Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Matematická logika: řešené příklady ke cvičením

doc. RNDr. Miroslav Kolařík, Ph.D.

Olomouc 2017

Toto skriptum[1] je určeno zejména studentům Katedry informatiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého. Text sestává z řešených příkladů, které se obsahově shodují se sylabem předmětu Matematická logika. Všem čtenářům přeji, ať je jim text ku prospěchu.

V Olomouci, 25. května 2017

Miroslav Kolařík

Poznámka. Chyby a překlepy, kterých si všimnete, pošlete prosím na autorův e-mail: miroslav.kolarik@upol.cz

Obsah

[1] Vytvořeno za podpory projektu FRUP_2017_052: Tvorba a inovace výukových opor vybraných matematických předmětů katedry informatiky.

1 Úvod do logiky, výroková logika

Příklad 1 Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků s kvantifikátory:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 > 0$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2} = |x|$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 10$

(d) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2)$

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y$

(f) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 10$

(g) $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x + y = 10.$

Řešení.

(a) Není pravdivý pro $x = 0$.

(b) Je pravdivý.

(c) Není pravdivý pro $x = 0$.

(d) Není pravdivý, např. pro $x = 3$, $y = -3$.

(e) Je pravdivý pro $x = 1$.

(f) Je pravdivý.

(g) Není pravdivý.

Poznamenejme, že z úloh (f) a (g) je vidět, že záleží na pořadí různých kvantifikátorů.

Příklad 2 Určete, zda jsou uvedené výrokové formule tautologiemi:

(a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.

Řešení. Je-li formule tautologií, pak je pravdivá při každém ohodnocení všech výrokových symbolů, které se v ní vyskytují. V případě (a) i (b) jsou ve formulích jen dva různé výrokové symboly: p a q. Stačí tedy zjistit pravdivostní hodnoty pro čtyři různá ohodnocení výrokových symbolů p a q, konkrétně pro ohodnocení e_1 takové, že $e_1(p) = 0$, $e_1(q) = 0$, pro ohodnocení e_2 takové, že $e_2(p) = 0$, $e_2(q) = 1$, pro ohodnocení e_3 takové, že $e_3(p) = 1$, $e_3(q) = 0$ a nakonec pro ohodnocení e_4 takové, že $e_4(p) = 1$, $e_4(q) = 1$. Přehledně situaci znázorňují následující tabulky:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	φ
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Z posledního sloupce první tabulky vidíme, že formule $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ je kondradikcí, t.j. není splnitelná, ani tautologií. Z posledního sloupce druhé tabulky vidíme, že formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (označena v tabulce písmenem φ) je tautologie, neboť je pravdivá při každém ohodnocení e_1, e_2, e_3 a e_4.

Příklad 3 Mějme dánu tříhodnotovou logiku s pravdivostními hodnotami $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Definujme na ní spojky negace a implikace takto:

a	$\neg a$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Určete, zda je formule $\neg(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$ splnitelná.

Řešení. Pomocí tabelace zjistíme pravdivostní hodnotu zadané formule při všech možných ohodnoceních. Vzhledem k tomu, že se v zadané formuli vyskytují právě dva různé výrokové symboly (p a q), bude mít tabulka (kromě záhlaví) $3 \cdot 3 = 9$ řádků.

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	$\neg(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$
0	0	1	0	1	0
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0

Z posledního sloupce v tabulce je patrné, že zadaná formule je kondradikcí, a tedy není splnitelná.

Příklad 4 Rozhodněte, zda formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$ sémanticky vyplývá z formulí $\neg(p \Leftrightarrow q)$, $p \vee q$ a $\neg(q \wedge p)$.

Řešení. Pomocí tabelace zjistíme, pro která pravdivostní ohodnocení jsou zároveň pravdivé formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$, $p \vee q$ a $\neg(q \wedge p)$. Poté se podíváme, je-li při těchto (dvou) pravdivostních ohodnoceních pravdivá i formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$.

p	q	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$p \vee q$	$\neg(q \wedge p)$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$
0	0	0	0	1	0
0	1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0	1

Z tabulky vidíme, že formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$ sémanticky nevyplývá z formulí $\neg(p \Leftrightarrow q)$, $p \vee q$ a $\neg(q \wedge p)$, neboť při ohodnocení e takovém, že $e(p) = 1$, $e(q) = 0$ je formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$ nepravdivá.

