podmínku). Obdobně pro zbylé dvě skupiny. Dále snadno vyčíslíme $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$. Postupným dopočítáním

$$a_{12} = 1705.$$

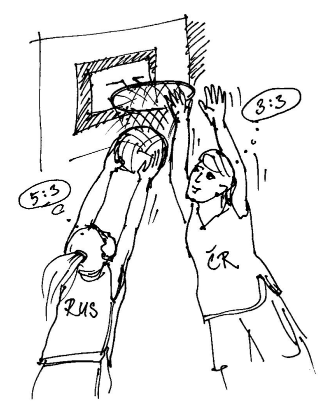
Též bychom dle uvedené teorie mohli odvodit explicitní vzorec pro n-tý člen takto zadané posloupnosti (viz 3.10). Charakteristický polynom dané rekurentní rovnice je $x^3 - x^2 - x - 1$ s jedním reálným a dalšími dvěma komplexními kořeny, které můžeme vyjádřit pomocí vztahů (‖1.1‖). □

1.32. Skóre basketbalového utkání mezi týmy České republiky a Ruska vyznělo po první čtvrtině 12 : 9 pro ruský tým. Kolika způsoby se mohlo vyvíjet skóre?

Řešení. Označíme-li $P_{(k,l)}$ počet způsobů, kterými se mohlo vyvíjet skóre basketbalového utkání, které skončilo $k : l$, tak pro $k, l \geq 3$ platí rekurentní vztah:

$$P_{(k,l)} = P_{(k-3,l)} + P_{(k-2,l)} + P_{(k-1,l)} + P_{(k,l-1)} + P_{(k,l-2)} + \\ + P_{(k,l-3)}.$$

(Způsoby, kterými se mohlo vyvíjet utkání s výsledným skóre $k : l$, si rozdělíme na šest po dvou disjunktních podmnožin podle toho, které družstvo vstřelilo koš a za kolik bodů (1, 2, či 3).) Ze symetrie úlohy zřejmě platí $P_{(k,l)} = P_{(l,k)}$. Dále pro $k \geq 3$ platí:



$$P_{(k,2)} = P_{(k-3,2)} + P_{(k-2,2)} + P_{(k-1,2)} + P_{(k,1)} + P_{(k,0)},$$
$$P_{(k,1)} = P_{(k-3,1)} + P_{(k-2,1)} + P_{(k-1,1)} + P_{(k,0)},$$
$$P_{(k,0)} = P_{(k-3,0)} + P_{(k-2,0)} + P_{(k-1,0)},$$

což spolu s počátečními podmínkami $P_{(0,0)} = 1$, $P_{(1,0)} = 1$, $P_{(2,0)} = 2$, $P_{(3,0)} = 4$, $P_{(1,1)} = 2$, $P_{(2,1)} = P_{(1,1)} + P_{(0,1)} + P_{(2,0)} = 5$, $P_{(2,2)} = P_{(0,2)} + P_{(1,2)} + P_{(2,1)} + P_{(2,0)} = 14$ dává

$$P_{(12,9)} = 497178513.$$ □

Poznámka. Vidíme, že rekurentní vztah v tomto příkladu má složitější formu, než kterou jsme se zabývali v teorii a tudíž neumíme vyčíslit libovolné číslo $P_{(k,l)}$ explicitně, nýbrž pouze postupným výpočtem od počátečních členů. Takové rovnice nazýváme parciální diferenční rovnice, protože členy posloupnosti jsou značeny dvěma nezávislými proměnnými (k, l).

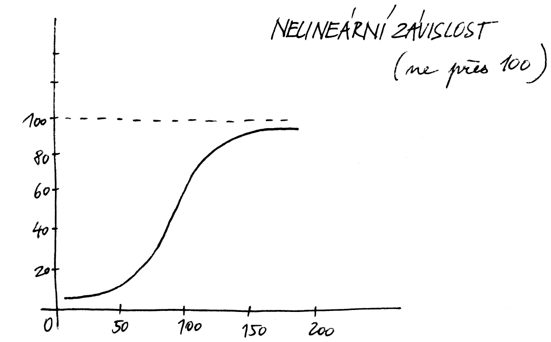
Dosazením y_n za y a $p(n)$ za p dostáváme

$$\frac{p(n+1) - p(n)}{p(n)} = -\frac{r}{K}p(n) + r,$$

tj. roznásobením dostáváme diferenční rovnici prvního řádu (kde hodnota $p(n)$ vystupuje v první i v druhé mocnině)

$$p(n+1) = p(n)\big(1 - \frac{r}{K}p(n) + r\big). \tag{1.10}$$

Zkuste si promyslet nebo vyzkoušet chování tohoto modelu pro různé hodnoty r a K. Na obrázku je průběh hodnot pro parametry $r = 0{,}05$ (tj. pětiprocentní nárůst v ideálním stavu), $K = 100$ (tj. zdroje limitují hodnotu na 100 jedinců) a $p(0)$ jsou dva jedinci.



Všimněme si, že počáteční přibližně exponenciální růst se skutečně později zlomí a hodnota se postupně blíží kýženému limitu 100 jedinců. Pro p blízké jedné a K daleko větší než r bude pravá strana rovnice (1.10) přibližně $p(n)(1 + r)$, tzn. chování je obdobné Malthusiánskému modelu. Naopak při p přibližně K bude pravá strana přibližně $p(n)$. Pro větší počáteční hodnoty p než K budou hodnoty klesat, pro menší než K růst, takže systém bude zpravidla postupně oscilovat kolem hodnoty K.

4. Pravděpodobnost

Teď se podíváme na jiný obvyklý případ skalárních hodnot funkcí – sledované hodnoty často nejsou známy ani explicitně vzorcem, ani implicitně nějakým popisem. Jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.

1.13. Co je pravděpodobnost? Jako jednoduchý příklad může sloužit obvyklé házení kostkou se šesti stěnami s označeními

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Pokud popisujeme matematický model takového házení „poctivou“ kostkou, budeme očekávat a tudíž i předepisovat, že každá ze stran padá stejně často. Slovy to vyjadřujeme „každá předem vybraná stěna padne s pravděpodobností $\frac{1}{6}$“.

Pokud si ale třeba sami nožíkem vyrobíme takovou kostku z kusu dřeva, je jisté, že skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné. Pak můžeme z velikého počtu pokusů usoudit na relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů a tyto ustanovit jako pravděpodobnosti v našem matematickém popisu. Nicméně při sebevětším počtu pokusů nemůžeme vyloučit možnost, že se náhodou povedla velice nepravděpodobná kombinace výsledků a že jsme proto náš matematický model skutečnosti pro naši kostku nevybrali dobře.

O lineárních rekurentních formulích (diferenčních rovnicích) vyšších řádů s konstantími koeficienty si povíme více v kapitole 3.

D. Pravděpodobnost

Uveďme si několik jednoduchých příkladů na klasickou pravděpodobnost, kdy zkoumáme nějaký pokus, který má konečně mnoho možných výsledků („všechny případy“) a nás zajímá, kdy výsledek pokusu bude náležet nějaké podmnožině možných výsledků („příznivé případy“). Hledaná pravděpodobnost je pak rovna poměru počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Klasickou pravděpodobnost můžeme použít tam, kde předpokládáme (víme), že každý z možných výsledků má stejnou pravděpodobnost toho, že nastane (například při hodech kostkou).

