Pravděpodobnost a statistika

Miroslav Kolařík

Aktualizováno: 29. listopadu 2023

Slajdy vytvořil Tomáš Masopust. S jeho svolením je upravil Miroslav Kolařík.

Základní informace

- Přednášející: M. Kolařík
  - přednáška: čtvrtek, 15.45 až 18.15, LP 5.008
  - konzultační hodiny: čtvrtek 14.30 až 15.30, pátek 9.30 až 11.00, LP 5.039
- Cvičící: E. Foltasová
  - cvičení: čtvrtek, 18.30 až 19.15, LP 5.008
  - konzultační hodiny: pondělí 13.15 až 14.15, čtvrtek 13.15 až 14.15, LP 5.074

Obsah

Obsah

Úvod a trocha historie

- Pascal a Fermat (1654) vytvořili pojednání o hazardních hrách dvou hráčů. Výsledek jejich diskuse vedl k základům teorie pravděpodobnosti.

  Je pozoruhodné, že věda, jenž se započala uvažováním o hazardních hrách, by se měla stát nejvýznamějším objektem lidského vědění.

  (Pierre-Simon de Laplace)

- Pravděpodobnost je plná překvapivých výsledků a paradoxů, více něž jakákoliv jiná matematická disciplína.

Asi největším paradoxem ze všech je to, že existují paradoxy v matematice.

(Edward Kasner)

Americký matematik, zavedl pojem „googol“$=10^{100}$ (navrhl jeho devítiletý synovec Milton Sirotta).

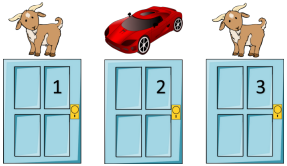
- Dalo by se očekávat, že na základě našeho smyslu riskovat a životních zkušeností bychom měli mít dobře vyvinutý instinkt.
- Vyzkoušejme si.

- Vsadili byste si na to, že ve třídě mají alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den?
- Pokud je ve třídě 23 lidí, je taková pravděpodobnost cca 50,7 %.
- Pro skupinu 57 a více lidí je tato pravděpodobnost už více než 99 %.

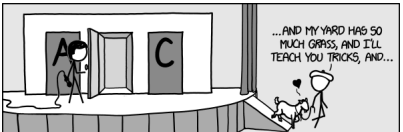
- Pokud je ve čtyřčlenné rodině jedno dítě chlapec, jaká je pravděpodobnost, že je i druhé dítě chlapec? (Pro jednoduchost zde předpokládejme, že narození chlapce a dívky je stejně pravděpodobné.)
- Možnosti jsou: (Ch,Ch), (Ch,D), (D,Ch), (D,D), tedy výsledek je $\frac{1}{3}$.

- Je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěmi hracími kostkami padne součet 12 stejná jako pravděpodobnost toho, že padne součet 11?
- Spočítejme si ...
- Leibniz věřil, že tyto pravděpodobnosti jsou stejné. 
- Je pravděpodobnost toho, že třikrát po sobě padne „orel“ stejná jako pravděpodobnost toho, že na třech mincích hozených současně padne na všech „orel“?
- D'Alembert, francouzský matematik 18. století, o tom nebyl přesvědčen. 
- Je pravda, že když dlouho padá „orel“, tak je pravděpodobnější, že v dalším hodu padne „orel“?
- D'Alembert tomu věřil.

Monty Hall



- Já vím, kde co je. Vy nevíte. Já vás nechám vybrat jedny dveře. Ze zbývajících dvou pak otevřu ty, kde je koza. Když vám nyní dám na vybranou, změníte dveře, nebo ne?
- Paul Erdös, jeden z nejvýznamějších matematiků posledních let nevěřil správnému řešení, dokud mu to jeho přítel Ron Graham trpělivě nevysvětlil.



Na odlehčení

Při bezpečnostní prohlídce na letišti zatkli jednoho statistika, který měl u sebe bombu. Ten na svoji obhajobu uvedel:

> *Pravděpodobnost bomby v letadle je* $\frac{1}{1000}$*. Tedy pravděpodobnost dvou bomb v letadle je* $\frac{1}{1000000}$*, což je tak malá pravděpodobnost, že jsem ochoten ji akceptovat. Svoji bombu jsem si tedy přinesl proto, abych se cítil bezpečněji.*

Slavný příklad

Paule je 31 let. Je svobodná, přímočará, chytrá. Studovala filozofii. Když byla studentkou, horlivě podporovala práva původních obyvatel Ameriky (indiánů) a účastnila se protestů proti obchodnímu domu, který neměl zařízení pro kojící matky. Očíslujte následující tvrzení podle jejich pravděpodobnosti od 1 (nejpravděpodobnější) po 6 (nejméně pravděpodobné).

(a) Paula je aktivní feministka.

(b) Paula je bankovní úřednice.

(c) Paula pracuje v malém knihkupectví.

(d) Paula je bankovní úřednice a aktivní feministka.

(e) Paula je bankovní úřednice a aktivní feministka, která cvičí jógu.

(f) Paula pracuje v malém knihkupectví a je aktivní feministka, která cvičí jógu.

Příklad uvedený na předchozím slajdu studovali psychologové Amos Tversky a Daniel Kahneman (Nobelova cena za ekonomii). Zjistili, že většina lidí považuje za nejpravděpodobnější (f), přičemž nejčastěji seřadili tvrzení takto: (f), (e), (d), (a), (c), (b). To je ovšem špatně, neboť pravděpodobnost (f) musí být menší než pravděpodobnost (a) i než pravděpodobnost (c), protože z (f) vyplývá (a) i (c).

Tverskyho a Kahnemanovo zjištění může znamenat, že lidé neusuzují v souladu se zákony pravděpodobnosti, a že jsou v tomto smyslu iracionální. Může to ale znamenat i něco jiného, totiž to, že jsou nepozorní, a že ve skutečnosti odpovídají na jiņou otázku. Na jakou? Které tvrzení je to nejpřesnější, nejužitečnější a pravděpodobné?

V každém případě máme varování, že při úvahách o pravděpodobnosti a nejistotě musíme být po všech stránkách opatrní.

Literatura

1. První tištěnou práci o pravděpodobnosti sepsal holandský matematik Christiaan Huygens (1629–1695). 
2. M. Gardner, The Colossal Book of Mathematics
3. M. S. Petković, Famous Puzzles of Great Mathematicians
4. J. Likeš, J. Machek, Počet pravděpodobnosti

Studijní literatura, na které jsou postaveny tyto slajdy:

1. L. Wasserman, *All of Statistics–A Concise Course in Statistical Inference*
2. S. Ross, *A First Course in Probability*
3. M. Mitzenmacher & E. Upfal, *Probability and Computing*
4. J. Slovák, M. Panák, M. Bulant & kolektiv, *Matematika drsně a svižně*

Pravděpodobnost

- Pravděpodobnost je matematický jazyk pro určení nejistoty.
- Zavedeme základní koncepty teorie pravděpodobnosti.

Výběrové prostory a jevy

Prostor elementárních jevů

- Výběrový prostor či prostor elementárních jevů Ω je množina možných výsledků náhodného pokusu.
- Prvky $\omega \in \Omega$ se nazývají elementární jevy.
- Podmnožiny Ω se nazývají (náhodné) jevy.

Příklad 1.

- Náhodný pokus = hod dvakrát mincí.
- Pak $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$,
  kde „O“ je orel a „P“ je panna.
- Jev, že „na první hod padne orel“ je $A = \{OO, OP\}$.

Příklad 2.

- Nechť ω je výsledek měření nějaké fyzikální veličiny, například teploty, pak $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
- Zde $\Omega = \mathbb{R}$ není přesné, protože teplota má dolní hranici. Obvykle není na škodu vzít výběrový prostor větší než je potřeba.
- Jev „teplota je větší než 10 a menší nebo rovna 23“ je $A = (10, 23]$.

Příklad 3.

Jestliže házíme mincí do nekonečna, pak výběrový prostor je nekonečná množina

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \mid \omega_i \in \{O, P\}\}.$$

Nechť E je jev „první orel se objeví na třetí hod“. Pak

$$E = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots) \mid \omega_1 = P, \omega_2 = P, \omega_3 = O, \omega_i \in \{O, P\} \text{ pro } i > 3\}.$$

Operace s jevy

- Pro jev A je $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ jev, tzv. komplement jevu A.
  Komplement Ω je prázdná množina $\emptyset$.
- Sjednocení jevů A a B je jev

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ nebo } \omega \in B\}.$$

  Pro jevy $A_1, A_2, \ldots$ je $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \text{ tak, že } \omega \in A_i\}$ jev.
- Průnik jevů A a B je jev

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ a } \omega \in B\}.$$

  $A \cap B$ budeme též zapisovat jako AB.
  Pro jevy $A_1, A_2, \ldots$ je $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i \text{ pro všechna } i\}$ jev.