Příklad 5 Rozhodněte, jestli formule φ ve tvaru $p \Rightarrow q$ sémanticky vyplývá z množiny formulí $T = \{\neg q \Rightarrow \neg r, p \Rightarrow r\}$.

Řešení. Pomocí tabelace zjistíme, při kterých pravdivostních ohodnoceních jsou současně všechny formule z množiny T pravdivé. Poté se podíváme, je-li při stejných pravdivostních ohodnoceních pravdivá i formule φ.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \Rightarrow \neg r$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$
0	0	0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	**1**	**1**	**1**

Z tabulky vidíme, že formule φ sémanticky vyplývá z množiny formulí T, tedy $\neg q \Rightarrow \neg r, p \Rightarrow r \models p \Rightarrow q$.

Příklad 6 Zjistěte zda z množiny $T = \{p \Rightarrow \neg q, q, \neg(((p \Rightarrow \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge \neg q))\}$ sémanticky plynou následující tři formule: $r \wedge \neg q$; r; $(p \Rightarrow \neg q) \vee r$.

Řešení. K řešení použijeme tabulkovou metodu pomocí které zjistíme, při kterých ohodnoceních nabývají formule z T současně pravdivostní hodnotu 1 (viz šedě podbarvené řádky). Nyní se stačí podívat, zda při těchto (dvou) ohodnoceních jsou jednotlivé formule ze zadání (modré) také pravdivé (v obou případech). Pokud ano, pak sémanticky vyplývají z T. Jinak sémanticky nevyplývají z T.

p	q	r	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \vee r$	$r \wedge \neg q$	$\neg(((p \Rightarrow \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge \neg q))$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1

Zřejmě tedy $T \models (p \Rightarrow \neg q) \vee r$, $T \not\models r \wedge \neg q$ a $T \not\models r$.

Příklad 7 Formuli $((p \Rightarrow \neg q) \wedge r) \vee (\neg p \Leftrightarrow r)$ převeďte do úplné disjunktivní a úplné konjunktivní normální formy.

Řešení. Nejprve pomocí tabulkové metody (tabelací) zjistíme, při kterých možných ohodnoceních je zadaná formule φ pravdivá a při kterých nepravdivá. Poté sestrojíme odpovídající úplné elementární konjunkce (ÚEK) a úplné elementární disjunkce (ÚED), ze kterých již snadno získáme úplnou disjunktivní normální formu (ÚDNF) a úplnou konjunktivní normální formu (ÚKNF).

p	q	r	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \wedge r$	$\neg p \Leftrightarrow r$	φ	ÚEK	ÚED
0	0	0	1	0	0	0		$p \vee q \vee r$
0	0	1	1	1	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	1	0	1	0	0	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	1	1	1	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
1	0	0	1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
1	0	1	1	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	
1	1	0	0	0	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	1	1	0	0	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

ÚDNF: $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
ÚKNF: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Příklad 8 Uveďte tři zákony výrokové logiky

(a) s jedním výrokovým symbolem, který se může vyskytovat vícekrát

(b) se dvěma různými výrokovými symboly, které se mohou vyskytovat vícekrát

(c) se třemi různými výrokovými symboly, které se mohou vyskytovat vícekrát.

Řešení. Některé (často používané) tautologie výrokové logiky se povyšují na tzv. zákony výrokové logiky. Například:

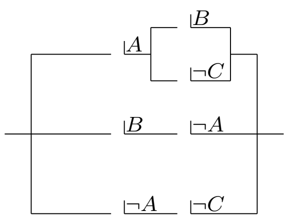
(a) $\varphi \vee \neg\varphi$ (zákon vyloučeného třetího)
$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (zákon sporu)
$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (zákon dvojí negace)

(b) $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (de Morganův zákon)
$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ (zákon kontrapozice)

(c) $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ (distributivní zákon)
$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$ (tranzitivita implikace).

Zde φ, ψ, χ jsou libovolné formule výrokové logiky, můžeme je tedy po řadě nahradit atomickými formulemi (tj. výrokovými symboly) p, q, r, čímž splníme zadání tohoto příkladu.