1.33. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šestibokou kostkou padne číslo větší než 4?

Řešení. Všech možných výsledků je šest (tvoří množinu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), příznivé možnosti jsou dvě ($\{5, 6\}$). Hledaná pravděpodobnost je tedy $2/6 = 1/3$. □

1.34. Ze skupiny osmi mužů a čtyř žen náhodně vybereme skupinu pěti lidí. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň tři ženy?

Řešení. Pravděpodobnost spočítáme jako podíl počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Příznivé případy rozdělíme podle toho, kolik je v náhodně vybrané skupině mužů: mohou v ní být buď dva, nebo jeden muž. Skupinek o pěti lidech s jedním mužem je osm (záleží pouze na výběru muže, ženy v ní musí být všechny), skupinek se dvěma muži je potom $c(8, 2) \cdot c(4, 3) = \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{3}$ (vybereme dva muže z osmi a nezávisle na tom tři ženy ze čtyř, tyto dva výběry můžeme nezávisle kombinovat a podle pravidla součinu dostáváme uvedený počet skupin). Všech možných skupin o pěti lidech pak můžeme sestavit $c(12, 5) = \binom{12}{5}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{8 + \binom{4}{3}\binom{8}{2}}{\binom{12}{5}}.$$ □

Uveďme si příklad, při jehož řešení není vhodné používat klasické pravděpodobnosti:

1.35. Jaká je pravděpodobnost toho, že čtenář této úlohy vyhraje příští týden alespoň milión dolarů v loterii?

Řešení. Takováto formulace úlohy je neúplná, neposkytuje dostatek údajů. Předvedeme **chybné** řešení. Základní prostor všech možný jevů je dvouprvkový: buď vyhraje nebo nevyhraje. Příznivý jev je jeden (vyhraje), hledaná pravděpodobnost je tedy $1/2$ (a to je zjevně špatná odpověď). □

V dalším budeme pracovat s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti v nejjednodušším přiblížení. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku. To ale neznamená, že by se takovým přemýšlením neměli zabývat matematici (nejspíše ve spolupráci s jinými experty). Později se vrátíme k pravděpodobnosti coby teorii popisující chování nahodilých procesů nebo i plně determinovaných dějů, kde ovšem neznáme přesně všechny určující parametry.

Matematická statistika pak umožňuje posuzovat, do jaké míry lze očekávat, že vybraný model je ve shodě s realitou, resp. umožňuje určit parametry modelu tak, aby docházelo k co nejlepší shodě s pozorováním a zároveň umí odhadnout míru spolehlivosti zvoleného modelu.

K matematické pravděpodobnosti i statistice ovšem budeme potřebovat dosti rozsáhlý matematický aparát, který budeme mezitím několik semestrů budovat.

Na příkladu naší neumělé kostky si to můžeme představit tak, že v teorii pravděpodobnosti budeme pracovat s parametry p_i pro pravděpodobnost jednotlivých hodnot stran a budeme požadovat pouze, aby všechny tyto pravděpodobnosti byly nezáporné a jejich součet byl

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

Při volbě konkrétních hodnot p_i pro konkrétní kostku pak v matematické statistice budeme schopni odhadnout s jakou spolehlivostí tento model naší kostce odpovídá.

Naším skromným cílem je teď pouze naznačit, jak abstraktně zachytit pravděpodobnostní úvahy ve formalizovaných matematických objektech. Následující odstavce tak budou ve své podstatě pouhými cvičeními v jednoduchých operacích nad množinami a jednoduché kombinatorice (tj. výpočtech počtu možností, jak mohou být splněny dané podmínky kladené na konečné množiny prvků).

1.14. Náhodné jevy. Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme *základní prostor*. Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$ představujícími jednotlivé *možné výsledky*. Každá podmnožina $A \subseteq \Omega$ představuje možný *jev*. Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru se nazývá *jevové pole*, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$ (tj. základní prostor je jevem),
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl),
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$ (tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení).

Zjevně je i komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A. Průnik dvou jevů je opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subseteq \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Slovy se tak dá jevové pole charakterizovat jako systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme *náhodné jevy* (vzhledem k $\mathcal{A}$).

Poznámka. V předchozím příkladě je porušena základní podmínka použití klasické pravděpodobnosti, totiž to, že každý z elementárních jevů má stejnou pravděpodobnost toho, že nastane.

1.36. Do řady v kině o $2n$ místech je náhodně rozmístěno n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

Řešení. Všech možných rozmístění lidí v řadě je $(2n)!$, rozmístění splňujících podmínky je $2(n!)^2$: máme dvě možnosti výběru pozice mužů, tedy i žen – buď všichni muži budou sedět na lichých místech (a tedy ženy na sudých), nebo všichni muži na sudých (a tedy ženy na lichých místech); na nich jsou pak muži i ženy rozmístěny libovolně. Výsledná pravděpodobnost je tedy

$$p(n) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!},$$

$$p(2) \doteq 0{,}33, \;\; p(5) \doteq 0{,}0079, \;\; p(8) \doteq 0{,}00016\,. \qquad \square$$

1.37. Do výtahu osmipatrové budovy nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném poschodí. Jaká je pravděpodobnost, že vystoupí

i) všichni v šestém poschodí,
ii) všichni ve stejném poschodí,
iii) každý v jiném poschodí?

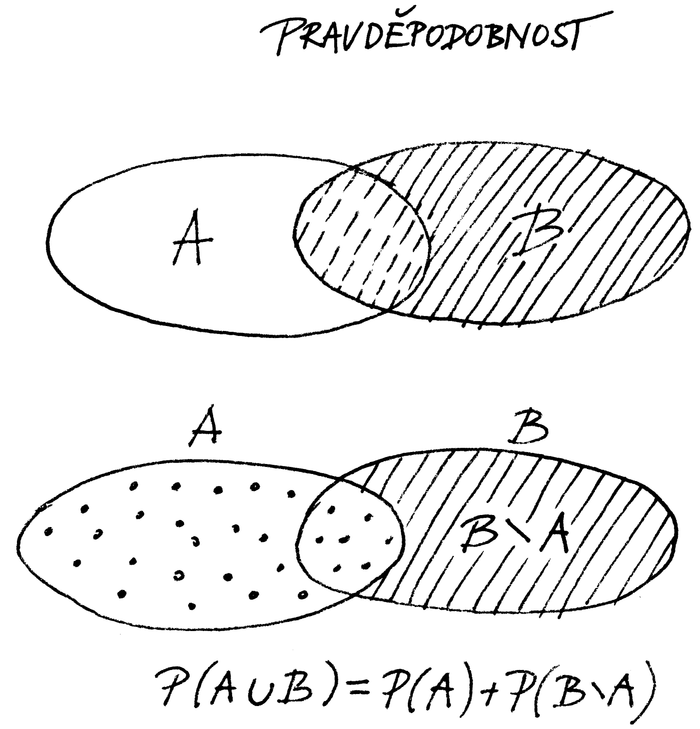
Řešení. Základní prostor všech možných jevů je prostor všech možných způsobů vystoupení 5 osob z výtahu. Těch je 8^5.

