Matematická logika

přednáška devátá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle textu R. Bělohlávka:
Matematická logika – poznámky k přednáškám, 2004.

Obsah

Základní motivace

Klasická logika (VL a PL) nestačí při modelování tzv. vágních tvrzení, např. „Petr je silný.“, „Teplota je vysoká.“, „Zákazník je spokojený.“. Uvedená tvrzení často (intuitivně) nepovažujeme za ani úplně nepravdivá, ani úplně pravdivá, tj. za tvrzení, jejichž pravdivostní hodnota leží mezi 0 a 1, např. je to $0,9$ (skoro pravda), $0,5$ (napůl pravda), $0,1$ (skoro nepravda).
S vágními tvrzeními se setkáváme téměř při každém popisu reálného světa. Jedná se tedy o netriviální a širokou oblast.

Jako první se uvedenou problematikou z pohledu možných aplikací zabýval Lofti A. Zadeh v práci *Fuzzy sets. Information and Control (1965)*.
Fuzzy logika (FL) našla významné uplatnění v praxi a je v současné době intenzívně zkoumána. FL je bohatě rozvinuta jak po stránce komerčně úspěšných aplikací (zejména fuzzy regulátory), tak po stránce teoretických základů.

Množinu pravdivostních hodnot budeme značit L. Požadujeme, aby $0,1 \in L$ a aby L byla částečně uspořádána relací $\leq$.
Například tedy $L = [0,1]$; $L = \{0,1\}$ (klasická logika);
$L = \{0,1\} \times \{0,1\}$ (nelineární logika).

Musí existovat operace na L modelující logické spojky (zejména $\otimes$ pro konjunkci a $\rightarrow$ pro implikaci). Tyto operace by měly mít přirozené vlastnosti odpovídající vlastnostem požadovaným po logických spojkách (například komutativita $\otimes$, monotónnost $\otimes$ apod.).
Dále, aby ve FL „dobře fungovalo“ pravidlo MP, je potřeba, aby:
$a \otimes b \leq c \;\Leftrightarrow\; a \leq b \rightarrow c$.

Výše uvedené požadavky na strukturu pravdivostních hodnot (a některé neuvedené) vedou k jedné ze základních struktur pravdivostních hodnot ve FL, k tzv. reziduovaným svazům – viz následující definici.

Definice

Úplný reziduovaný svaz je struktura $\mathscr{L} = (L; \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$, kde

(1) $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ je úplný svaz (s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1)

(2) $(L; \otimes, 1)$ je komutativní monoid (tj. $\otimes$ je binární operace na L, která je komutativní, asociativní a platí $a \otimes 1 = a$)

(3) $\otimes, \rightarrow$ jsou binární operace na L (nazývané „**násobení**“ a „**reziduum**“) splňující tzv. **podmínku adjunkce**:

$$a \otimes b \leq c \quad \text{právě když} \quad a \leq b \rightarrow c.$$

Mezi nejčastěji používané struktury pravdivostních hodnot patří ty, které mají za nosič reálný interval $[0,1]$ s přirozeným uspořádáním, tedy $a \wedge b = \min(a,b)$, $a \vee b = \max(a,b)$. Na nich se používají tři páry adjungovaných operací $\otimes$ a $\rightarrow$:

(I) **Łukasiewiczovy operace:**

$$a \otimes b = \max(a+b-1,0), \qquad a \rightarrow b = \min(1-a+b,1)$$

(II) **Gödelovy operace:**

$$a \otimes b = \min(a,b), \qquad a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad a \leq b, \\ b, & \text{jinak} \end{cases}$$

(III) **součinové operace:**

$$a \otimes b = a \cdot b, \qquad a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad a \leq b, \\ b/a, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka: V reziduovaném svazu definujeme některé odvozené operace. Mezi nejdůležitější patří tzv. **bireziduum** ($\leftrightarrow$) a **negace** ($\neg$) definované následovně: $\neg a = a \rightarrow 0$, $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Příklady: Viz přednáška a cvičení.

Poznámka: Je-li $L = \{0, 1\}$, $\otimes$ je operace klasické konjunkce a $\rightarrow$ je operace klasické implikace, pak příslušný reziduovaný svaz (ve kterém je uspořádání dáno vztahem $0 \leq 1$) je svazem pravdivostních hodnot klasické logiky (a je to až na jiným způsobem definované operace dvouprvková Booleova algebra). Obecněji platí, že Booleovy algebry jsou „vlastně“ reziduované svazy. (Připomeňme, že Booleova algebra je ohraničený, distributivní a komplementární svaz).

Reziduované svazy jsou bohaté struktury, které kromě Booleových algeber zahrnují také například Heytingovy algebry, MV-algebry, algebry lineární logiky a další významné algebraické struktury.