Příklad 9 S využitím zákonů logiky, zjednodušte následující logický obvod:



Řešení. Nejprve si logický obvod přepíšeme do odpovídající formule φ výrokové logiky:

$$((A \wedge (B \vee \neg C)) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg C)).$$

Podformuli ve tvaru $A \wedge (B \vee \neg C)$ přepíšeme pomocí distributivního zákona do tvaru $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$. Výchozí formule φ je tedy ekvivalentní s formulí:

$$(((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg C)).$$

S využitím asociativního a komutativního zákona (pro spojku $\vee$) je předchozí formule ekvivalentní s následující formulí ψ:

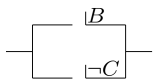
$$((A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C)).$$

Dále aplikujeme distributivní a komutativní zákon, a to na podformuli $(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)$ a na podformuli $(A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$ a obdržíme formuli χ ve tvaru:

$$((B \wedge (A \vee \neg A)) \vee (\neg C \wedge (A \vee \neg A))),$$

která je ekvivalentní s formulí ψ a tedy i s výchozí formulí φ (což snadno plyne z tranzitivity ekvivalence).

Jelikož $A \vee \neg A$ je tautologie a platí, že tautologie v konjukci s nějakou formulí je ekvivalentní s touto formulí, víme, že $(B \wedge (A \vee \neg A)) \Leftrightarrow B$ a podobně $(\neg C \wedge (A \vee \neg A)) \Leftrightarrow \neg C$. Odsud je χ (a tedy) i φ ekvivalentní s formulí $B \vee \neg C$, kterou již dále nelze zjednodušovat. Výsledný zjednodušený logický obvod (sémanticky ekvivalentní s výchozím obvodem) vypadá tedy takto:



Příklad 10 Nahraďte spojku negace a spojku implikace spojkou

(a) $\Uparrow$ (Sheffer – NAND)

(b) $\Downarrow$ (Nicod – NOR).

Řešení. Připomeňme, že

$$a \Uparrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge b),$$

$$a \Downarrow b \Leftrightarrow \neg(a \vee b).$$

S využitím toho, že $a \Leftrightarrow (a \wedge a)$ a toho, že $a \Leftrightarrow (a \vee a)$ máme:

$$\neg a \Leftrightarrow \neg(a \wedge a) \Leftrightarrow (a \Uparrow a);$$

$$\neg a \Leftrightarrow \neg(a \vee a) \Leftrightarrow (a \Downarrow a).$$

Zbývá nám vyjádřit spojku implikace jen pomocí spojky $\Uparrow$ (resp. $\Downarrow$). K tomu využijeme výše napsané a některých zákonů výrokové logiky. Dostaneme tak:

$$\begin{aligned}
(a \Rightarrow b) &\Leftrightarrow (\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow (a \Uparrow \neg b) \Leftrightarrow (a \Uparrow (b \Uparrow b));\\
(a \Rightarrow b) &\Leftrightarrow (\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg\neg(\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg(\neg a \Downarrow b) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \neg((a \Downarrow a) \Downarrow b) \Leftrightarrow (((a \Downarrow a) \Downarrow b) \Downarrow ((a \Downarrow a) \Downarrow b)).
\end{aligned}$$

Příklad 11 Strukturální indukcí dokažte, že počet levých závorek je v každé formuli výrokové logiky roven počtu pravých závorek.

Řešení. Vlastnost $\mathcal{V}$ je „mít stejný počet levých a pravých závorek“. Zřejmě každý výrokový symbol má vlastnost $\mathcal{V}$ (neboť každý výrokový symbol má 0 levých a 0 pravých závorek). Mají-li formule φ a ψ vlastnost $\mathcal{V}$, pak vlMáme tedy dokázat, že jsou-li z T dokazatelné formule $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ, pak je z T dokazatelná i formule ψ. Jsou-li však z T dokazatelné formule $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ, znamená to, že existuje důkaz $\chi_1, \dots, \chi_n$ formule $\varphi \Rightarrow \psi$ z T (tj. χ_n je formulí $\varphi \Rightarrow \psi$) a že existuje důkaz $\theta_1, \dots, \theta_m$ formule φ z T (tj. θ_m je formulí φ). Nyní však stačí vzít posloupnost $\chi_1, \dots, \chi_n, \theta_1, \dots, \theta_m, \psi$ – ta je již důkazem ψ z T. Vlastnost $\mathcal{V}$ mají i formule $\neg\varphi$ a $(\varphi \Rightarrow \psi)$ (neboť v obou dvou případech přibude stejný počet levých a pravých závorek, konkrétně pro $\neg\varphi$ nula a pro $(\varphi \Rightarrow \psi)$ jedna), což spolu se základním krokem (indukčním předpokladem) dokazuje tvrzení.