V prvním případě je jediná příznivá možnost vystoupení, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^5}$, ve druhém případě máme osm možností, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^4}$ a konečně ve třetím je počet příznivých případů dán pětiprvkovou variací z osmi prvků (z osmi pater vybíráme pět, ve kterých se vystoupí a dále kteří lidé vystoupí ve vybraných poschodích), celkem je hledaná pravděpodobnost ve třetím případě rovna (viz 1.6 a 1.8)

$$\frac{v(5,8)}{V(5,8)} = \frac{8\cdot 7\cdots 4}{8^5} \doteq 0{,}2050781250. \qquad \square$$

1.38. Náhodně vybereme celé kladné číslo menší než 10^5. Jaká je pravděpodobnost, že bude složeno pouze z cifer 0, 1, 5 a zároveň bude dělitelné číslem 5?

Řešení. Čísel splňující danou podmínku je $2\cdot 3^4 - 1$ (kromě poslední cifry máme na každý řád na výběr ze tří cifer, případné číslice 0 na začátku slova nepíšeme. Všech celých kladných čísel menších než 10^5 je $10^5 - 1$, podle klasické pravděpodobnosti dostáváme, že hledaná pravděpodobnost je $\frac{2\cdot 3^4-1}{10^5-1}$. $\square$



Pro naše házení kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jevové pole je tvořeno všemi podmnožinami množiny Ω. Např. náhodný jev $\{1, 3, 5\}$ pak interpretujeme jako „padne liché číslo“.

Něco málo terminologie, která by měla dále připomínat souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá *jistý jev*, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá *nemožný jev*,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \subseteq \Omega$ se nazývají *elementární jevy*,
- *společné nastoupení jevů* A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i\in I} A_i$, *nastoupení alespoň jednoho z jevů* A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i\in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou *neslučitelné jevy*, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za *důsledek* jev B, když $A \subseteq B$,

Přestavte si příklady všech uvedených pojmů pro jevový prostor popisující házení kostkou nebo obdobně pro házení mincí!

1.15. Definice. *Pravděpodobnostní prostor* je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $\mathcal{A}$ je jevové pole podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

- P je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- P je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \cap B = \emptyset$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1, tj. $P(\Omega) = 1$.

Funkci P nazýváme *pravděpodobností* na jevovém poli $\mathcal{A}$.

Zjevně je okamžitým důsledkem našich definic řada prostých, ale užitečných tvrzení. Např. pro všechny jevy platí

$$P(A^c) = 1 - P(A),$$

kde $A^c = \Omega \setminus A$ je *jev opačný* (používá se též pojmů doplňkový či komplementární) k jevu A. Dále můžeme matematickou indukcí

1.39. Ze sáčku s pěti bílými a pěti červenými koulemi náhodně vytáhneme tři (koule do sáčku nevracíme). Jaká je pravděpodobnost, že dvě budou bílé a jedna červená?

Řešení. Rozdělme uvažovaný jev na sjednocení tří disjunktních jevů: podle toho, kolikátou vytáhneme červenou kouli. Pravděpodobnosti, že vytáhneme koule přesně ve zvoleném pořadí jsou: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$. Celkem $\frac{5}{12}$.

Jiné řešení. Uvažme počet všech možných trojic vytažených koulí (koule jsou mezi sebou rozlišitelné), tedy $\binom{10}{3}$. Trojic, které obsahují právě dvě bílé koule je potom $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ (dvě bílé koule můžeme vytáhnout $\binom{5}{2}$ způsoby, k nim pak červenou pěti způsoby). □

1.40. Z klobouku, ve kterém je pět bílých, pět červených a šest černých koulí, náhodně vytahujeme koule (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že pátá vytažená koule bude černá?

Řešení. Spočítáme dokonce obecnější úlohu. Totiž pravděpodobnost toho, že i-tá vytažená koule bude černá, je stejná pro všechna i, $1 \leq i \leq 16$. Můžeme si totiž představit, že vytáhneme postupně všechny koule. Každá taková posloupnost vytažených koulí (od první vytažené koule po poslední), složená z pěti bílých, pěti červených a šesti černých koulí, má stejnou pravděpodobnost vytažení a pro výpočet hledané pravděpodobnosti můžeme opět použít model klasické pravděpodobnosti. Zmíněných posloupností je $P(5, 5, 6) = \frac{16!}{5! \cdot 5! \cdot 6!}$. Počet posloupností, kde na i-tém místě je černá koule, zbytek libovolný, je tolik, kolik je libovolných posloupností pěti bílých, pěti červených a pěti černých koulí, tedy $P(5, 5, 5) = \frac{15!}{5!5!5!}$. Celkem je tedy hledaná pravděpodobnost

$$\frac{P(5,5,5)}{P(5,5,6)} = \frac{\frac{15!}{5!5!5!}}{\frac{16!}{6!5!5!}} = \frac{3}{8}.$$ □

Poznámka. Vraťme se k házení kostkou a zkusme popsat jevy ze základního prostoru Ω vznikající při házení tak dlouho, dokud nepadne šestka, ne však více než stokrát.

Pro jeden hod samostatně je základním prostorem šest čísel od jedné do šesti a jde o klasickou pravděpodobnost. Pro celé série našich hodů bude základní prostor daleko větší – bude to množina konečných posloupností čísel od jedné do šestky, které buď končí šestkou, mají nejvýše 100 členů a všechna předchozí čísla jsou menší než šest, nebo jde o 100 čísel od jedné do pěti. Jevem A může být např. podmnožina „házení končí druhým pokusem“. Všechny příznivé elementární jevy pak jsou

$$[1, 6],\ [2, 6],\ [3, 6],\ [4, 6],\ [5, 6].$$

snadno rozšířit aditivitu na jakýkoliv konečný počet vzájemně neslučitelných jevů $A_i \subseteq \Omega$, $i \in I$, tj.

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i),$$

kdykoliv $A_i \cap A_j = \emptyset$, pro všechna $i, j \in I$, $i \neq j$.

1.16. Definice. Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω. *Klasická pravděpodobnost* je pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí

$$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$ značí počet prvků množiny $A \in \mathcal{A}$.

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost, ověřte si samostatně všechny požadované axiomy.

1.17. Sčítání pravděpodobností. U neslučitelných jevů je sčítání

pravděpodobností pro výskyt alespoň jednoho z nich přímo požadováno v základní definici pravděpodobnosti. Obecně je sčítání pravděpodobností pro výskyty jevů složité. Problém totiž je, že pokud jsou jevy slučitelné, částečně máme v součtu pravděpodobností započteny příznivé výskyty vícekrát.