- Rozdíl jevů je jev $A - B = \{\omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\}$.
- Jestliže kadý prvek A je také v B, píšeme $A \subseteq B$ či $B \supseteq A$.
  Pro vlastní podmnožiny se používá značení $A \subset B$ či $B \supset A$.
- Jestliže A je konečná množina, značí $|A|$ počet prvků A.

Používané značení

Ω	výběrový prostor
ω	elementární jev (bod nebo prvek)
A	jev (podmnožina Ω)
A^c	komplement A
$A \cup B$	sjednocení
$A \cap B$ nebo AB	průnik
$A - B$	množinový rozdíl
$A \subseteq B$	množinová inkluze
$\emptyset$	nemožný jev
Ω	jistý jev

Disjunktní jevy, rozklad

- Jevy $A_1, A_2, \ldots$ jsou disjunktní nebo vzájemně neslučitelné, jestliže

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

  kdykoliv $i \neq j$.
- Například jevy $A_1 = [0, 1), A_2 = [1, 2), A_3 = [2, 3), \ldots$ jsou disjunktní.

- Rozklad Ω je posloupnost disjunktních množin $A_1, A_2, \ldots$ takových, že

$$\bigcup_i A_i = \Omega.$$

Indikátory

- Pro jev A definujeme indikátor či charakteristickou funkci

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A. \end{cases}$$

Neklesající a nerostoucí posloupnosti množin

- Posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$ je neklesající, jestliže

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$$

Definujme

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

- Posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$ je nerostoucí, jestliže

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

Definujme

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

- V obou případech budeme psát $A_n \to A$, kde $A = \lim_{n \to +\infty} A_n$.

Příklad 4.

- Nechť $\Omega = \mathbb{R}$ a nechť $A_i = [0, \frac{1}{i})$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Pak

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = [0, 1) \qquad \text{a} \qquad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{0\}.$$

- Jestliže $A_i = (0, \frac{1}{i})$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Pak

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = (0, 1) \qquad \text{a} \qquad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset.$$

Pravděpodobnost

Definice 5.

Funkce $\mathbb{P}$ přiřazující reálné číslo $\mathbb{P}(A)$ každému jevu A je pravděpodobnostní míra, jestliže splňuje následující tři axiomy:

Axiom 1: $\mathbb{P}(A) \geq 0$ pro každý jev A

Axiom 2: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Axiom 3: Jestliže $A_1, A_2, \ldots$ jsou disjunktní jevy, pak

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Pozn.: Axiom 3 zahrnuje i případ, kdy jsou skoro všechna $A_i = \emptyset$.

Algebra jevů

- Obecně není možné přiřadit pravděpodobnost všem podmnožinám Ω (pokud je Ω nespočetná).
- Omezíme se proto na množinu jevů nazývanou σ-algebra, tedy na třídu $\mathcal{A}$ splňující
  - $\emptyset \in \mathcal{A}$
  - Jestliže $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$
  - Jestliže $A \in \mathcal{A}$, pak též $A^c \in \mathcal{A}$.
- Množiny v $\mathcal{A}$ se nazývají měřitelné a dvojice $(\Omega, \mathcal{A})$ je tzv. měřitelný prostor.
- Je-li $\mathbb{P}$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{A}$, je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor.
- Pokud je Ω reálná osa, vezmeme $\mathcal{A}$ jako nejmenší σ-algebru, která obsahuje všechny otevřené podmnožiny, tzv. Borelovská σ-algebra.
  - My se pro jednoduchost omezíme na případ, kdy otevřené množiny „znamená“ intervaly reálných čísel.

- Existuje mnoho interpretací pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}(A)$.
  - Dvě základní jsou frekvence a stupeň důvěry.

- Frekvence: $\mathbb{P}(A)$ vyjadřuje poměr, kolikrát je A slpňeno při dlouhodobém opakování pokusu.
  - Například „pravděpodobnost, že padne orel je $1/2$“ znamená, že s rostoucím počtem hodů mincí „jde“ poměr hozených orlů vzhledem ke všem pokusům k $1/2$.
  - Nekonečně dlouhá, nepředvídatelná posloupnost hodů, jejíž mezní podíl směřuje ke konstantě, je idealizací, podobně jako představa přímky v geometrii.

- Stupeň důvěry: $\mathbb{P}(A)$ určuje pozorovatelovu intenzitu důvěry, že A je splněno.

- V obou interpretacích vyžadujeme platnost Axiomů 1 až 3.
- Rozdíl mezi interpretacemi hraje roli až ve statistické inferenci:
  - frekvencionistická vs. Bayesovská škola.

Vlastnosti pravděpodobnosti

Z axiomů lze odvodit mnoho vlastností $\mathbb{P}$:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
  - $1 =_{A2} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) =_{A3} \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \mathbb{P}(\emptyset)$
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\mathbb{B})$
  - $B = A \cup (B - A) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) \Rightarrow_{A1} \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
  - použije se předchozí tvrzení pro $A \subseteq \Omega$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
  - $\Omega = A \cup A^c \Rightarrow 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
  - z Axiomu 3 dosazením $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$.

Vlastnosti $\mathbb{P}$

Lemma 6.

Pro libovolné jevy A a B je $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$.

Důkaz.

$A \cup B = (AB^c) \cup (AB) \cup (A^c B)$ a uvedené jevy jsou disjunktní. Opakovaným použitím Axiomu 3 dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((AB^c) \cup (AB) \cup (A^c B)) \\
&= \mathbb{P}(AB^c) + \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(A^c B) \\
&= \mathbb{P}(AB^c) + \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(A^c B) + \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(AB) \\
&= \mathbb{P}((AB^c) \cup (AB)) + \mathbb{P}((A^c B) \cup (AB)) - \mathbb{P}(AB) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).
\end{aligned}$$

□

Příklad 7.

- Uvažme dva hody mincí.
- Označme H_1 jev „orel padne v prvním hodu“ a H_2 jev „orel padne ve druhém hodu“.
- Jsou-li všechny výsledky stejně pravděpodobné, pak

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1 \cup H_2) &= \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2) - \mathbb{P}(H_1 H_2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Věta o spojitosti pravděpodobnostní míry

Věta 8.

(1) *Nechť jevy* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *tvoří neklesající posloupnost jevů, tedy* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, *nechť* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$. *Potom* $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

(2) *Nechť jevy* $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ *tvoří nerostoucí posloupnost jevů, tedy* $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$, *nechť* $B = \bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i$. *Potom* $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Důkaz.

- Zřejmě $A_n = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_2^c \cap A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1}^c \cap A_n)$ a $A = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1}^c \cap A_n) \cup (A_n^c \cap A_{n+1}) \cup \ldots$.
- Z Axiomu 3 máme $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) + \mathbb{P}(A_2^c \cap A_3) + \cdots + \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap A_n)$ a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap A_n) + \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) + \ldots$ odkud již snadno plyne, že $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- Tvrzení (2) se dokazuje analogicky.

Konečný výběrový prostor

Konečné výběrové prostory

- Je-li $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, je Ω konečný a $|\Omega| = n$.

- Například pro „hod dvakrát kostkou“ je $|\Omega| = 36$, kde $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$.
  - Pokud je každý výsledek stejně pravděpodobný, je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{36},$$

    kde $|A|$ je počet prvků jevu A.
  - Například pravděpodobnost, že padne součet 11 je $\frac{2}{36}$, protože existují dva výsledky se sumou 11.
    - Které?
    - Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 12?

Pravděpodobnost na konečném výběrovém prostoru

- Pokud je Ω konečný a každý jeho elementární jev je stejně pravděpodobný, pak

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

je rovnoměrná (uniformní) pravděpodobnostní míra.

- K určení pravděpodobnosti tedy potřebujeme znát počet elementárních jevů příznivých jevu A. K tomu slouží kombinatorické metody.

Základní princip počítání

Věta 9 (Základní princip počítání (pravidlo součinu)).