Příklad 12 Dokažte, že pokud $\chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi$, pak $\psi_1, \dots, \psi_k, \chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi$. Poté ukažte, že obrácené tvrzení neplatí.

Řešení. Důkaz je přímým důsledkem faktu, že pokud jsou při pravdivostním ohodnocení e pravdivé všechny formule $\psi_1, \dots, \psi_k, \chi_1, \dots, \chi_n$, pak jsou pravdivé i formule $\chi_1, \dots, \chi_n$. Abychom prokázali, že obrácené tvrzení neplatí, stačí nám najít konkrétní příklad takový, že $\psi_1, \dots, \psi_k, \chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi$ a přitom $\chi_1, \dots, \chi_n \not\models \varphi$. Položme $\psi_1 = \neg(p \wedge q)$, $\chi_1 = p \Leftrightarrow q$ a $\varphi = \neg p$. Pak vskutku $\psi_1, \chi_1 \models \varphi$ a současně $\chi_1 \not\models \varphi$, což jsme chtěli ukázat.

Příklad 13 Dokažte, že je-li $\psi \models \varphi$ a $\varphi \models \chi$, pak $\psi \models \chi$.

Řešení. Máme ukázat, že $\psi \models \chi$. Nechť e je ohodnocení, při kterém je ψ pravdivá. Dle předpokladu $\psi \models \varphi$ je při e pravdivá také φ a tedy dle předpokladu $\varphi \models \chi$ je při e pravdivá také χ, což jsme měli ukázat.

Příklad 14 Dokažte, že pokud $\chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi$ a $\chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, pak $\chi_1, \dots, \chi_n \models \psi$. Poté ukažte, že obrácené tvrzení neplatí.

Řešení. Mějme pravdivostní ohodnocení e takové, že všechny formule $\chi_1, \dots, \chi_n$ jsou při něm pravdivé. Pak z obou předpokladů plyne, že $\|\varphi\|_e$=1 a $\|\varphi \Rightarrow \psi\|_e$=1, odkud dostáváme $\|\psi\|_e = 1$, což jsme chtěli dokázat. Abychom prokázali, že obrácené tvrzení neplatí, stačí nám najít konkrétní příklad takový, že $\chi_1, \dots, \chi_n \models \psi$ a přitom $\chi_1, \dots, \chi_n \not\models \varphi$ nebo $\chi_1, \dots, \chi_n \not\models \varphi \Rightarrow \psi$. Stačí položit $\chi_1 = p \wedge q$, $\psi = p \Leftrightarrow q$ a $\varphi = \neg p$. Pak $\chi_1 \models \psi$, ale $\chi_1 \not\models \varphi$.

Příklad 15 Dokažte sémantickou podobu věty o dedukci:
Nechť $\chi_1, \dots, \chi_n$, φ, ψ jsou formule výrokové logiky. Pak platí: $\chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$ právě, když $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Řešení. Nejprve předpokládejme $\chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$ a dokažme $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule z $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi$ pravdivé, máme $\| \psi \|_e = 1$. Jsou-li ale $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi$ při ohodnocení e pravdivé, pak dostáváme $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Rovněž platí $\| \varphi \|_e = 1$. To jest $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = \| \varphi \|_e \to \| \psi \|_e = 1 \to \| \psi \|_e = 1$. Z vlastností $\to$ pak plyne, že $\| \psi \|_e = 1$. To jest $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Naopak předpokládejme $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule $\chi_1, \dots \chi_n$ pravdivé, je $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$. Mohou nastat dva případy:

1) $\| \varphi \|_e = 0$, odkud $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 0 \to \| \psi \|_e = 1$.
2) $\| \varphi \|_e = 1$, to jest při ohodnocení e jsou pravdivé všechny formule z $\chi_1, \dots, \chi_n, \varphi$ a tedy $\| \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Odtud $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1 \to 1 = 1$, v důsledku čehož $\chi_1, \dots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Na základě platnosti tautologie $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$ máme tvrzení dokázáno (neboť se nám podařilo dokázat implikaci jedním i druhým směrem).