Nejjednodušší je si nejprve představit situaci se dvěma slučitelnými jevy A, B. Uvažme nejprve klasickou pravděpodobnost, kde jde vlastně o počítání prvků v podmnožinách. Pravděpodobnost výskytu alespoň jednoho z nich, tj. pravděpodobnost jejich sjednocení, je dána vztahem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{1.11}$$

protože ty prvky, které patří do množiny A i B, jsme nejprve započetli dvakrát, a tak je musíme jednou odečíst.

Tentýž výsledek dostaneme i pro obecnou pravděpodobnost P na nějakém jevovém poli. Protože $A \cap B$ a $A \setminus B$ jsou nezávislé jevy, platí

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$

Podobně pro $A \cup B$ máme

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B).$$

Dosazením za pravděpodobnosti množinových rozdílů dostáváme opět vztah (1.11).

Následující věta je přímým promítnutím tzv. kombinatorického

principu inkluze a exkluze do naší konečné pravděpodobnosti a říká, jakým způsobem vícenásobné započítávání výsledků kompenzovat v obecném případě.

Jde patrně o dobrý příklad matematického tvrzení, kde nejtěžší je najít dobrou formulaci a pak se dá říci, že (intuitivně) je tvrzení zřejmé.

Na obrázku je situace znázorněna pro tři množiny A, B, C a pro klasickou pravděpodobnost. Jednoduše šrafované oblasti v prostém součtu máme dvakrát, dvojitě šrafované třikrát. Pak ty jednoduše šrafované jednou odečteme, přitom ty dvojitě šrafované opět třikrát odečteme, proto je tam nakonec ještě jednou započteme.

Ze známé klasické pravděpodobnosti pro jednotlivé hody umíme odvodit pravděpodobnosti našich jevů v Ω. Není to ale jistě klasická pravděpodobnost. Tak pro diskutovaný jev chceme popsat, s jakou pravděpodobností nepadne šestka při prvém hodu a zároveň padne při druhém. Vnucuje se řešení

$$P(A) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

protože v prvém hodu padne s pravděpodobností $1-\frac{1}{6}$ jiné číslo než šest a druhý hod, ve kterém naopak požadujeme šestku, je zcela nezávislý na prvním. Samozřejmě toto není poměr počtu příznivých výsledků k velikosti celého stavového prostoru!

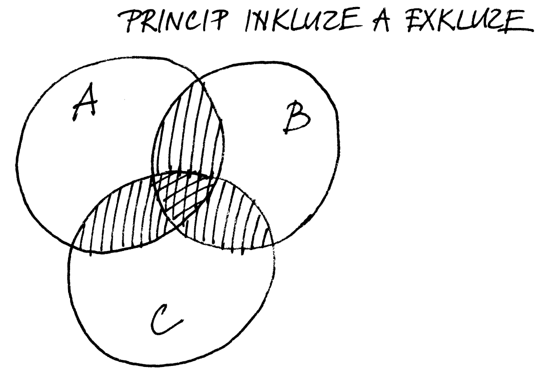
Obecněji můžeme říci, že po právě $1 < k < 100$ hodech pokus skončí s pravděpodobností $(\frac{5}{6})^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$. Ze všech možností je tedy nejpravděpodobnější, že skončí již napoprvé.

Jiný příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy, je pozorovat součty při hodu více kostkami. Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěma kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b), tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$. Pokud se budeme ptát po dvou pětkách, je tedy pravděpodobnost poloviční než u dvou různých hodnot bez uvedení pořadí. Pro jednotlivé možné součty uvedené v horním řádku nám vychází počet možností v řádku dolním:

Součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Počet	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Podobně vyjde pravděpodobnost $\frac{1}{216}$ jednotlivých výsledků hodu třemi kostkami, včetně určeného pořadí. Pokud se budeme ptát na pravděpodobnost výsledného součtu při hodu více kostkami, musíme pouze určit, kolik je možností, jak daného součtu dosáhnout a příslušné pravděpodobnosti sečíst.

1.41. Princip inkluze a exkluze. Sekretářka má rozeslat šest dopisů šesti různým lidem. Dopisy pro různé adresáty vkládá do obálek s adresami náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden člověk dostane dopis určený pro něj?



Obecně si díky aditivní vlastnosti pravděpodobnosti můžeme představit, že každý jev rozložíme na elementární (tj. jednobodové) jevy, jakkoliv ve skutečnosti nemusí jednoprvkové podmnožiny do uvažovaného jevového pole patřit. Pak je pravděpodobnost každého jevu dána součtem pravděpodobností jednotlivých elementárních jevů do něj patřících a můžeme při vyjádření pravděpodobnosti nastoupení alespoň jednoho z jevů postupovat takto: sečteme všechny pravděpodobnosti výsledků pro všechna A_i zvlášť, pak ovšem musíme odečíst ty, které tam jsou započteny dvakrát (tj. prvky v průnicích dvou). Teď si ovšem dovolujeme odečíst příliš mnoho tam, kde ve skutečnosti byly prvky třikrát, tj. korigujeme přičtením pravděpodobností ze třetího členu, atd.

Věta. *Buďte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem $\mathcal{A}$. Pak platí*

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{i=1}^k A_i\right) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} P(A_i\cap A_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=i+1}^{k-1}\sum_{\ell=j+1}^{k} P(A_i\cap A_j\cap A_\ell) - \ldots + \\ &+ (-1)^{k-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k). \end{aligned}$$

Důkaz. Aby se výše naznačený postup stal důkazem, je zapotřebí si ujasnit, že skutečně všechny korekce, tak jak jsou popsány, jsou skutečně s koeficienty jedna. Místo toho můžeme snáze dát dohromady formálnější důkaz matematickou indukcí přes počet k jevů, jejichž pravděpodobnosti sčítáme. Zkuste si průběžně porovnávat oba postupy, mělo by to vést k vyjasnění, co to znamená „dokázat“ a co „porozumět“.

Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí, vztah pro $k = 2$ je totožný s rovností (1.11) a tu jsme pro obecné pravděpodobnostní funkce již dokázali také.

Předpokládejme tedy, že věta platí pro všechny počty množin až do pevně zvoleného $k \geq 1$. Nyní můžeme pracovat v indukčním kroku se vztahem pro $k+1$ jevů, když sjednocení prvních k jevů bereme jako A ve vzorci (1.11) výše, zatímco zbývající jev hraje roli B:

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\cup_{i=1}^k A_i\right)\cup A_{k+1}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left((-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le k} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_j})\right) + \\ &+ P(A_{k+1}) - P((A_1\cup\dots\cup A_k)\cap A_{k+1}). \end{aligned}$$

