro n výrokových symbolů $p_1, \dots, p_n$ existuje právě 2^n různých ohodnocení symbolů $p_1, \dots, p_n$ (každému výrokovému symbolu se přiřazuje 0 nebo 1). Tyto úvahy jsou základem tzv. tabulkové metody pro zjištění pravdivostních hodnot formule.

Tabulková metoda slouží k vypsání (tabelaci) hodnot zadaných formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ v tabulce. Tabulka má 2^n řádků a $n + m$ sloupců, kde n je počet všech výrokových symbolů, které se vyskytují ve formulích $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Do řádků píšeme všechna možná ohodnocení těchto symbolů a hodnoty formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.
Formule φ_i je tautologií (kontradikcí, splnitelnou), právě když jí odpovídající sloupec pravdivostních hodnot obsahuje ve všech řádcích samé 1 (samé 0, aspoň jednu 1).

Příklady: Viz přednáška a cvičení.

Sémantické vyplývání

Dále si definujeme pojem sémantického vyplývání, který formalizuje intuitivní pojem „vyplývání“ z množin formulí.

Definice

Formule ψ **sémanticky plyne z formule** φ, značíme $\varphi \models \psi$, jestliže ψ je pravdivá při každém ohodnocení, při kterém je pravdivá φ. Pokud ψ sémanticky plyne z φ a naopak, říkáme, že φ a ψ jsou **sémanticky ekvivalentní**.
Obecněji, formule ψ **sémanticky plyne z množiny formulí** T, značíme $T \models \psi$, je-li ψ pravdivá při každém ohodnocení, při kterém je pravdivá každá formule z T.

Pro ověření sémantického vyplývání je možné použít tabelaci (tabulkovou metodu).

Příklady: Viz přednáška a cvičení.

Příklad na sémantické vyplývání

Zjistěte zda z množiny $T = \{p \Rightarrow \neg q, q, \neg(((p \Rightarrow \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge \neg q))\}$ sémanticky plynou následující tři formule: $r \wedge \neg q$; r; $(p \Rightarrow \neg q) \vee r$.

K řešení použijeme tabulkovou metodu pomocí které zjistíme, při kterých ohodnoceních nabývají formule z T současně pravdivostní hodnotu 1 (viz šedě podbarvené řádky). Nyní se stačí podívat, zda při těchto (dvou) ohodnoceních jsou jednotlivé formule ze zadání (modré) také pravdivé (v obou případech). Pokud ano, pak sémanticky vyplývají z T. Jinak sémanticky nevyplývají z T.

p	q	r	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \vee r$	$r \wedge \neg q$	$\neg(((p \Rightarrow \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge \neg q))$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1

Zřejmě tedy $p \Rightarrow \neg q, q, \neg(((p \Rightarrow \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge \neg q)) \models (p \Rightarrow \neg q) \vee r$.

Poznámka: Zřejmě formule φ, ψ jsou sémanticky ekvivalentní, pokud $\| \varphi \|_e = \| \psi \|_e$ pro každé ohodnocení e.

Poznámka: Formule φ, ψ jsou sémanticky ekvivalentní, právě když je formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ tautologie. Tedy sémanticky ekvivalentní formule od sebe nelze rozlišit pravdivostí.

Některé tautologie povyšujeme na tzv. **zákony VL**.

Některé zákony VL, kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule VL:

1. $\varphi \vee \neg\varphi$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (zákon dvojí negace)
4. $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ (distributivní zákon)
9. $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (de Morganův zákon)
12. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$ (náhrada negace implikace)
14. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ (zákon kontrapozice)
15. $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$ (tranzitivita implikace).

Je užitečné si uvědomit ještě další tautologie:

a) $(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$, $(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ (idempotentnost $\vee, \wedge$)

b) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

c) $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$

d) $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$.

I zde jsou φ a ψ libovolné formule výrokové logiky.

Znovu sémantické vyplývání

Už víme, že VL má svou **syntaxi** a **sémantiku**. Syntaxe VL definuje pojmy jako je jazyk a formule, ale formulemi (i ostatními syntaktickými pojmy) se zabývá čistě z pohledu jejich tvaru. Sémantika VL zavádí pojem pravd. ohodnocení a pravdivost formule při daném ohodnocení. Sémantika přiřazuje význam syntaktickým pojmům.

Pojem vyplývání má v logice ústřední význam (zopakujme jej):

Definice

Mějme formule $\psi_1, \dots, \psi_n$ ($n \geq 0$). Formule φ **sémanticky plyne** z formulí $\psi_1, \dots, \psi_n$ (značíme $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$), jestliže $\| \varphi \|_e = 1$ pro každé ohodnocení e takové, že $\| \psi_1 \|_e = 1, \dots, \| \psi_n \|_e = 1$.

Formule $\psi_1, \dots, \psi_n$ nazýváme **předpoklady**, formuli φ **sémantický důsledek** formulí $\psi_1, \dots, \psi_n$.

Příklad

Dokažte, že je-li $\psi \models \varphi$ a $\varphi \models \chi$, pak $\psi \models \chi$.

Řešení: Máme ukázat, že $\psi \models \chi$. Nechť *e* je ohodnocení, při kterém je ψ pravdivá. Dle předpokladu $\psi \models \varphi$ je při *e* pravdivá také φ a tedy dle předpokladu $\varphi \models \chi$ je při *e* pravdivá také χ, což jsme měli ukázat.

Sémantická podoba věty o dedukci I

Věta

Nechť $\chi_1, \ldots, \chi_n$, φ, ψ jsou formule VL. Pak platí:
$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, právě když $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Důkaz:

$(\Rightarrow)$

Nejprve předpokládejme $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$ a dokažme $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule z $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ pravdivé, máme $\| \psi \|_e = 1$. Jsou-li ale $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ při ohodnocení e pravdivé, pak dostáváme $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Rovněž platí $\| \varphi \|_e = 1$. To jest $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = \| \varphi \|_e \to \| \psi \|_e = 1 \to \| \psi \|_e = 1$. Z vlastností $\to$ pak plyne, že $\| \psi \|_e = 1$. To jest $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

$(\Leftarrow)$ ...

Sémantická podoba věty o dedukci II

Věta

Nechť $\chi_1, \ldots, \chi_n$, φ, ψ jsou formule VL. Pak platí:
$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, právě když $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Důkaz:

($\Rightarrow$) ...

($\Leftarrow$)

Naopak předpokládejme $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule $\chi_1, \ldots \chi_n$ pravdivé, je $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$. Mohou nastat dva případy:

1) $\| \varphi \|_e = 0$, odkud $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 0 \rightarrow \| \psi \|_e = 1$.
2) $\| \varphi \|_e = 1$, to jest při ohodnocení e jsou pravdivé všechny formule z $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ a tedy $\| \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Odtud $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1 \rightarrow 1 = 1$, v důsledku čehož $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Příklady aplikace sémantické podoby věty o dedukci:

- Můžeme okamžitě tvrdit, že $\models \varphi \Rightarrow \varphi$, protože φ sémanticky plyne z φ triviálně.
- Dvojnásobnou aplikací VoD na zřejmý fakt $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$ dostáváme $\models \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.
- Dále, k tomu abychom ověřili, že φ sémanticky plyne z formulí $\chi_1, \ldots, \chi_n$ stačí ověřit, že formule $\chi_1 \Rightarrow (\chi_2 \Rightarrow (\ldots(\chi_n \Rightarrow \varphi)\ldots))$ je tautologie.