Příklad 16 Tabelujte všechny booleovské funkce dvou proměnných.

Řešení. Všech šestnáct booleovských funkcí dvou proměnných x_1 a x_2 zachycuje následující tabulka (rozdělená na dvě části):

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Příklad 17 Dokažte, že pro každou množinu formulí T a formule φ, ψ platí, že z $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ a $T \vdash \varphi$ plyne $T \vdash \psi$.

Řešení. Máme dokázat, že jsou-li z T dokazatelné formule $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ, pak je z T dokazatelná i formule ψ. Jsou-li však z T dokazatelné formule $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ, znamená to, že existuje důkaz $\chi_1, \dots, \chi_n$ formule $\varphi \Rightarrow \psi$ z T (tj. χ_n je formulí $\varphi \Rightarrow \psi$) a že existuje důkaz $\theta_1, \dots, \theta_m$ formule φ z T (tj. θ_m je formulí φ). Posloupnost $\chi_1, \dots, \chi_n, \theta_1, \dots, \theta_m, \psi$ je již hledaným důkazem ψ z T.

Příklad 18 Bez použití věty o úplnosti dokažte, že formule $\varphi \Rightarrow \varphi$ je dokazatelná z prázdné množiny předpokladů.

Řešení. Uvedeme posloupnost formulí, která je hledaným důkazem z prázdné množiny předpokladů. Za každou formuli přidáme krátký komentář, aby bylo jasné, odkud se daná formule vzala.
$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ ... axiom dle (A1)
$(\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$ ... axiom dle (A2)
$(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ ... modus ponens na předchozí dvě formule
$\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ ... axiom dle (A1)
$\varphi \Rightarrow \varphi$ ... modus ponens na předchozí dvě formule.

Příklad 19 Bez použití věty o úplnosti dokažte, že pro libovolné formule φ, ψ platí
(a) $\vdash \neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
(b) $\vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$
(c) $\vdash \varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.

Řešení. Postupně uvedeme posloupnost formulí, které jsou hledanými důkazy, přičemž za každou z nich napíšeme krátký komentář.
(a)
$\vdash \neg\varphi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ ... axiom dle (A1)
$\vdash (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ ... axiom dle (A3)
$\vdash \neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ ... tranzitivita implikace
(b)
$\vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi)$ ... tvrzení (a)
$\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi$ ... věta o dedukci
$\vdash (\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi) \Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi)$ ... axiom dle (A3)
$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi) \Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi)$ ... monotonie dokazatelnosti
$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ ... modus ponens
$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ ... věta o dedukci
$\vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ ... věta o dedukci
(c)
$\vdash \neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ ... tvrzení (b)
$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi)$ ... axiom dle (A3)
$\vdash \varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ ... modus ponens.

Příklad 20 Rozdělme důkaz $\varphi_1, \ldots, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n$ z T na dvě části: $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ a $\varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n$. Zdůvodněte, zda budou nově vzniklé posloupnosti opět důkazem z T, nebo ne?

Řešení. Posloupnost $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ zřejmě bude důkazem z T. Druhá posloupnost $\varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n$ již ale důkazem z T být nemusí, protože se v ní může vyskytovat formule, která není ani axiomem, ani předpokladem z T, ale vznikla odvozovacím pravidlem modus ponens z formulí, které jsou obsaženy pouze mezi formulemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$.

Příklad 21 Dokažte, že pokud $T \vdash \varphi$, pak existuje nekonečně mnoho vzájemně různých důkazů φ z T.

Řešení. Pokud φ je dokazatelná z T, pak existuje důkaz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ formule φ z T. Je-li (A) axiom, pak i posloupnost $(A), \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ je důkazem φ z T. Vzhledem k tomu, že axiomů je nekonečně mnoho, jsme hotovi.

Příklad 22 Dokažte, že pokud $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ a $S \vdash \psi \Rightarrow \chi$, pak $T \cup S \vdash \varphi \Rightarrow \chi$.