Řešení. Spočítejme pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že ani jeden člověk neobdrží správný dopis. Stavový prostor všech možných jevů odpovídá všem možným pořadím pěti prvků (obálek). Označíme-li jak obálky tak dopisy čísly od jedné do šesti, tak všechny příznivé jevy (tedy žádný dopis nepřijde do obálky se stejným číslem) odpovídají takovým pořadím šesti prvků, kdy i-tý prvek není na i-tém místě ($i = 1, \dots, 6$), tzv. pořadím bez pevného bodu. Jejich počet spočítáme pomocí principu inkluze a exkluze. Označíme-li M_i množinu permutací s pevným bodem i (permutace v M_i ale mohou mít i jiné pevné body), tak výsledný počet d permutací bez pevného bodu je roven

$$d = 6! - |M_1 \cup \cdots \cup M_6|.$$

Počet prvků průniku $|M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_k}|$, $k = 1, \dots, 6$, je $(6-k)!$ (pořadí prvků $i_1, \dots, i_k$ je pevně dáno, ostatních $6-k$ prvků řadíme libovolně). Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup \cdots \cup M_6| = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \binom{6}{k} (6-k)!$$

a tedy pro hledaný počet d dostáváme vztah

$$d = 6! - \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \binom{6}{k} (n-k)! =$$
$$= \sum_{k=0}^{6} (-1)^{k} \binom{6}{k} (6-k)! = 6! \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pravděpodobnost toho, že žádný člověk neobdrží „svůj“ dopis je tedy

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{53}{144}$$

a hledaná pravděpodobnost pak

$$1 - \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{91}{144}.$$ □

Poznámka. Všimněme si, že odpověď na stejnou otázku se s rostoucím počtem dopisů příliš nemění. Pro n dopisů je pravděpodobnost, že sekretářka dá alespoň jeden do správné obálky, rovna

$$1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \doteq 1 - \frac{1}{e}.$$

Jak totiž uvidíme později, uvedená suma konverguje (blíží se) k hodnotě $1/e$.

Následující příklad je jednoduchým modelem, který odhaduje pravděpodobnost úmrtí osoby při dopravní nehodě.

To už připomíná formuli pro $k+1$ sčítaných jevů, nicméně nám ve velké sumě chybějí všechny výrazy obsahující A_{k+1} a člen s pravděpodobností současného nastoupení všech jevů. Zato nám však přebývá poslední člen. Tento člen výrazu můžeme nahradit výrazem

$$-P((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1}))$$

a pro tento výraz opět použít indukční předpoklad, tj. formuli ve větě. Při troše trpělivosti (a dostatečně velkém papíru na rozepsání všech členů) ověříme, že tím právě přidáme všechny dosud chybějící členy. □

1.18. Princip inkluze a exkluze. Speciálním případem předchozí věty je případ klasické pravděpodobnosti, kdy

všechny konečné podmnožiny základního prostoru jsou jevy a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost. Ve vzorci z předchozí věty pak všechny pravděpodobnosti dávají právě počet prvků příslušných podmnožin až na společný faktor $\frac{1}{n}$, kde n je počet prvků základního prostoru.

Takto můžeme z věty 1.17 vyčíst následující tvrzení pro mohutnosti obecné konečné množiny M a jejích podmnožin $A_1, \dots, A_k$. Jako obvykle píšeme $|M|$ pro počet prvků množiny M.

Samozřejmě pro konečnou množinu M a její podmnožiny platí

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| - |\cup_{i=1}^k A_i|.$$

Nyní můžeme dosadit z předchozí věty za mohutnost sjednocení na pravé straně a dostáváme tvrzení, kterému se říká *princip inkluze a exkluze*.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| =$$
$$= |M| + \sum_{j=1}^{k} \Bigg((-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \Bigg).$$

Opět je snadné nakreslit si tvrzení pro dvě nebo tři množiny, viz obrázek před větou 1.17.

1.19. Nezávislé jevy. Vraťme se na chvíli k jednoduchému modelu dokonalé hrací kostky. Bude nás zajímat, jak mohou být jevy závislé.

Např. pravděpodobnost, že nastanou zároveň jevy „padne liché číslo“ a „padne alespoň trojka“, je $\frac{1}{3}$. To je totéž jako $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, tedy součin pravděpodobností jednotlivých jevů. To odpovídá představě, že můžeme nezávisle testovat obě podmínky a výsledná pravděpodobnost současného splnění bude dána součinem pravděpodobností dílčích. Jestliže budeme naopak uvažovat neslučitelné jevy, jako jsou např. „padne sudé číslo“ a „padne liché číslo“, bude pravděpodobnost současného výskytu obou nulová, zatímco součin dílčích pravděpodobností nulový není.

To odpovídá přestavě, že tyto dva jevy musí být závislé, protože výskyt jednoho z nich ten druhý už vylučuje. Samozřejmě může nastávat slabší závislost, např. jev „padne liché číslo“ je důsledkem jevu „padne trojka“ a proto také není dána pravděpodobnost společného výskytu těchto dvou jevů pomocí součinu.

Pro pravděpodobnosti P na libovolných jevových polích řekneme, že jevy A a B jsou *stochasticky nezávislé*, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

1.42. Ročně zahyne na silnicích v ČR přibližně 1200 českých občanů. Určete pravděpodobnost, že někdo z vybrané skupiny pěti set Čechů zemře v následujících deseti letech při dopravní nehodě. Předpokládejte pro zjednodušení, že každý občan má v jednom roce stejnou „šanci" zemřít při dopravní nehodě a to $1200/10^7$.

Řešení. Spočítejme nejprve pravděpodobnost, že jeden vybraný člověk v následujících deseti letech **nezahyne** při dopravní nehodě. Pravděpodobnost, že nezahyne v jednom roce, je $\left(1-\frac{12}{10^5}\right)$. Pravděpodobnost, že nezahyne v následujících deseti letech, je pak $\left(1-\frac{12}{10^5}\right)^{10}$. Pravděpodobnost, že v následujících deseti letech nezahyne nikdo z daných pěti set lidí, je opět podle pravidla součinu (jedná se o nezávislé jevy) $\left(1-\frac{12}{10^5}\right)^{5000}$. Pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že někdo z vybraných pěti set lidí zahyne, je

$$1-\left(1-\tfrac{12}{10^5}\right)^{5000} \doteq 0{,}4512. \qquad \square$$

Poznámka. Model, který jsme použili v předchozím příkladu k popisu zadané situace, je pouze přibližný. Problém spočívá v podmínce, že každý občan z vyšetřovaného vzorku má stejnou pravděpodobnost toho, že v průběhu roku zahyne, kterou jsme odhadli z počtu usmrcených osob za rok. Počet tragických nehod se totiž rok od roku mění a i kdyby se neměnil, tak se mění populace. Ukažme si jednu z nepřesností příkladu na jiném způsobu řešení: zahyne-li 1200 osob za rok, tak za deset let zahyne 12000. Pravděpodobnost toho, že konkrétní člověk zahyne v průběhu deseti let tedy můžeme odhadnout i zlomkem $12000/10^7$. Pravděpodobnost, že konkrétní osoba nezahyne v průběhu 10 let je tedy $\left(1-\frac{12}{10^4}\right)$ (to jsou první dva členy binomického rozvoje $\left(1-\frac{12}{10^5}\right)^{10}$). Celkem dostáváme analogicky jako v předchozím řešení odhad pravděpodobnosti

$$1-\left(1-\frac{12}{10^4}\right)^{500} \doteq 0{,}4514.$$

Vidíme, že oba odhady jsou velmi blízké.

Snaha použít matematických znalostí k výhře v nejrůznějších hazardních hrách je velmi stará. Podívejme se na jednoduchý příklad.