Mějme dva experimenty. Pokud má první experiment m možných výsledků a pro každý výsledek existuje n možných výsledků druhého experimentu, pak počet možných výsledků obou experimentů společně je mn.

Důkaz.

Vyčísleme všechny možné výsledky obou experimentů:

$$\begin{gathered}(1,1),(1,2),\ldots,(1,n)\\(2,1),(2,2),\ldots,(2,n)\\\vdots\\(m,1),(m,2),\ldots,(m,n)\end{gathered}$$

kde (i,j) značí i-tý možný výsledek prvního experimentu a j-tý možný výsledek druhého. Množina všech možných výsledků tedy sestává z m řádků, kde každý má n prvků. □

Příklad 10.

- Mějme skupinu 10 žen, kde každá žena má 3 děti.
- Pokud bychom měli zvolit jednu ženu a jedno její dítě za matku a dítě roku, kolik možností máme?
- **Řešení:**
- První experiment je volba ženy, druhý experiment je volba jednoho z jejich dětí.
- Základní princip počítání (pravidlo součinu) dává $10 \cdot 3 = 30$ možností.

Zobecnění základního principu počítání

Věta 11 (Zobecněný základní princip počítání (zobecněné pravidlo součinu)).

Jestliže máme provést r experimentů, kde první má n_1 možných výsledků a pro každý z možných výsledků má druhý n_2 možných výsledků a pro každý z možných výsledků prvních dvou experimentů má třetí experiment n_3 možných výsledků atd., pak celkový počet možných výsledků těchto r experimentů je

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_r .$$

□

Příklad 12.

- Středoškolská komise se skládá ze
  - 3 prváků
  - 4 druháků
  - 5 třeťáků a
  - 2 čtvrťáků.
- Volíme 4 zastupitele tak, aby z každého ročníku byl přítomen jeden člen komise.
- Kolik různých zastupitelstev můžeme sestavit?

- **Řešení:** $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 120$.

Příklad 13.

- Kolik různých 7-místných SPZ lze sestavit, jestliže první 3 místa jsou písmena anglické abecedy a další 4 jsou čísla?
- **Řešení:** $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$.

Příklad 14.

- Kolik SPZ by bylo možno sestavit, pokud se písmena ani čísla nesmí opakovat?
- **Řešení:** $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$.

S využitím pravidla součinu lze odvodit řadu často používaných vzorců. Patří k nim:

- **Permutace**
  - Permutace nějakých prvků je jejich seřazení.
- **Permutace s opakováním**
  - Seřazujeme-li objekty z nichž některé jsou stejné, provádíme tzv. permutace s opakováním.
- **Variace** – výběr, u kterého záleží na pořadí vybíraných prvků.
- **Variace s opakováním** – výběr, ve kterém záleží na pořadí vybíraných prvků a ve kterém se prvky mohou opakovat.
- **Kombinace** – výběr, u kterého nezáleží na pořadí vybíraných prvků.
- **Kombinace s opakováním** – výběr, ve kterém nezáleží na pořadí prvků a ve kterém se prvky mohou opakovat.

Permutace

- Kolik je různých uspořádání tří písmen a, b, c?
  - Přímým výpočtem dostaneme 6: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* a *cba*.
- Každé z těchto 6 uspořádání je permutace.
- Základní princip počítání dává, že první prvek permutace může být libovolný ze 3, druhý libovolný ze 2 a třetí ten jeden zbývající
- Tedy máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možných permutací.

Definice 15 (Permutace).

Mějme n různých prvků, pak existuje

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

různých permutací těchto n prvků.

- Zatímco $n!$ („n faktoriál“) je definován jako $1 \cdot 2 \cdots n$ pro celé $n \geq 1$, je vhodné dodefinovat $0! = 1$.

Příklad 16.

- Kolik možných uspořádání existuje v baseballovém týmu 9 hráčů?
- **Řešení:** $9! = 362\,880$ uspořádání.

Příklad 17.

- Ústní zkoušku skládá 6 mužů a 4 ženy.

(a) V kolika různých pořadích mohou postupně na zkoušku přijít?

(b) Kolik různých pořadí existuje, pokud jdou na zkoušku nejprve muži a poté ženy?

- **Řešení:**

(a) 10 lidí lze uspořádat $10! = 3\,628\,800$ způsoby.

(b) Jelikož 6 mužů lze uspořádat 6! způsoby a 4 ženy 4! způsoby, základní princip počítání dává celkem $(6!)(4!) = (720)(24) = 17\,280$ možných pořadí.

Příklad 18.

- Paní Nováková má 10 knih, které chce dát do jedné police knihovny. Z toho jsou
  - 4 o matematice
  - 3 o chemii
  - 2 o historii a
  - 1 jazyková učebnice.
- Paní Nováková chce knihy uspořádat tak, aby stejné obory byly pohromadě.
- Kolika způsoby může knihy uspořádat?

- **Řešení:**
- Paní Nováková má $4!3!2!1!$ možností, přičemž knihy o matematice jsou první a následují knihy o chemii, o historii a nakonec jazyková učebnice.
- Čtyři témata knih lze uspořádat $4!$ způsoby.
- Proto má paní Novákové celkem $4!(4!3!2!1!) = 6\,912$ možností.

Příklad 19.

- Kolik různých přesmyček slov PEPPER lze sestavit?

- Existuje 6! permutací písmen $P_1E_1P_2P_3E_2R$, pokud jsou ta tří písmenka P a dvě E od sebe navzájem rozlišitelná.
  - Uvažme libovolnou z těchto permutací, např. $P_1P_2E_1P_3E_2R$.
  - Pokud prohazujeme P-čka mezi sebou a E-čka mezi sebou, výsledek je stále $PPEPER$.
- Tedy 3!2! permutací jsou tvaru $PPEPER$:

$P_1P_2E_1P_3E_2R$	$P_3P_1E_1P_2E_2R$	$P_2P_1E_2P_3E_1R$
$P_1P_3E_1P_2E_2R$	$P_3P_2E_1P_1E_2R$	$P_2P_3E_2P_1E_1R$
$P_2P_1E_1P_3E_2R$	$P_1P_2E_2P_3E_1R$	$P_3P_1E_2P_2E_1R$
$P_2P_3E_1P_1E_2R$	$P_1P_3E_2P_2E_1R$	$P_3P_2E_2P_1E_1R$

- Celkem tedy máme $\frac{6!}{3!2!} = 60$ různých přesmyček písmen slova $PEPPER$.

Permutace s opakováním

Definice 20 (Permutace s opakováním).

Počet permutací n prvků, kde první prvek se vyskytuje k_1-krát, druhý k_2-krát, až n-tý k_n-krát je

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!},$$

přičemž $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$.

Příklad 21.

- Kolik různých signálů lze vytvořit ze 4 bílých, 3 červených a 2 modrých vlajek, jestliže se každý symbol skládá z 9 vlajek zavěšených vedle sebe a víme, že vlajky stejné barvy jsou identické.
- **Řešení:** $\frac{9!}{4!3!2!} = 1\,260.$

Příklad 22.

- Jaká je pravděpodobnost, že mezi 25 lidmi jsou alespoň dva, kteří mají narozeniny ve stejný den v roce?
  - Požadovaná pravděpodobnost je rovna $1 - \mathbb{P}(\text{„všichni v různý den“})$
  - výběrový prostor jsou funkce z $\{1, \ldots, 25\}$ do $\{1, \ldots, 365\}$ (ignorujeme přestupné roky)
  - $|\Omega| = 365^{25}$
  - „všichni v různý den“ odpovídá injektivním zobrazením, těch je $365 \cdot 364 \cdots 341$.
  - Tedy
    $$\mathbb{P}(\text{„všichni v různý den“}) = \frac{365 \cdot 364 \cdots 341}{365^{25}} \approx 0,4$$
    a tedy hledaná pravděpodobnost je přibližně $0,6$.

Kombinace

- Často nás zajímá počet různých skupin (podmnožin) r prvků z n.
  - Např. kolik různých skupin 3 prvků lze vybrat z prvků A, B, C, D, E?
  - 5 způsobů jak vybrat první, 4 jak vybrat druhý a 3 jak vybrat poslední, proto $5 \cdot 4 \cdot 3$ způsobů, ale...
  - každá skupina 3 prvků (např. A, B, C) bude počítána 6-krát (počítáme všechny permutace ABC, ACB, BAC, BCA, CAB a CBA).
  - Celkový počet skupin je tedy
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

- Obecně máme $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ různých způsobů, jak vybrat r-prvků z n prvků, kde záleží na pořadí prvků, a každá r-tice je počítána $r!$-krát, tedy máme
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
r-prvkových podmnožin z n prvků.