Řešení. Tvrzení plyne přímo z monotonie dokazatelnosti a z tranzitivity implikace.

Příklad 23 Dokažte, že $p \vee q \nvdash \neg(p \Leftrightarrow q)$.

Řešení. Stačí ukázat, že $p \vee q \nvDash \neg(p \Leftrightarrow q)$. To je ale snadné, stačí vzít ohodnocení e takové, že $e(p) = 1$ a $e(q) = 1$. Při tomto ohodnocení totiž formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$ sémanticky nevyplývá z formule $p \vee q$.

2 Predikátová logika

Příklad 24 Mějme dán jazyk typu $\langle R, F, \sigma \rangle$, kde $F = \{f, g, c\}$, $\sigma(f) = 2$, $\sigma(g) = 1$ a $\sigma(c) = 0$. Určete, které z následujících posloupností symbolů jsou termy jazyka tohoto typu:

(a) $f(x)$

(b) $f(c, f)$

(c) g

(d) x

(e) c

(f) $g(x)$

(g) $f(x, c)$

(h) $f(g(g(x)))$

(i) $f(c, c)$

(j) $h(x, y, z)$.

Řešení.

(a) $f(x)$ není term, protože $\sigma(f) = 2$

(b) $f(c, f)$, není term, jelikož samotný funkční symbol f nemůže být argumentem sebe sama

(c) funkční symbol g není term, protože nemá argument

(d) proměnná x je term

(e) konstanta c je term

(f) $g(x)$ je term

(g) $f(x, c)$ je term

(h) $f(g(g(x)))$ není term, jelikož $\sigma(f) \neq 1$

(i) $f(c, c)$ je term

(j) $h(x, y, z)$ není term, neboť $h \notin F$.

Příklad 25 Mějme jazyk typu $\langle R, F, \sigma \rangle$, kde $F = \{f, c\}$, $R = \{r, s\}$ a $\sigma(f) = 1$, $\sigma(c) = 0$, $\sigma(r) = 2$ a $\sigma(s) = 1$. Určete, které z následujících posloupností symbolů jsou formule jazyka tohoto typu:

(a) x

(b) $r(x, s(x))$

(c) $\neg f(c)$

(d) $(\forall x)r(x, y, z)$

(e) $(\exists x)x$

(f) $s(x)$

(g) $r(f(c), f(x))$

(h) $s(x) \Rightarrow (\forall x)s(x)$

(i) $(\forall s)r(x, y)$

(j) $(\forall x)(\exists y)r(x, y)$.

Řešení.

(a) x není formule (je to proměnná, tedy term)

(b) $r(x, s(x))$ není formule, protože $s(x)$ je formule a na tu nemůže být aplikován relační symbol r

(c) $\neg f(c)$ není formule, neboť $f(c)$ je term a na něj nelze aplikovat logickou spojku negaci

(d) $(\forall x)r(x, y, z)$ není formule, neboť $\sigma(r) \neq 3$

(e) $(\exists x)x$ není formule, jelikož x není formule

(f) $s(x)$ je (atomická) formule

(g) $r(f(c), f(x))$ je formule

(h) $s(x) \Rightarrow (\forall x)s(x)$ je formule

(i) $(\forall s)r(x, y)$ není formule, protože se zde kvantifikuje přes relační symbol s

(j) $(\forall x)(\exists y)r(x, y)$ je formule.

Příklad 26 Najděte všechny podformule ve formuli $(\exists x)(r(f(x)) \Rightarrow (\forall y)\neg r(y))$.

Řešení. Daná formule má celkem šest podformulí: sebe samu, tedy $(\exists x)(r(f(x)) \Rightarrow (\forall y)\neg r(y))$ a dále $r(f(x)) \Rightarrow (\forall y)\neg r(y)$, $r(f(x))$, $(\forall y)\neg r(y)$, $\neg r(y)$ a $r(y)$.

Příklad 27 Určete minimální jazyk indukovaný formulí $(\forall x)\neg r(x, y, f(z)) \Rightarrow (\exists y)s(f(x), g(y, z))$.