Nyní si procvičme tzv. „podmíněnou" pravděpodobnost, viz (1.20).

1.43. Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2?

Řešení. Označme jako B jev, že ani na jedné kostce nepadne dvojka, jev „padne součet 7" označme jako A. Množinu všech možných výsledků budeme značit opět jako Ω. Pak

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

Zkusme ale tutéž hru s kostkou s více jevy, třebas jev A „padne liché číslo", jev B „padne alespoň 3" a jev C „padne nejvýše 3". Pravděpodobnosti jsou

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{3},\ P(C)=\frac{1}{2},$$
$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2},$$

ale po dvojicích dostáváme např. $P(A\cap C)=\frac{2}{3}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

Naopak ani tři jevy A, B, C které jsou po dvou nezávislé, nemusí splňovat vlastnost $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$: nechť Ω je devítiprvkový základní prostor složený ze slov aaa, bbb, ccc, abc, acb, bac, bca, cab, cba. Označme jako A jev „na prvním místě slova je písmeno a". Dále nechť B je jev „na druhém místě slova je písmeno a" a C je jev „na třetím místě slova je písmeno a". Pak $P(A)=P(\{aaa,abc,acb\})=\frac{1}{3}$ a obdobně $P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$. Potom $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=P(\{aaa\}=\frac{1}{9}$. Tedy jevy jsou po dvou nezávislé, ale $P(A\cap B\cap C)=P(\{aaa\}=\frac{1}{9}\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

Obecně tedy definujeme nezávislé jevy takto:

Definice. Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega,\mathcal{A},P)$ a v něm k jevů $A_1,\dots,A_k$. Řekneme, že tyto jevy jsou *stochasticky nezávislé* (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1},\dots,A_{i_\ell}$, $1\le\ell\le k$ platí

$$P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystém stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý. Dále si pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B spočtěme

$$\begin{aligned} P\left(A\cap B^c\right) &= P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B) = \\ &= P(A)(1-P(B)) = P(A)P\left(B^c\right). \end{aligned}$$

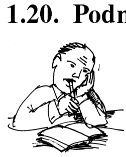
Odtud už snadno dovodíme, že záměnou jednoho nebo více stochasticky nezávislých jevů za jejich opačné jevy obdržíme opět stochasticky nezávislé jevy.

Často je potřebná pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze stochasticky nezávislých jevů, tzn. hledáme $P(A_1\cup\dots\cup A_k)$. Můžeme pak použít elementární vlastnosti množinových operací, tzv. de Morganova pravidla

$$(\cup_{i\in I}A_i)^c = \cap_{i\in I}A_i^c,$$
$$(\cap_{i\in I}A_i)^c = \cup_{i\in I}A_i^c,$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} P(A_1\cup\dots\cup A_k) &= 1 - P\left(A_1^c\cap\dots\cap A_k^c\right) = \\ &= 1-(1-P(A_1))\dots(1-P(A_k)). \end{aligned} \tag{1.12}$$



1.20. Podmíněná pravděpodobnost. Míru závislosti dvou jevů můžeme přeformulovat s představou, že zkoumáme jeden z nich za podmínky, že druhý nastal. U nezávislých by podmínka neměla mít žádný vliv. Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?". Formalizovat takový postup umíme následovně.

Číslo 7 může padnout čtyřmi různými způsoby, pokud nepadne dvojka, tedy $|A \cap B| = 4$, $|B| = 5 \cdot 5 = 25$, tedy

$$P(A|B) = \frac{4}{25}.$$

Všimněme si, že $P(A) = \frac{1}{6}$, tedy jevy A a B jsou závislé. □

1.44. Michal má dvě poštovní schránky, jednu na gmail.com a jednu na seznam.cz. Uživatelské jméno má stejné na obou serverech, hesla různá (ale nepamatuje si, které heslo má na kterém serveru). Při zadávání hesla při přístupu do schránky se splete s pravděpodobností 5% (tj. jestliže chce zadat jemu známé slovo jako heslo, tak jej s pravděpodobností 95% skutečně správně na klávesnici zadá). Michal zadal na serveru seznam.cz jméno a heslo a server mu oznámil, že něco není v pořádku. Jaká je pravděpodobnost, že chtěl zadat správné heslo, ale pouze se „překlepnul“ při zadávání? (Předpokládáme, že uživatelské jméno zadá vždy bez chyby.)

Řešení. Označme A jev, že Michal fyzicky zadal na serveru seznam.cz špatné heslo. Tento jev je sjednocením dvou disjunktních jevů:

A_1 : chtěl zadat správné heslo a přepsal se,

A_2 : chtěl zadat špatné heslo (to z gmail.com) a buď se přepsal nebo ne.

Hledáme tedy podmíněnou pravděpodobnost $P(A_1|A)$, ta je podle vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost rovna

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \\ = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)}.$$

Potřebujeme tedy určit pravděpodobnosti $P(A_1)$ a $P(A_2)$. Jev A_1 je konjunkcí (průnikem) dvou nezávislých jevů: Michal chtěl zadat správné heslo a Michal se při zadávání přepsal. Dle zadání je pravděpodobnost prvního z nich 1/2, druhého 1/20, celkem $P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$ (pravděpodobnosti násobíme, protože se jedná o nezávislé jevy). Dále je ze zadání $P(A_2) = \frac{1}{2}$. Celkem $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{40} + \frac{1}{2} = \frac{21}{40}$, a můžeme vyčíslit:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{21}{40}} = \frac{1}{21}.$$ □

Metodu *geometrické pravděpodobnosti*, (viz 1.21 můžeme použít v případě, že daný základní prostor sestává z nekonečně mnoha elementárních jevů, které dohromady vyplňují nějakou oblast na přímce, rovině, prostoru (u které umíme určit její délku, obsah, objem, ...). Předpokládáme, že pravděpodobnost toho, že nastane elementární jev

Podmíněná pravděpodobnost

Definice. Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Jak je vidět přímo z definice, hypotéza H a jev A jsou skutečně nezávislé tehdy a jen tehdy, je-li $P(A) = P(A|H)$. Přímo z definice také vyplývá tzv. „věta o násobení pravděpodobností“. Máme-li dva jevy A_1, A_2 splňující $P(A_1 \cap A_2) > 0$, potom

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1|A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Všechna tato čísla vyjadřují pravděpodobnost toho, že nastanou oba jevy A_1 i A_2, jenom jinými způsoby. Například v posledním případě nejprve sledujeme, zda nastane první jev. Potom za předpokladu, že ten první nastal, sledujeme zda nastane i ten druhý. Podobně pro tři jevy A_1, A_2, A_3 splňující $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) > 0$ dostaneme

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

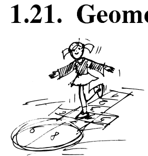
Slovy to lze opět popsat tak, že pravděpodobnost výskytu všech tří jevů zároveň můžeme spočítat tak, že se nejprve zabýváme výskytem pouze prvního z nich, potom druhého za předpokladu, že první už nastal, a naposledy třetího za předpokladu, že oba předešlé jevy již nastaly.