Obsah

Nejúspěšnějšími aplikacemi FL jsou tzv. **fuzzy regulátory** a tzv. **pravidlové fuzzy systémy**. Ty nalezly zejména v Japonsku (začátkem 90. let) rozsáhlé komerční uplatnění. (Důvodem úspěchu není blízkost fuzzy přístupu k východnímu myšlení, ale povaha japonského trhu, tedy vstřícnost k novinkám, nízká cena senzorů a koncepční jednoduchost).

Zmiňme nyní některé aplikace pravidlových fuzzy systémů a fuzzy regulátorů:

- spotřební elektronika (fuzzy pračka, fuzzy myčka, fuzzy vysavač, fuzzy kamera apod.)
- řízení metra v japonských městech (fuzzy regulátor zajišťuje plynulé rozjíždění a brzdění, lépe než člověk; nižší spotřeba energie)
- řízení velké průmyslové helikoptéry ovládané hlasem (tuto úlohu se klasickými metodami nepodařilo vyřešit)
- řízení velkých průmyslových systémů (např. pece)
- fotoaparát s automatickým vyhledáváním centrálního bodu pro zaostření (Minolta)

Použití fuzzy technologie (pokračování):

- ABS, řízení motoru, volnoběhu a klimatizace (Honda, Nissan, Subaru)
- řízení výtahů (Mitsubishi)
- korekce chyb ve slévárenských zařízeních na plastické výrobky (Omron)
- palmtop Kanji určený pro rozpoznávání ručně psaných textů
- rozpoznávání řeči
- fuzzy SQL (Omron)
- pomoc při hledání identifikačních a profilových systémů pachatele (velký, ne příliš těžký, víceméně starý, . . .)
- analýza portfolia při investování na kapitálovém trhu
- efekty ve filmech (např. Lord of the Rings)
- jazykové filtry na zprávy s nechtěným obsahem textu (např. v chatovacích místnostech)
- fuzzy technologie se nově používají i v některých mikroprocesorech.

Poznamenejme, že hlavní aplikace FL tvoří fuzzy relační modelování, tj. modelování pomocí fuzzy relací. Kromě zmíněných pravidlových fuzzy systémů se jedná o

- rozhodování
- vyhledávání
- shlukování, rozpoznávání.

Další zajímavou oblastí aplikací FL je fuzzy logické programování. Jde o rozšíření klasického logického programování o principy fuzzy modelování (zejména: databáze faktů může obsahovat fakt s nějakým stupněm pravdivosti, např. fakt JEUSPORNY(OCTAVIA19TDI) se stupněm 0,9, fakt JEUSPORNY(OCTAVIA14MPI) se stupněm 0,3). Problematika se rozvíjí.

Obsah

Existuje mnoho fuzzy logik. Každá FL je dána nějakou třídou $\mathscr{L}$ struktur pravdivostních hodnot. Třída $\mathscr{L}$ je dána nějakými dodatečnými požadavky kladenými na logické spojky (respektive operace na $\mathscr{L}$). Tak například chceme-li, aby platilo $\neg\neg a = a$ (tzv. zákon dvojí negace), omezíme se na třídu $\mathscr{L}$ pravdivostních hodnot definovanou $\mathscr{L} = \{\mathbf{L} | \mathbf{L}$ je úplný reziduovaný svaz splňující $\neg\neg a = a\}$. Dalším požadavkem může být, aby L byla lineárně uspořádaná apod. Z výše uvedeného je patrné, že požadujeme-li $\neg\neg a = a$ a $a \otimes b = a \wedge b$, pak $\mathscr{L}$ sestává právě z úplných Booleových algeber. Požadujeme-li navíc, aby množiny pravdivostních hodnot byly lineárně uspořádané, obsahuje $\mathscr{L}$ jedinou strukturu pravdivostních hodnot – dvouprvkovou Booleovu algebru, tj. strukturu pravdivostních hodnot klasické logiky.

Dále se budeme zabývat základními pojetími FL.

Neohodnocená syntaxe

Nechť $\mathscr{L}$ je tedy nějaká třída struktur pravdivostních hodnot. Jazyk FL s neohodnocenou syntaxí obsahuje na rozdíl od jazyka klasické výrokové logiky tyto symboly spojek: $\times, \Rightarrow, \curlywedge, \curlyvee$, dále symboly některých pravdivostních hodnot, např. $\mathbb{0}, \mathbb{1}$ (a můžeme chtít $\mathbb{a}$ pro každé $a \in [0, 1]$). Je-li $\mathbf{L} \in \mathscr{L}$ struktura pravdivostních hodnot, pak $\mathbf{L}$-ohodnocení e je libovolné zobrazení z množiny všech výrokových symbolů do množiny L všech pravdivostních hodnot, tj. pro výrokový symbol p je $e(p) \in L$ chápána jako pravdivostní hodnota tvrzení, které je označeno p.