Řešení. Ze struktury formule snadno poznáme, že minimální jazyk nutně obsahuje unární funkční symbol f, binární funkční symbol g, ternární relační symbol r a binární relační symbol s. Další relační a funkční symboly nejsou potřeba, neboť se v dané formuli nevyskytují. Jazyk $\langle R, F, \sigma\rangle$ je tedy dán takto: $R = \{r, s\}$, $F = \{f, g\}$, přičemž $\sigma(r) = 3$, $\sigma(s) = 2$, $\sigma(f) = 1$ a $\sigma(g) = 2$.

Příklad 28 Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích:
(a) $(\forall x)(\exists y)(r(x, y) \Rightarrow s(x, y, z))$
(b) $\neg(\exists x)r(x, y) \Rightarrow \neg(\forall z)s(z, x, y)$.

Řešení. (a) V dané formuli se vyskytují tři proměnné, přičemž x a y mají dva vázané výskyty a žádný volný výskyt a proměnná z má jeden volný výskyt a žádný vázaný výskyt.
(b) V dané formuli má proměnná x jeden vázaný a jeden volný výskyt, proměnná y má dva volné výskyty a žádný vázaný a proměnná z má jeden vázaný a žádný volný výskyt.

Příklad 29 Pro následující dvě formule určete výsledky substituce termu $f(x, y)$ za proměnnou x a rozhodněte, je-li tato substituce korektní.
(a) $r(x, y) \Rightarrow (\forall z)\neg r(z, z)$
(b) $r(x, x) \Rightarrow (\forall y)r(x, y)$.

Řešení. (a) Výsledkem substituce je formule $r(f(x, y), y) \Rightarrow (\forall z)\neg r(z, z)$. Tato substituce je korektní.
(b) Výsledkem substituce je formule $r(f(x, y), f(x, y)) \Rightarrow (\forall y)r(f(x, y), y)$. Tato substituce není korektní.

Příklad 30 Uvažujme jazyk typu $\langle\{p, \leq\}, \{c, \circ\}, \sigma\rangle$, kde $\sigma(c) = 0$, $\sigma(p) = 1$, $\sigma(\leq) = \sigma(\circ) = 2$. Nechť $M = \mathbb{Z}$. Definujme relace $p^{\mathbf{M}}$, $\leq^{\mathbf{M}}$ a funkce $c^{\mathbf{M}}$ a $\circ^{\mathbf{M}}$ následovně:

$$p^{\mathbf{M}} = \{m \in M \mid m \text{ je větší nebo rovno nule}\},$$

$$\leq^{\mathbf{M}} = \{\langle m_1, m_2\rangle \in M \times M \mid m_1 \text{ je menší nebo rovno } m_2\},$$

$$c^{\mathbf{M}} = 0, \quad m_1 \circ^{\mathbf{M}} m_2 = m_1 + m_2.$$

Určete v této struktuře hodnotu termu $(x \circ (c \circ y)) \circ x$ při ohodnocení v, je-li $v(x) = 10$, $v(y) = 50$.

Řešení. Máme $\| (x \circ (c \circ y)) \circ x \|_{\mathbf{M},v} = \| x \circ (c \circ y) \|_{\mathbf{M},v} + \| x \|_{\mathbf{M},v} =$
$= (\| x \|_{\mathbf{M},v} + \| c \circ y \|_{\mathbf{M},v}) + \| x \|_{\mathbf{M},v} =$
$= (\| x \|_{\mathbf{M},v} + (\| c \|_{\mathbf{M},v} + \| y \|_{\mathbf{M},v})) + \| x \|_{\mathbf{M},v} =$
$= (v(x) + (c^{\mathbf{M}} + v(y))) + v(x) = (10 + (0 + 50)) + 10 = 70.$

Příklad 31 Dokažte duální formu specifikace (tzv. zákon abstrakce):

$$\vdash \varphi(x/t) \Rightarrow (\exists x)\varphi,$$

je-li term t substituovatelný za proměnnou x.

Řešení. V prvním kroku použijeme axiom specifikace (A4) aplikovaný na formuli $\neg\varphi$:

$$\vdash (\forall x)\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi(x/t).$$

Dále použijeme tautologii z výrokové logiky $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$ ve tvaru:

$$\vdash ((\forall x)\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi(x/t)) \Rightarrow (\varphi(x/t) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi).$$

Z výše uvedených formulí odvodíme pomocí odvozovacího pravidla modus ponens:

$$\vdash \varphi(x/t) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi,$$

odkud po reformulaci dostáváme výsledek:

$$\vdash \varphi(x/t) \Rightarrow (\exists x)\varphi.$$

Poznamenejme, že při substituci proměnné x za sebe sama obdržíme jako důsledek následující fakt: $\vdash \varphi \Rightarrow (\exists x)\varphi$.