Definice 23.

Definujeme číslo $\binom{n}{r}$ pro $r \leq n$ jako

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

a budeme jej nazývat kombinační číslo a číst jej „n nad r“.

- Z definice $0! = 1$ dostaneme, že $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$.
- Pro $r > n$ nebo $r < 0$ dodefinujeme $\binom{n}{r} = 0$.

Příklad 24.

- Z 20 lidí má být vytvořena tříčlenná komise. Kolik různých komisí lze vytvořit?
- **Řešení:** $\binom{20}{3} = 1\,140$.

Příklad 25.

- Z 5 žen a 7 mužů máme vytvořit komisi 2 žen a 3 mužů. Kolik máme možností?
- **Řešení:** Máme $\binom{5}{2}$ možností jak vybrat 2 ženy z 5 a $\binom{7}{3}$ možností jak vybrat 3 muže ze 7. To je celkem $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = 350$ možností.
- Co když se 2 muži nemají rádi a odmítají být spolu v komisi?
- **Řešení:** Počet skupin tří mužů, kde jsou oba, kteří se nemají rádi, je $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$, a proto máme celkem $(\binom{7}{3} - 5)\binom{5}{2} = 30 \cdot 10 = 300$ možností.

Příklad 26.

- Mějme n antén, z nichž je m vadných a $n-m$ funkčních. Antény jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby je můžeme uspořádat tak, aby žádné dvě vadné nebyly vedle sebe?
  - Představme si, že $n-m$ funkčních antén jsou seřazeny vedle sebe.
  - Pokud žádné dvě vadné nemají být vedle sebe, obsahuje každé místo mezi dvěmi funkčními anténami nejvýše jednu vadnou (včetně krajních míst).
  - Tedy máme $n-m+1$ pozic mezi $n-m$ funkčními anténami, kam umístit m vadných antén.
  - To dává $\binom{n-m+1}{m}$ možných uspořádání.

- Pro $1 \leq r \leq n$ je užitečná následující kombinatorická identita:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}. \tag{1}$$

Důkaz.

- Mějme n prvků a fixujme jeden z nich, řekněme x.
- Dostaneme $\binom{n-1}{r-1}$ skupin r prvků obsahující x a $\binom{n-1}{r}$ skupin r prvků neobsahující x.
- Bylo zde použito pravidlo součtu: Lze-li úkol M provést m způsoby a lze-li úkol N provést n způsoby, přičemž žádný z m způsobů provedení úkolu M není totožný s žádným z n způsobů provedení úkolu N, pak provést úkol M **nebo** úkol N lze $m + n$ způsoby.

□

Věta 27 (Binomická věta).

Pro každé přirozené číslo n a libovolná reálná čísla a, b platí:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{2}$$

Příklad 28.

- Rozviňte $(x+y)^3$.
- **Řešení:** $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Příklad 29.

- Kolik podmnožin má n prvková množina?
- **Řešení:** k-prvkových podmnožin je $\binom{n}{k}$, proto všech je $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

Multinomiální koeficienty

- Množina n různých prvků má být rozdělena do r různých košů tak, že první koš bude obsahovat n_1 prvků, druhý koš n_2 prvků, až r-tý koš bude obsahovat n_r prvků.
- Platí $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.
- Kolik máme možností?
  - Máme $\binom{n}{n_1}$ možností pro první koš
  - Pro každou volbu pro první koš máme $\binom{n-n_1}{n_2}$ možností pro druhý koš, atd.
- Celkem $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$

$$= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$

Znovu permutace s opakováním

Jestliže $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, budeme zapisovat

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Příklad 30.

- Policejní stanice má 10 strážníků.
  - 5 strážníků musí hlídat v ulicích.
  - 2 musí pracovat na stanici.
  - 3 musí být v záloze na stanici.
- Kolik různých rozdělení 10 strážníků do těchto tří skupin existuje?
- **Řešení:** $\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2\,520.$

Příklad 31.

- 10 dětí se má rozdělit do dvou týmů A a B o 5 členech, přičemž tým A bude hrát jednu ligu, tým B druhou. Kolik týmů lze vytvořit?
- **Řešení:** $\binom{10}{5,5} = \frac{10!}{5!5!} = 252.$

Příklad 32.

- 10 dětí se má rozdělit do dvou týmů po 5 členech. Kolik týmů lze vytvořit?
- V čem je rozdíl oproti předchozímu příkladu?
- **Řešení:** Na pořadí týmů nezáleží, jde o rozdělení do dvou skupin po 5. Existuje tedy $\frac{10!/(5!5!)}{2!} = 126$ možných rozdělení.

Věta 33 (Multinomiální věta).

Pro všechna nezáporná celá čísla n_i, pro přirozené číslo n a pro libovolná reálná čísla x_i je

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r) \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}.$$

Příklad 34.

$$
\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= \binom{2}{2,0,0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 + \binom{2}{0,2,0} x_1^0 x_2^2 x_3^0 \\
&+ \binom{2}{0,0,2} x_1^0 x_2^0 x_3^2 + \binom{2}{1,1,0} x_1^1 x_2^1 x_3^0 \\
&+ \binom{2}{1,0,1} x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \binom{2}{0,1,1} x_1^0 x_2^1 x_3^1 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3
\end{aligned}
$$

Přehled vzorců pro permutace, variace a kombinace

Uspořádaný výběr		
Bez opakování	Variace bez opakování	$\frac{n!}{(n-k)!}$
	Permutace bez opakování	$n!$
S opakováním	Variace s opakováním	n^k
	Permutace s opakováním	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$

Neuspořádaný výběr		
Bez opakování	Kombinace bez opakování	$\binom{n}{k}$
S opakováním	Kombinace s opakováním	$\binom{n+k-1}{k}$

Nezávislé jevy

Nezávislé jevy

- Pokud dvakrát hodíme férovou mincí, pravděpodobnost dvou orlů bude $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.
  - Pravděpodobnosti násobíme, protože hody považujeme za nezávislé.

Definice 35 (Nezávislé jevy).

Jevy A a B jsou nezávislé, jestliže

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.$$

Množina jevů $\{A_i \mid i \in I\}$ je nezávislá, pokud

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

pro každou konečnou podmnožinu $J \subseteq I$.

Nezávislost vzniká ve dvou případech:

1. Předpokládáme, že jevy jsou nezávislé
   - například při hodu mince dvakrát po sobě často předpokládáme, že hody jsou nezávislé, což odráží fakt, že mince nemá paměť na první hod.

2. Nezávislost odvodíme (ověřením $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$)
   - například při hodu férovou kostkou pro $A = \{2, 4, 6\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ je $A \cap B = \{2, 4\}$ a $\mathbb{P}(AB) = 2/6 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1/2) \cdot (2/3)$, tedy A a B jsou nezávislé.

- Předpokládejme, že A a B jsou disjunktní jevy s nenulovou pravděpodobností.
- Mohou být nezávislé?

- **Ne**, protože $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$, ale $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
  - odkud $\mathbb{P}(AB) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- Až na tento speciální případ neexistuje způsob, jak zjistit nezávislost pouze z Vennova diagramu.

Příklad 36.

- Házíme férovou mincí 10 krát.
- Označme jako A jev, že „padnul alespoň jednou orel“ a jako T_j jev, že „orel nepadnul v j-tém hodu“. Pak

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{„žádný orel“}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_1 T_2 \cdots T_{10}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(T_2)\cdots\mathbb{P}(T_{10}) \qquad \text{(z nezávislosti)} \\
&= 1 - (1/2)^{10} \approx 0,999.
\end{aligned}$$

Příklad 37.