Formule jsou definovány jako obvykle: každý výrokový symbol je formule; $\mathbb{0}, \mathbb{1}$ (a obecně $\mathbb{a}$) jsou formule; jsou-li φ, ψ formule, pak $(\varphi \times \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \curlywedge \psi), (\varphi \curlyvee \psi)$ jsou formule.

Pravdivostní hodnota formule φ při ohodnocení e se definuje následovně:
$\| p \|_e = e(p)$,
$\| \mathbb{0} \|_e = 0$, $\| \mathbb{1} \|_e = 1$ (a obecně $\| \mathbb{a} \|_e = a$),
$\| \varphi \times \psi \|_e = \| \varphi \|_e \otimes \| \psi \|_e$,
$\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = \| \varphi \|_e \rightarrow \| \psi \|_e$,
$\| \varphi \curlywedge \psi \|_e = \| \varphi \|_e \wedge \| \psi \|_e$,
$\| \varphi \curlyvee \psi \|_e = \| \varphi \|_e \vee \| \psi \|_e$.

Formule φ se nazývá: **L**-tautologie, pokud $\| \varphi \|_e = 1$ pro každé **L**-ohodnocení e; $\mathscr{L}$-tautologie (popř. pouze tautologie, pokud je $\mathscr{L}$ zřejmá z kontextu), pokud je to **L**-tautologie pro každou **L** $\in \mathscr{L}$.

Všimněme si, že je-li $\mathscr{L}$ jednoprvková, jejímž jediným prvkem **L** je dvouprvková Booleova algebra, pak výše uvedené pojmy se shodují s odpovídajícími pojmy z klasické logiky (speciálně: pojem pravdivostní hodnota formule; tautologie v klasické logice jsou právě $\mathscr{L}$-tautologie). Tedy klasická logika „vznikne“ z obecné fuzzy logiky vhodnou parametrizací (volbou $\mathscr{L}$).

Poznamenejme ještě, že při tomto přístupu je možné zcela obdobně, jak jsme provedli ve VL, zavést pojem důkazu a pojem dokazatelné formule. Věta o korektnosti a úplnosti má pak následující tvar: formule φ je $\mathscr{L}$-tautologií, právě když je dokazatelná z příslušných axiomů (jejich podoba je závislá na $\mathscr{L}$; zde nebudeme rozvádět).

Ohodnocená syntaxe

Ohodnocená syntaxe je, z hlediska celkového pojetí fuzzy přístupu, přirozenější než neohodnocená syntaxe. Pracujeme zde s jednou pevnou strukturou **L** pravdivostních hodnot. **Ohodnocená formule** je dvojice $\langle \varphi, a \rangle$, kde φ je formule podle definice výše (tj. jako u neohodnocené syntaxe) a a je pravdivostní hodnota. Namísto s formulemi se pracuje s ohodnocenými formulemi. Teorií je množina ohodnocených formulí, podobně axiomy jsou ohodnocené formule. To, že $\langle \varphi, a \rangle$ patří do teorie, říká, že formuli φ považujeme za pravdivou aspoň ve stupni a.

Důkaz z teorie je posloupnost ohodnocených formulí. Speciálně pravidlo MP říká „z $\langle \varphi, a \rangle$ a $\langle \varphi \to \psi, b \rangle$ odvoď $\langle \psi, a \otimes b \rangle$". Podrobněji, důkaz z množiny A axiomů a z teorie T je posloupnost $\langle \varphi_1, a_1 \rangle, \ldots, \langle \varphi_n, a_n \rangle$ splňující pro každé $i = 1, \ldots, n$, že buď (1) $\langle \varphi_i, a_i \rangle$ je axiom (patří do A) nebo (2) $\langle \varphi_i, a_i \rangle$ je předpoklad (patří do T) nebo (3) $\langle \varphi_i, a_i \rangle$ vznikl aplikací odvozovacího pravidla na předchozí prvky důkazu. Končí-li takový důkaz ohodnocenou formulí $\langle \varphi, a \rangle$, říkáme mu **důkaz φ ve stupni** a. Může se stát (a je to přirozené), že pro φ existuje celá řada důkazů končících $\langle \varphi, a_i \rangle$ (čím větší a_i, tím je ten důkaz lepší; $\langle \varphi, 1 \rangle$ znamená, že φ je dokázáno „úplně", tj. že jsme dokázali, že φ je úplně pravdivé). **Stupeň dokazatelnosti** φ z dané teorie je pak definován jako supremum všech a_i, pro která existuje důkaz končící $\langle \varphi, a_i \rangle$. Věta o úplnosti říká, že stupeň dokazatelnosti dané formule je roven stupni tautologičnosti (pravdivosti) dané formule. Přitom stupeň tautologičnosti formule φ je dán jako infimum všech $\| \varphi \|_e$ pro všechna možná **L**-ohodnocení e.