Příklad 32 Dokažte tvrzení o distribuci kvantifikace:

$$\vdash (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi),$$

mají-li formule φ, ψ nejvýše jednu volnou proměnnou a to x.

Řešení. S využitím axiomu specifikace (A4) a věty o dedukci platí:

$$(\forall x)\varphi \vdash \varphi$$

a

$$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \varphi \Rightarrow \psi.$$

S pomocí monotonie dokazatelnosti a odvozovacího pravidla modus ponens aplikovaného na obě předchozí formule obdržíme:

$$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi), (\forall x)\varphi \vdash \psi.$$

Nyní použijeme odvozovací pravidlo generalizace ať máme:

$$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi), (\forall x)\varphi \vdash (\forall x)\psi.$$

Závěrem aplikujeme dvakrát větu o dedukci a dostáváme výsledek:

$$\vdash (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi).$$

Příklad 33 Najděte jednoduchý model tak, aby v něm neplatila formule

$$((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi) \Rightarrow (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi).$$

Řešení. Vezměme si jazyk typu $\langle R, \emptyset, \sigma \rangle$, kde $R = \{r\}$, $\sigma(r) = 1$. Strukturu tohoto jazyka $\mathbf{M} = \langle M, \{r^{\mathbf{M}}\}, \emptyset \rangle$ určuje množina $M = \{0, 1\}$ a unární relace $r^{\mathbf{M}} = \{1\}$. Nechť formule φ je $r(x)$ a formule ψ je $r(y)$. Pak v $\mathbf{M}$ pro ohodnocení $v(x) = 1$ a $v(y) = 0$ máme $||(\forall x)r(x) \Rightarrow (\forall x)r(y)||_{\mathbf{M},v} = 1$, ale $||(\forall x)(r(x) \Rightarrow r(y))||_{\mathbf{M},v} = 0$. Prokázali jsme tak, že obrácená implikace z předchozího příkladu neplatí.

Příklad 34 Vymyslete příklad teorie, která nemá žádný model.

Řešení. Mějme jazyk typu $\langle R, F, \sigma \rangle$, kde $R = \{r\}$, $F = \emptyset$ a r je unární. Teorie $T = \{(\forall x)r(x), (\exists x)\neg r(x)\}$ zřejmě nemá žádný model.

Příklad 35 Převeďte dané formule do prenexního tvaru:
(a) $(\forall y)\neg(\exists x)r(x, y, z) \Rightarrow (\exists z)(\forall y)r(z, y, w)$
(b) $\neg\neg(\forall w)((\exists x)s(x, w) \Rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg(\exists x)s(w, x))$.

Řešení. Na zadané formule postupně provedeme ekvivalentní úpravy, které je převedou do prenexního tvaru.
(a) Ze zadané formule přesuneme negaci před výrazem $(\exists x)$ a přeznačíme proměnné:

$$(\forall y)(\forall x)\neg r(x, y, z) \Rightarrow (\exists z')(\forall y')r(z', y', w).$$

Poté přesuneme kvantifikátory s příslušnými proměnnými na začátek (před jádro formule), čímž obdržíme formuli v prenexním tvaru (ekvivalentní se výchozí formulí):

$$(\exists y)(\exists x)(\exists z')(\forall y')(\neg r(x, y, z) \Rightarrow r(z', y', w)).$$

(b) V prvním kroku odstraníme nadbytečné negace, přičemž poslední zbylou negaci před výrazem $(\exists x)$ přesuneme a současně přeznačíme proměnné:

$$(\forall w)((\exists x')s(x', w) \Rightarrow (\forall x)\neg s(w, x)).$$

Dále přesuneme kvantifikátory s příslušnými proměnnými na začátek (před jádro formule), čímž obdržíme formuli v prenexním tvaru (ekvivalentní se zadanou formulí):

$$(\forall w)(\forall x')(\forall x)(s(x', w) \Rightarrow \neg s(w, x)).$$