- Dva hráči hází míč do koše:
  - první s úspěšností $1/3$
  - druhý s úspěšností $1/4$.
- Jaká je pravděpodobnost, že se první trefí dříve než druhý? (Označme jako jev E.)
- Nechť A_j je jev, že se první trefí jako první, a to v j-tém hodu.
  - Pak $A_1, A_2, \ldots$ jsou disjunktní a $E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$, tedy $\mathbb{P}(E) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j)$.
  - Zřejmě $\mathbb{P}(A_1) = 1/3$.
  - Jev A_2 nastane pro situaci „první míjí, druhý míjí, první trefuje“
    - $\mathbb{P}(A_2) = (2/3)(3/4)(1/3) = (1/2)(1/3)$.
  - Obecně $\mathbb{P}(A_j) = (1/2)^{j-1}(1/3)$ a

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j=1}^{+\infty} (1/3)(1/2)^{j-1} = (1/3) \sum_{j=1}^{+\infty} (1/2)^{j-1} = 2/3.$$

Shrnutí

- Jevy A a B jsou nezávislé, právě když $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- Nezávislost se někdy předpokládá, někdy odvozuje.
- Disjunktní jevy s nenulovou pravděpodobností nejsou nezávislé.

Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost

Definice 38.

Jestliže $\mathbb{P}(B) > 0$, pak podmíněná pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B je

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- $\mathbb{P}(A|B)$ vyjadřuje, kolikrát nastal jev A mezi jevy, kde nastal jev B.
- Pro pevné B s $\mathbb{P}(B) > 0$ je $\mathbb{P}(\cdot|B)$ pravděpodobnost (splňuje axiomy)
  - $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$
  - $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$ a
  - pokud jsou $A_1, A_2, \ldots$ disjunktní, tak $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i|B)$.
- Obecně neplatí $\mathbb{P}(A|B \cup C) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C)$.
- Obecně neplatí $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$, například pravděpodobnost vyrážky u spalniček je 1, ale pravděpodobnost spalniček při vyrážce není 1.

Příklad 39 (Testování).

Test na nemoc n dává výsledky $+$ (pozitivní) a $-$ (negativní).
Otestování 1000 vzorků (10 s virem, 990 bez viru) dopadlo následovně:

	n	n^c
$+$	0,009	0,099
$-$	0,001	0,891

Z definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$\mathbb{P}(+|n) = \frac{\mathbb{P}(+\cap n)}{\mathbb{P}(n)} = \frac{0,009}{0,009+0,001} = 0,9 \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(-|n^c) = \frac{0,891}{0,099+0,891} = 0,9.$$

Nemocný má pozitivní test (senzitivita) v 90 % a zdravý má negativní test (specificita) v 90 %.
Když si nechám udělat test a ten bude pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že jsem nemocný?

$$\mathbb{P}(n|+) = \frac{\mathbb{P}(n\cap +)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{0,009}{0,009+0,099} \approx 0,083 \qquad \text{asi 8,3 \%}$$

Lemma 40.

1. *Jestliže A a B jsou nezávislé jevy, pak $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.*
2. *Pro libovolnou dvojici jevů A a B je*

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$

Důkaz.

Přímo z definice. □

- Jiná interpretace nezávislosti tedy je, že znalost B nemění pravděpodobnost A.
- Rovnost $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$ je užitečná, budeme ji dále využívat.

Příklad 41.

- Bez opakování vybereme z balíčku 52 unikátních karet dvě karty.
  - Nechť A je jev, že první karta je křížové eso.
  - Nechť B je jev, že druhá karta je kárová dáma.
- Pak $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = (1/52) \cdot (1/51)$.

Shrnutí

- Jestliže $\mathbb{P}(B) > 0$, pak $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$.
- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ splňuje axiomy pravděpodobnosti pro fixní B.
- Obecně $\mathbb{P}(A|\cdot)$ nesplňuje axiomy pravděpodobnosti pro fixní A.
- Obecně $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$.
- A a B jsou nezávislé, právě když $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Bayesova věta

Bayesova věta

Bayesova věta je základem expertních systémů a Bayesovských sítí.

Věta 42 (Věta o úplné pravděpodobnosti).

Nechť $A_1, \ldots, A_k$ je rozklad Ω. Pak pro libovolný jev B platí

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Důkaz.

Definujme $C_j = B \cap A_j$, pak $C_1, \ldots, C_k$ jsou disjunktní a $B = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$, tedy

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(C_j) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j),$$

protože $\mathbb{P}(B \cap A_j) = \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)$ z definice podmíněné pravděpodobnosti. □

Věta 43 (Bayesova věta).

Nechť $A_1, \ldots, A_k$ je rozklad Ω takový, že $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pro všechna i. Jestliže $\mathbb{P}(B) > 0$, pak pro každé $i = 1, \ldots, k$ platí

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$

Důkaz.

Z dvojího použití definice podmíněné pravděpodobnosti a věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$

□

Příklad 44.

- Rozdělíme emaily do tří kategorií:
  - $A_1 =$ „spam“
  - $A_2 =$ „nedůležité“ a
  - $A_3 =$ „důležité“.
- Ze zkušenosti víme, že $\mathbb{P}(A_1) = 0,7$, $\mathbb{P}(A_2) = 0,2$ a $\mathbb{P}(A_3) = 0,1$.
  - Zajisté platí, že $0,7 + 0,2 + 0,1 = 1$.
- Nechť B je jev, že email obsahuje slovo „free“.
  - Ze zkušenosti víme, že $\mathbb{P}(B|A_1) = 0,9$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 0,01$, $\mathbb{P}(B|A_3) = 0,01$.
    - Všimněme si, že $0,9 + 0,01 + 0,01 \neq 1$.
- Pokud obdržíme email se slovem „free“, jaká je pravděpodobnost, že jde o spam?
- Bayesova věta dává

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{0,9 \cdot 0,7}{(0,9 \cdot 0,7) + (0,01 \cdot 0,2) + (0,01 \cdot 0,1)} \approx 0,995.$$

Jednoduchá aplikace

- Máme tři mince a víme, že dvě jsou férové a jedna je cinknutá – orel padá s pravděp. 2/3.
- Nevíme, která je cinknutá.
- Náhodně zamícháme mince a pak je postupně hodíme.
- Na první a druhé padne orel, na třetí panna.
- Jaká je pravděpodobnost, že první mince je ta cinknutá?

- Mince jsou v náhodném pořadí, a proto každá z nich má stejnou šanci být ta cinknutá.
- Nechť E_i je jev, že i-tá hozená mince je ta cinknutá.
- Nechť B je jev, že na mincích postupně padl orel, orel a panna.

- Před hodem mincí máme, že $\mathbb{P}(E_i) = 1/3$, pro všechna i.
- Též lze určit pravděpodobnost jevu B za předpokladu jevu E_i:

$$\mathbb{P}(B|E_1) = \mathbb{P}(B|E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

a

$$\mathbb{P}(B|E_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

- Použitím Bayesovy věty dostaneme, že

$$\mathbb{P}(E_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|E_1)\mathbb{P}(E_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B|E_i)\mathbb{P}(E_i)} = \frac{2}{5}.$$

Aplikace v informatice

První aplikace: rovnost polynomů

Rovnost polynomů

- Počítače dělají chyby (programátoři, hardware, zaokrouhlování, ...).
- Pro některé problémy můžeme k ověření použít náhodnost.
- Jak lze například ověřit, zda

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6) = x^6 - 3x^5 - 41x^4 + 87x^3 - 444x - 720?$$

- Jak ověřit, že $F(x) = G(x)$ pro dva polynomy $F(x)$ a $G(x)$?
  - Lze je převést na kanonickou formu a porovnat koeficienty.
  - Pokud je $F(x)$ ve tvaru $F(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - a_i)$, převod na kanonickou formu postupným roznásobováním vyžaduje $\Theta(d^2)$ násobení.
    - Předpoklad: násobení je konstantní operace.

Náhodnostní algoritmus

- Nechť d je maximální stupeň polynomů $F(x)$ a $G(x)$.
- Algoritmus zvolí celé číslo $r \in \{1, \ldots, 100d\}$ s rovnoměrnou pravděpodobností.
- Spočítá hodnoty $F(r)$ a $G(r)$.
  - Pokud je $F(r) \neq G(r)$, vrátí „neekvivalentní“.
  - Pokud je $F(r) = G(r)$, vrátí „ekvivalentní“.

- Složitost:
  - Nechť stačí jeden krok na vygenerování $r \in \{1, \ldots, 100d\}$.
  - Výpočet $F(r)$ a $G(r)$ vezme $O(d)$ $\rightsquigarrow$ rychlejší než výpočet kanonické formy.

Korektnost

- Algoritmus: zvol $r \in \{1, \ldots, 100d\}$ rovnoměrně a spočítej $F(r)$ a $G(r)$.
  - Pokud je $F(r) \neq G(r)$, vrať „neekvivalentní“.
  - Pokud je $F(r) = G(r)$, vrať „ekvivalentní“.