Máme-li obecný počet k jevů $A_1, \dots, A_k$ splňujících $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$, pak věta říká následující:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

Skutečně, dle předpokladu jsou i pravděpodobnosti všech průniků, které jsou brány ve výrazu za hypotézy, nenulové. Pokrácením čitatelů a jmenovatelů získáme i napravo právě pravděpodobnost jevu odpovídajícího průniku všech uvažovaných jevů.

1.21. Geometrická pravděpodobnost. V praktických problé-



mech se často setkáváme s daleko složitějšími modely, kde základní prostor není konečnou množinou. Nemáme momentálně k dispozici ani základní nástroje pro dostatečné zobecnění pojmu pravděpodobnosti, nicméně můžeme uvést alespoň jednoduchou ilustraci.

Uvažme rovinu $\mathbb{R}^2$ dvojic reálných čísel a v ní podmnožinu Ω se známým obsahem $\operatorname{vol}\Omega$ (symbol „vol“ je od anglického „volume“, tj. obsah/objem). Příkladem může sloužit třeba jednotkový čtverec. Náhodné jevy budou reprezentovány podmnožinami $A \subseteq \Omega$ a za jevové pole $\mathcal{A}$ bereme nějaký vhodný systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah. Nastoupení nebo nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω, kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A.

Uvažme jako příklad problém, kdy náhodně vybereme dvě hodnoty $a < b$ v intervalu $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Všechny hodnoty a i b jsou stejně pravděpodobné a otázka zní „jaká je pravděpodobnost, že interval (a, b) bude mít velikost alespoň jedna polovina?“. Volba čísel a, b je volbou libovolného bodu $[a, b]$ ve vnitřku trojúhelníku Ω s hraničními vrcholy $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$ (viz obrázek).

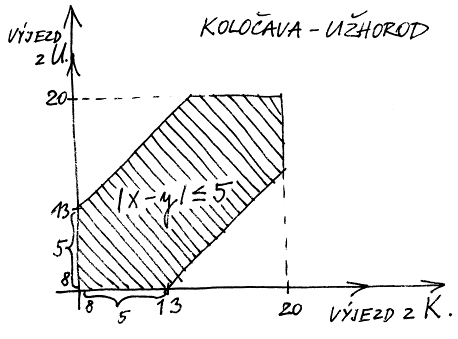
z určité podoblasti je rovna poměru její velikosti (délce, obsahu, …) k velikosti celého základního prostoru.

1.45. Z Těšína vyjíždí vlaky co půl hodinu (směrem na Bohumín) a z tohoto směru přijíždějí také každé půl hodiny. Předpokládejme, že vlaky se mezi těmito dvěma stanicemi pohybují rovnoměrnou rychlostí 72 km/h a jsou dlouhé 100 metrů, cesta trvá 30 minut, vlaky se míjejí někde na trase. Nevyspalý hazardér Jarek si vybere jeden z těchto vlaků a během cesty z Těšína do Bohumína náhodně vystrčí hlavu z okna na pět vteřin nad kolejiště pro protější směr. Jaká je pravděpodobnost, že mu bude uražena? (Předpokládáme, že jiné než zmíněné vlaky na trati nejezdí.)

Řešení. Vzájemná rychlost protijedoucích vlaků je $40\,m/s$, protijedoucí vlak mine Jardovo okno za dvě a půl sekundy. Prostor všech možností je tedy interval $[0, 1800\,s]$, prostor „příznivých" možností je potom interval délky $7{,}5\,s$ ležící někde uvnitř předchozí úsečky. Pravděpodobnost uražení hlavy je tedy $7,5/1800 \doteq 0{,}004$. $\square$

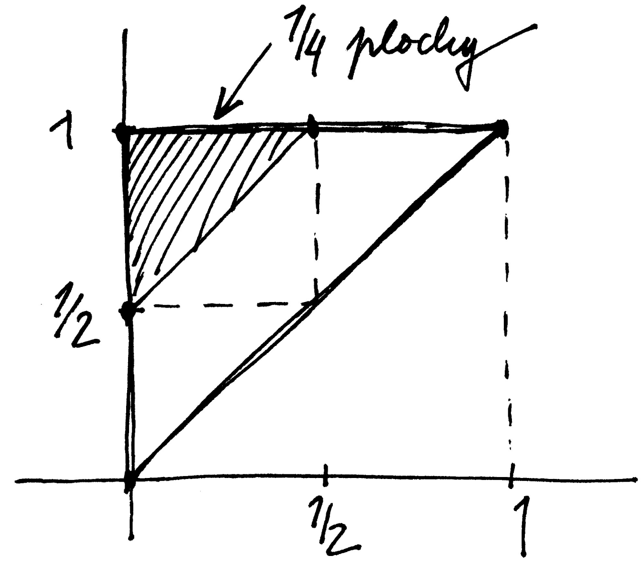
1.46. Jednou denně někdy mezi osmou hodinou ranní a osmou hodinou večerní vyjíždí náhodně autobus z Koločavy do Užhorodu. Jednou denně ve stejném časovém rozmezí jezdí jiný autobus náhodně opačným směrem. Cesta tam trvá pět hodin, zpět též pět hodin. Jaká je pravděpodobnost, že se autobusy potkají, jezdí-li po stejné trase?

Řešení. Prostor všech možných jevů je čtverec 12×12, Označíme-li doby odjezdu obou autobusů x, resp. y, pak se tyto na trase potkají právě když $|x - y| \le 5$. Tato nerovnost vymezuje v daném čtverci oblast „příznivých jevů". Obsah zbylé části spočítáme přímo jednodušeji, neboť je sjednocením dvou pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků o odvěsnách délky 7, tedy je roven 49, obsah části odpovídající „příznivým jevům" je tedy $144 - 49 = 95$, celkem je hledaná pravděpodobnost $p = \frac{95}{144} \doteq 0{,}66$.



$\square$

1.47. Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden díl bude nejvýše 20 cm dlouhý.



Úlohu si můžeme představit jako popis problému, kdy se hodně unavený účastník večírku nad ránem pokouší dvěma řezy rozdělit párek na tři díly pro sebe a své dva kamarády. Jaká je pravděpodobnost, že se na někoho dostane aspoň půlka?

Odpověď je docela jednoduchá: Podobně jako u klasické pravděpodobnosti definujeme pravděpodobnostní funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$P(A) = \frac{\mathrm{vol}\, A}{\mathrm{vol}\, \Omega},$$

kde A jsou podmnožiny v rovině, které odpovídají námi vybraným jevům.

Potřebujeme tedy znát plochu podmnožiny, která odpovídá bodům s $b \ge a + \frac{1}{2}$, tj. vnitřku trojúhelníku A ohraničeného vrcholy $[0, \frac{1}{2}]$, $[0, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1]$. Evidentně dostáváme $P(A) = \frac{1}{4}$.

Zkuste si samostatně odpovědět na otázku „pro jakou požadovanou minimální délku intervalu (a, b) dostaneme pravděpodobnost jedna polovina?".