- Náhodnostní algoritmus může dát chybnou odpověď
  - Pokud $F(x) = G(x)$, odpověď je správná.
  - Pokud $F(x) \neq G(x)$ a $F(r) \neq G(r)$, odpověď je opět správná.
  - Pokud $F(x) \neq G(x)$ a $F(r) = G(r)$, odpověď je špatná.
    - To nastane, pokud r je řešení rovnice $F(x) - G(x) = 0$.
- Jaká je šance udělat chybu?
  - Stupeň polynomu $F(x) - G(x)$ je nejvýše d.
  - Polynom stupně nejvýše d má nejvýše d kořenů.
  - Pro $F(x) \neq G(x)$ dává nejvýše d hodnot z $\{1, \ldots, 100d\}$ rovnost $F(r) = G(r)$, odkud

$$\mathbb{P}(\text{špatné odpovědi}) \leq \frac{d}{100d} = \frac{1}{100}.$$

Druhá aplikace: násobení matic

Násobení matic

- Mějme tři binární matice (prvky jsou pouze 0 a 1) A, B, C typu $n \times n$.
- Je $AB = C$?

- Standardní násobení matic vyžaduje $\Theta(n^3)$ operací,
  - sofistikovanější metody $\Theta(n^{2,37})$ operací.

Náhodnostní algoritmus:

- Zvolme sloupcový vektor $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \{0,1\}^n$ a spočítejme $A(Br)$ a Cr.
  - Pokud je $A(Br) \neq Cr$, vrať $AB \neq C$; jinak vrať $AB = C$.
- Složitost: $\Theta(n^2)$ operací.

Věta 45.

Pokud je $AB \neq C$ a $r \in \{0,1\}^n$ je zvolen náhodně s rovnoměrnou pravděpodobností, tak

$$\mathbb{P}(A(Br) = Cr) \leq \frac{1}{2}.$$

Důkaz:

- Prostor elementárních jevů sloupcového vektoru r je $\Omega = \{0,1\}^n$.
- Uvažujeme jev $\{r \in \{0,1\}^n \mid A(Br) = Cr\} \subseteq \Omega$.
- Volba $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \{0,1\}^n$ s rovnoměrnou pravděpodobností je ekvivalentní s volbami r_i nezávisle s rovnoměrnou pravděpodobností z $\{0,1\}$.
  - Každé r_i je zvoleno nezávisle, rovnoměrně, proto je každý vektor z 2^n možných vektorů zvolen s pravděpodobností 2^{-n}.
- Nechť $D = AB - C \neq 0$, pak $A(Br) = Cr$ dává $Dr = 0$.
- Ale $D \neq 0$, proto má nenulový prvek, řekněme d_{11}.

Důkaz pokračování

- Pro $Dr = 0$ musí platit, že $\sum_{j=1}^{n} d_{1j} r_j = 0$, tj.

$$r_1 = -\frac{\sum_{j=2}^{n} d_{1j} r_j}{d_{11}}. \tag{3}$$

- Místo vektoru r budeme volit r_k nezávisle a rovnoměrně z $\{0, 1\}$ v pořadí od r_n k r_1.
- Uvažme situaci těsně před volbou r_1:
  - v tomto okamžiku máme na pravé straně (3) číslo
  - a nejvýše jednu volbu pro r_1 splňující (3).
- Protože existují dvě možnosti pro volbu $r_1 \in \{0, 1\}$, rovnost nastane s pravděp. $\leq 1/2$.

$\rightsquigarrow$ Této technice se říká princip odloženého rozhodování.

- Pokud existuje několik náhodných veličin, jako naše r_i vektoru r, často pomůže uvažovat o některých jako by byly definovány v nějakém kroku algoritmu, zatímco ostatní jsou voleny náhodně – odloženy – do nějakého budoucího bodu v analýze.
- Formálně to odpovídá podmiňování odhalených hodnot: když jsou nějaké náhodné veličiny odhaleny, musíme podmínit odhalené hodnoty ve zbytku analýzy.

Dokončení důkazu – použijeme větu o úplné pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A(Br) = Cr) &= \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}((A(Br) = Cr) \cap ((r_2,\ldots,r_n) = (x_2,\ldots,x_n))) \\
&\leq \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}\big((r_1 = -\frac{\sum_{j=2}^{n} d_{1j} r_j}{d_{11}}) \cap ((r_2,\ldots,r_n) = (x_2,\ldots,x_n))\big) \\
&= \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}\big(r_1 = -\frac{\sum_{j=2}^{n} d_{1j} r_j}{d_{11}}\big)\mathbb{P}((r_2,\ldots,r_n) = (x_2,\ldots,x_n)) \\
&\leq \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \frac{1}{2}\mathbb{P}((r_2,\ldots,r_n) = (x_2,\ldots,x_n)) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Nezávislost r_1 a $(r_2,\ldots,r_n)$ je použita na třetím řádku. □

Jak snížit chybu?

- K vylepšení chyby můžeme algoritmus několikrát opakovat.
  - Pokud najdeme vektor r tak, že $A(Br) \neq Cr$, algoritmus správně vrátí $AB \neq C$.
  - Pokud při každém opakování dostaneme, že $A(Br) = Cr$, pak algoritmus vrátí $AB = C$
    - ale je zde jistá pravděpodobnost chyby.
- Opakování algoritmu k-krát zvýší složitost na $\Theta(kn^2)$.
  - Např. pro 100 opakování je složitost stále $\Theta(n^2)$.

- Volba $r \in \{0,1\}^n$ pro k opakování dává pravděpodobnost chyby 2^{-k}.
  - Pravděpodobnost chyby algoritmu při 100 opakováních je nejvýše 2^{-100}.
  - V praxi je pak mnohem pravděpodobnější, že počítač „klekne“ během provádění algoritmu než to, že vrátí špatnou odpověď.

Jak přispívá opakování algoritmu ke zvýšení důvěry?

- Pokud nemáme další informace o procesu, který vygeneroval testovanou identitu, je rozumné začít s tím, že identita platí s pravděpodobností $1/2$.
  - Pokud spustíme test jednou a on vrátí, že identita platí, jak to ovlivní naši jistotu ve správnost identity?
- Mějme jevy $E =$ „rovnost platí“ a $B =$ „test vrací, že rovnost platí“.
- Pak $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c) = 1/2$ a protože má test chybu $1/2$, dostaneme
  - $\mathbb{P}(B|E) = 1$ a
  - $\mathbb{P}(B|E^c) \leq 1/2$.
- Bayesova věta pak dává, že

$$\mathbb{P}(E|B) = \frac{\mathbb{P}(B|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(B|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(B|E^c)\mathbb{P}(E^c)} \geq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

- Opakujme test a předpokládejme, že znovu vrátí, že rovnost platí.
  - Po prvním testu můžeme zrevidovat model a dostat $\mathbb{P}(E) \geq 2/3$ a $\mathbb{P}(E^c) \leq 1/3$.
- Nechť $B =$ „nový test vrací, že rovnost platí“;
  - protože testy jsou nezávislé, máme $\mathbb{P}(B|E) = 1$ a $\mathbb{P}(B|E^c) \leq 1/2$.
- Bayesova věta dává

$$\mathbb{P}(E|B) \geq \frac{2/3}{2/3 + 1/3 \cdot 1/2} = \frac{4}{5}.$$

- Obecně: pokud náš model před testem je $\mathbb{P}(E) \geq 2^i/(2^i+1)$ a pokud „test vrátí, že rovnost platí“ (jev B), pak

$$\mathbb{P}(E|B) \geq \frac{\frac{2^i}{2^i+1}}{\frac{2^i}{2^i+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^i+1}} = \frac{2^{i+1}}{2^{i+1}+1} = 1 - \frac{1}{2^{i+1}+1}.$$

  - Pokud po 100 opakováních test vrací, že rovnost platí, je naše víra ve správnost rovnosti alespoň $1 - 1/(2^{101}+1) > 0,999999999999999999999999999999$.

Aplikace: Naivní bayesovský klasifikátor

Naivní bayesovský klasifikátor

- Algoritmus učení s učitelem.
  - Klasifikuje objekty odhadováním pravděpodobnosti pomocí Bayesovy věty v jednoduchém (naivním) modelu.
  - Velmi dobrý v aplikacích: klasifikace textových dokumentů či emailový spam filter.
  - Deterministický algoritmus postavený na konceptu podmíněné pravděpodobnosti.

- Mějme n tréninkových dat $\{(D_1, c(D_1)), \ldots, (D_n, c(D_n))\}$
  - D_i je vektor tvaru $x^i = (x_1^i, \ldots, x_m^i)$
    - D_i je objekt s vlastnostmi $(X_1, \ldots, X_m)$
    - $x^i = (x_1^i, \ldots, x_m^i)$ znamená, že pro D_i je $X_1 = x_1^i, \ldots, X_m = x_m^i$.
    - Pokud je například D_i textový dokument a vlastnosti jsou klíčová slova, pak X_j může být:

      $$x_j^i = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } j\text{-té klíčové slovo v } D_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

  - Vektor vlastností dokumentu tedy odpovídá množině klíčových slov v něm obsažených.

- Mějme množinu $C = \{c_1, \ldots, c_t\}$ možných klasifikací objektu
  - C může být například množina příznaků {„spam“, „no-spam“}.
  - $c(D_i)$ je klasifikace D_i.

- Pro klasifikaci předpokládáme, že tréninková množina je vzorek z nějakého neznámého rozdělení pravděpodobnosti.
  - Cílem je pro daný nový dokument najít přesnou klasifikaci.

- Obecněji můžeme hledat vektor $(z_1, \ldots, z_t)$, kde z_j je odhad pravděp., že $c(D_i) = c_j$.
  - Pokud bychom hledali nejpravděpodobnější klasifikaci, vrátíme c_j s největší hodnotou z_j.

- Mějme velkou tréninkovou množinu $D = \{(D_1, c(D_1)), \ldots, (D_n, c(D_n))\}$. Z ní určíme empirickou podmíněnou pravděpodobnost toho, že objekt s vlastnostmi $y = (y_1, \ldots, y_m)$ je klasifikován jako c_j:

$$p_{y,j} = \frac{|\{i \mid D_i = y, c(D_i) = c_j\}|}{|\{i \mid D_i = y\}|}.$$

$$p_{y,j} = \frac{|\{i \mid D_i = y, c(D_i) = c_j\}|}{|\{i \mid D_i = y\}|}$$

- Nechť D^* je nový objekt s vlastnostmi x^* a stejným rozdělením, pak $p_{x^*,j}$ je empirický odhad podmíněné pravděpodobnosti

$$\mathbb{P}(c(D^*) = c_j \mid x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)).$$

  - Tyto hodnoty by šlo předpočítat a pro x^* vrátit vektor $(z_1, \ldots, z_t) = (p_{x^*,1}, \ldots, p_{x^*,t})$.
  - Museli bychom ale uvažovat všechny možné případy hodnot m vlastností.
    - Pro vlastnosti se dvěmi hodnotami potřebujeme 2^m podmíněných pravděpodobností pro každou třídu, celkem tedy $\Omega(|C|2^m)$ vzorků.

- Trénovací proces je rychlejší a pokud uvážíme naivní model, kde vlastnosti jsou nezávislé, vyžaduje výrazně méně příkladů.
  - Pak máme

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(c(D^*) = c_j \mid x^*) &= \frac{\mathbb{P}(x^* \mid c(D^*) = c_j) \cdot \mathbb{P}(c(D^*) = c_j)}{\mathbb{P}(x^*)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(x_k^* = x_k \mid c(D^*) = c_j) \cdot \mathbb{P}(c(D^*) = c_j)}{\mathbb{P}(x^*)}.\end{aligned}$$

  - Zde x_k^* reprezentuje k-tou komponentu vektoru x^* objektu D^*.

- S konstantním počtem možných hodnot pro každou vlastnost potřebujeme odhady pouze pro $O(m|C|)$ pravděpodobností.

- Označme $\hat{\mathbb{P}}$ empirickou pravděpodobnost, tj. relativní frekvenci jevů z trénovací množiny.
  - Notace zdůrazňuje, že bereme odhady pravděpodobností jak byly určeny z trénovací množiny.
    - V praxi se často dělá drobná modifikace, jako je například přidání $1/2$ k čitateli každého zlomku, aby empirická pravděpodobnost nebyla 0.

- Trénovací proces je následující:
  1. Pro každou klasifikaci c_j spočítáme

$$\hat{\mathbb{P}}(c(D^*) = c_j) = \frac{|\{i \mid c(D_i) = c_j\}|}{|D|},$$

     kde $|D|$ je počet objektů v trénovací množině.
  2. Pro každou vlastnost X_k a každou její hodnotu x_k spočítáme

$$\hat{\mathbb{P}}(x_k^* = x_k \mid c(D^*) = c_j) = \frac{|\{i \mid x_k^i = x_k, c(D_i) = c_j\}|}{|\{i \mid c(D_i) = c_j\}|}.$$

Klasifikace nového objektu D^*

- Určení nejpravděpodobnější klasifikace $x^* = x = (x_1, \ldots, x_m)$:

$$c(D^*) = \arg\max_{c_j \in C} \left\{ \left(\prod_{k=1}^{m} \hat{\mathbb{P}}(x_k^* = x_k \mid c(D^*) = c_j) \right) \hat{\mathbb{P}}(c(D^*) = c_j) \right\}$$

  - tj., po natrénování klasifikátoru je klasifikace nového objektu D^* s vektorem vlastností $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ určena pomocí

$$\left(\prod_{k=1}^{m} \hat{\mathbb{P}}(x_k^* = x_k \mid c(D^*) = c_j) \right) \cdot \hat{\mathbb{P}}(c(D^*) = c_j)$$

    pro každé c_j a výběrem klasifikace s nejvyšší hodnotou.

- Naivní bayesovský klasifikátor je efektivní a jednoduchý na implementaci (kvůli naivnímu modelu).
- Může však vést k chybným výsledkům, pokud klasifikace závisí na kombinaci vlastností:
  - Mějme položky charakterizované booleovskými vlastnostmi X a Y.
  - Pokud je $X = Y$, je položka klasifikována jako patřící do třídy A, jinak do třídy B.
  - Pokud má trénovací množina stejný počet položek v každé třídě pro každou hodnotu X a Y, pak jsou všechny podmíněné pravděpodobnosti určené klasifikátorem rovny 0,5 a klasifikátor tak není lepší než házení mincí.
  - V praxi se takové úkazy vyskytují zřídka a naivní bayesovský klasifikátor je často velmi efektivní.

Aplikace: Náhodnostní min-cut algoritmus

Náhodnostní min-cut algoritmus

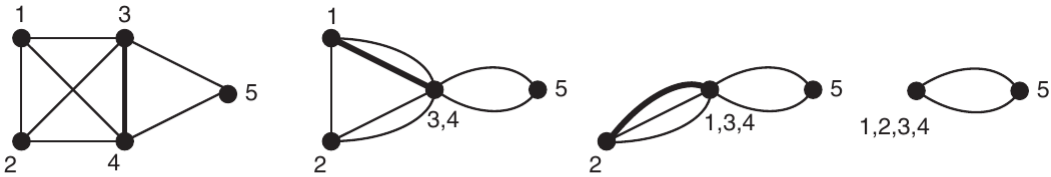
- Řez v grafu je množina hran, jejíž odstranění rozdělí graf na dvě či více souvislých komponent.
- Min-cut problém = najdi v grafu $G = (V, E)$ s n vrcholy řez s minimální kardinalitou.
  - Problém má mnoho použití, například při určování spolehlivosti sítí.
    - Když uzly reprezentují počítače a hrany jejich propojení v síti, tak min-cut je nejmenší počet spojení, které se musí přerušit, aby některé dva počítače nemohly komunikovat.
  - Další použití je například ve shlukové analýze.
    - Pokud jsou uzly webové stránky (či libovolné hypertextové dokumenty) a dva uzly jsou spojeny hranou když mezi sebou mají hyperlink, pak malé řezy rozdělují graf do shluků dokumentů mezi nimiž je málo linků.
    - Mezi dokumenty v různých shlucích není pravděpodobně žádný vztah.