1.22. Metody Monte Carlo. Jednou z účinných výpočetních metod přibližných hodnot je naopak simulace známé takovéto pravděpodobnosti pomocí relativní četnosti nastoupení vhodně zvoleného jevu. Např. známá formule pro obsah kruhu o daném poloměru říká, že obsah jednotkového kruhu je roven právě konstantě

$$\pi = 3,1415\ldots,$$

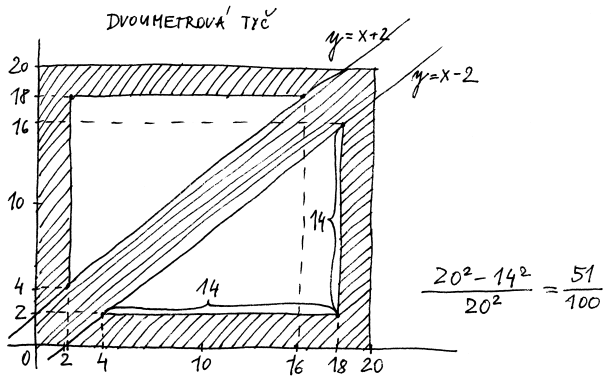
která vyjadřuje poměr obsahu kruhu a druhé mocniny jeho poloměru. (Tady si také povšimněme východiska, které jsme nedokázali – proč by měl být obsah kruhu roven konstantnímu násobku druhé mocniny poloměru? Matematicky to budeme umět ukázat, až zvládneme tzv. integrování. Experimentálně si to ale můžeme ověřit níže uvedeným postupem s různými velikostmi strany čtverce.)

Pokud zvolíme za Ω jednotkový čtverec a za A průnik Ω a jednotkového kruhu se středem v počátku, pak $\mathrm{vol}\, A = \frac{1}{4}\pi$. Máme-li tedy spolehlivý generátor náhodných čísel mezi nulou a jedničkou a počítáme relativní četnosti, jak často bude vzdálenost bodu $[a, b]$ (určeného vygenerovanou dvojicí a, b) od počátku menší než jedna, tj. $a^2 + b^2 < 1$, pak výsledek bude při velkém počtu pokusů s velikou jistotou dobře aproximovat číslo $\frac{1}{4}\pi$.

Řešení. Náhodné rozdělení tyče na tři díly je dáno dvěma body řezu, čísly x a y (nejprve tyč rozřízneme ve vzdálenosti x od počátku, nehýbeme s ní a dále ji rozřízneme ve vzdálenosti y od počátku). Pravděpodobnostní prostor je tedy čtverec C o straně 2 m. Umístíme-li čtverec C tak, aby dvě jeho strany ležely na kartézských osách v rovině, tak podmínka, že alespoň jeden díl má být nejvýše 20 cm dlouhý, nám vymezuje ve čtverci následující oblast O:

$$O = \{(x, y) \in C \mid (x \leq 20) \vee (x \geq 180) \vee (y \leq 20) \vee \\ \vee (y \geq 180) \vee (|x - y|) \leq 20\}.$$

Jak snadno nahlédneme, zaujímá takto vymezená oblast $\frac{51}{100}$ obsahu čtverce.



□

E. Geometrie v rovině

Vraťme se na chvíli ke komplexním číslům. Komplexní rovina je totiž „normální“ rovina, kde ovšem máme dáno něco navíc:

1.48. Interpretujte násobení imaginární jednotkou a vzetí komplexně sdruženého čísla jako geometrickou transformaci v rovině.

Řešení. Imaginární jednotka i odpovídá bodu $(0, 1)$ a všimněme si, že vynásobení jakéhokoliv čísla $z = a + i\,b$ imaginární jednotkou dává výsledek

$$i \cdot (a + i\,b) = -b + i\,a$$

což v interpretaci v rovině znamená otočení bodu z o pravý úhel v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček.

Přiřazení komplexně sdruženého čísla je symetrie podle osy reálných čísel:

$$z = (a + i\,b) \mapsto (a - i\,b) = \bar{z}\,.$$

□

Nyní jeden známý, ale velmi pěkný příklad.

1.49. Určete součet úhlů, které v rovině $\mathbb{R}^2$ svírají s osou x postupně vektory $(1, 1)$, $(2, 1)$ a $(3, 1)$

Řešení. Uvážíme-li rovinu $\mathbb{R}^2$ jakožto Gaussovu rovinu komplexních čísel, tak uvedené vektory odpovídají komplexním číslům $1 + i$, $2 + i$

Numerickým postupům založeným na tomto principu se říká *metody Monte Carlo*.

5. Geometrie v rovině

V posledních odstavcích jsme intuitivně používali elementární pojmy z geometrie reálné roviny. Teď budeme podrobněji zkoumat, jak se vypořádávat s potřebou popisovat „polohu v rovině“, resp. dávat do souvislostí polohy různých bodů roviny.

Nástrojem k tomu budou opět zobrazení, tentokrát to ale budou velice speciální pravidla přiřazující dvojicím hodnot (x, y) dvojice $(w, z) = F(x, y)$. Zároveň půjde o předzvěst úvah z oblasti matematiky, které se říká *lineární algebra* a kterou se budeme podrobně zabývat v dalších třech kapitolách.

1.23. Vektorový prostor $\mathbb{R}^2$. Podívejme se na „rovinu“ jakožto na množinu dvojic reálných čísel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Budeme jim říkat *vektory* v $\mathbb{R}^2$. Pro takové vektory umíme definovat sčítání „po složkách“, tj. pro vektory $u = (x, y)$ a $v = (x', y')$ klademe

$$u + v = (x + x', y + y').$$

Protože pro jednotlivé složky platí všechny vlastnosti komutativní grupy, evidentně budou tyto vlastnosti platit i pro naše nové sčítání vektorů. Zejména tedy máme tzv. *nulový vektor* $0 = (0, 0)$, jehož přičtením k jakémukoliv vektoru v dostaneme opět vektor v. Záměrně teď používáme tentýž symbol 0 pro vektor i jeho skalární složky – z kontextu je vždy jasné, jakou „nulu“ máme kdy na mysli.

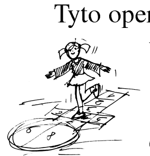
Dále definujeme násobení vektorů a skalárů tak, že pro $a \in \mathbb{R}$ a $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ klademe

$$a \cdot v = (ax, ay).$$

Zpravidla budeme znak $\cdot$ vynechávat a pouhé zřetězení znaků $a\,v$ bude označovat skalární násobek vektoru. Přímo se ověří další vlastnosti pro násobení skaláry a, b a sčítání vektorů u, v, např.

$$a\,(u + v) = a\,u + a\,v,\ (a + b)u = a\,u + b\,u,\ a(b\,u) = (ab)u,$$

kde opět používáme stejný znak plus pro sčítání vektorů i skalárů.



Tyto operace si můžeme dobře představit, jestliže uvažujeme vektory v jako šipky začínající v počátku $0 = [0, 0]$ a končící v bodě $[x, y]$ v rovině.

Takové šipky pak můžeme přikládat jednu za druhou a to přesně odpovídá sčítání vektorů. Násobení skalárem a pak odpovídá natažení dané šipky na a-násobek.