Aplikace: Náhodnostní min-cut algoritmus

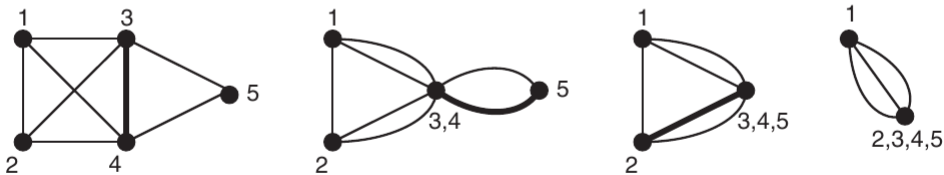
- Algoritmus obsahuje $n - 2$ iterací.
  - V každé iteraci vybere hranu a kontrahuje ji.
    - Kontrakce hrany $(u, v) =$ sloučení u a v do jednoho uzlu a odstranění všech hran mezi u a v.
    - Výsledný graf může mít paralelní hrany, ale ne smyčky.
  - Algoritmus vybírá hranu náhodně s uniformním rozdělením z aktuální množiny hran.

- Každá iterace redukuje počet uzlů o jeden, tj. po $n - 2$ iteracích má graf pouze dva uzly.
  - Algoritmus vrátí množinu hran spojující tyto dva uzly.

- Ověřte, že libovolný řez grafu po iteraci je též řez grafu před iterací.
  - Opak neplatí: ne každý řez grafu před iterací je též řez grafu po iteraci – některé hrany řezu mohly být kontrahovány (v předchozích iteracích).
  - Nicméně, výsledek algoritmu je vždy řez, ne však nutně minimální kardinality, viz obrázek.



(a) A successful run of min-cut.



(b) An unsuccessful run of min-cut.

Figure 1.1: An example of two executions of min-cut in a graph with minimum cut-set of size 2.

Věta 46.

Algoritmus vrátí minimální řez s pravděpodobností alespoň $2/(n(n-1))$.

Důkaz

- Nechť k je velikost minimálních řezů v G a C je nějaký minimální řez.
  - Odstranění hran z C rozloží uzly G na S a $V-S$ tak, že neexistuje hrana z S do $V-S$.
- Pokud algoritmus v každém kroku kontrahuje hranu spojující dva uzly z S či dva uzly z $V-S$, tj. ne z C, pak po $n-2$ iteracích vrátí graf se dvěma uzly spojenými hranami z C.
  - Pokud tedy nikdy nevybere hranu z C ve svých $n-2$ iteracích, vrátí C jako minimální řez.
- Nechť E_i je jev, že „kontrahovaná hrana vybraná v iteraci i, která není z C“.
- Nechť $F_i = \bigcap_{j=1}^{i} E_j$ je jev, že „v prvních i iteracích nebyla kontrahována hrana z C“.
  - Určíme $\mathbb{P}(F_{n-2})$.

Poznámka: $E_i =$ „kontrahovaná hrana vybraná v iteraci i, která není z C“; $F_i = \bigcap_{j=1}^{i} E_j$.

Důkaz pokračování

- Začneme s $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(F_1)$.
- Jelikož má minimální řez k hran, jsou všechny uzly grafu stupně alespoň k. Tedy graf musí mít alespoň $nk/2$ hran.
- První kontrahovaná hrana je vybráná náhodně (rovnoměrně) z množiny všech hran.
- Jelikož máme alespoň $nk/2$ hran a C má k hran, pravděpodobnost toho, že vybereme hranu z C v první iteraci je

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(F_1) \geq 1 - \frac{2k}{nk} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Poznámka: $E_i =$ „kontrahovaná hrana vybraná v iteraci i, která není z C“; $F_i = \bigcap_{j=1}^{i} E_j$.

Důkaz pokračování

- Nechť první kontrakce neodstranila hranu z C, tj. nastal jev F_1.
  - Po první iteraci tak máme $(n-1)$-uzlový graf s minimálním řezem velikosti k.
  - Stupeň jeho uzlů je alespoň k a graf má alespoň $k(n-1)/2$ hran.
  - Pak
$$\mathbb{P}(E_2 \mid F_1) \geq 1 - \frac{k}{k(n-1)/2} = 1 - \frac{2}{n-1}$$
a obecně
$$\mathbb{P}(E_i \mid F_{i-1}) \geq 1 - \frac{k}{k(n-i+1)/2} = 1 - \frac{2}{n-i+1}.$$

Důkaz pokračování

- Nyní máme

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_{n-2}) &= \mathbb{P}(E_{n-2} \cap F_{n-3}) \\
&= \mathbb{P}(E_{n-2} \mid F_{n-3}) \cdot \mathbb{P}(F_{n-3}) \\
&= \mathbb{P}(E_{n-2} \mid F_{n-3}) \cdot \mathbb{P}(E_{n-3} \mid F_{n-4}) \cdots \mathbb{P}(E_2 \mid F_1) \cdot \mathbb{P}(F_1) \\
&\geq \prod_{i=1}^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n-i+1}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n-2} \left(\frac{n-i-1}{n-i+1}\right) \\
&= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

- Jelikož má algoritmus jednostrannou chybu, můžeme pravděpodobnost chyby algoritmu zredukovat jeho opakováním.
- Pokud bychom algoritmus opakovali $n(n-1)\ln n$ krát a vrátili řez s minimální velikostí nalezený během všech opakování, pak pravděpodobnost toho, že výsledek není minimální řez je nejvýše

$$\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{n(n-1)\ln n} \leq e^{-2\ln n} = \frac{1}{n^2}.$$

  - Zde se použilo to, že $1 - x \leq e^{-x}$.

Náhodná veličina

Náhodná veličina

- Statistika a data mining se zabývají daty.
- Jak spojit výběrové prostory a jevy s daty?
  - Pomocí konceptu náhodné veličiny.

Definice 47.

Náhodná veličina je funkce $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, která přiřazuje reálné číslo $X(\omega)$ každému výsledku $\omega \in \Omega$.

- Pravděpodobnostní míra $\mathbb{P}$ je definována na σ-algebře $\mathcal{A}$ prostoru Ω.
- Náhodná veličina X je měřitelná funkce $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$.
  - Měřitelná znamená, že pro každé x je množina $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ jev, tedy $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Poznámka 48.

Ačkoli budeme pracovat přímo s náhodnými veličinami bez uvádění výběrového prostoru, je třeba si uvědomit, že výběrový prostor tam někde vždy je!

Příklad 49.

Uvažujme hod mincí desetkrát po sobě. Nechť $X(\omega)$ je počet orlů v posloupnosti ω, například pro $\omega = OOPOOPOOPP$ je $X(\omega) = 6$.

Příklad 50.

Nechť $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \leq 1\}$. Náhodně zvolme bod z Ω. Typický výsledek je tvaru $\omega = (x, y)$. Příklady náhodných veličin:

- $X(\omega) = x$
- $Y(\omega) = y$
- $Z(\omega) = x + y$
- $W(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pro danou náhodnou veličinu X a podmnožinu A reálné osy definujeme

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

a dále

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$
$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}).$$

Všimněme si, že X značí náhodnou veličinu a x značí konkrétní hodnotu X.

Příklad 51.

Hod mincí dvakrát po sobě. Nechť X je počet orlů. Pak

- $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{PP\}) = 1/4$
- $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{OP, PO\}) = 1/2$
- $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{OO\}) = 1/4.$

Náhodnou veličinu a její distribuci lze zapsat tabulkou

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
PP	$1/4$	0
PO	$1/4$	1
OP	$1/4$	1
OO	$1/4$	2

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	$1/4$
1	$1/2$
2	$1/4$

Distribuční a pravděpodobnostní funkce

Distribuční a pravděpodobnostní funkce

Definice 52.

(Kumulativní) distribuční funkce je funkce $F_X \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ definovaná jako

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)\,.$$

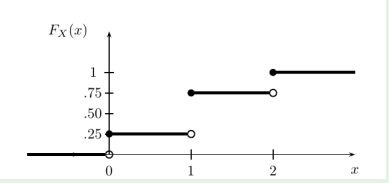
Distribuční funkce obsahuje veškerou informaci o náhodné veličině.

Občas píšeme distribuční funkce jako F místo F_X.

Příklad 53.

Hod férovou mincí dvakrát, X je počet orlů. Pak $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ a $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. Distribuční funkce je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1/4 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } 2 \leq x. \end{cases}$$



Důkladně prostudujte, distribuční funkce mohou být komplikované. Funkce je zprava spojitá, neklesající a definovaná pro všechna x. Proč je $F_X(1,4) = 0,75$?

Distribuční funkce plně určuje rozložení náhodné veličiny.

Věta 54.

Nechť X má distribuční funkci F a Y má distribuční funkci G. Jestliže

$$F(x) = G(x)$$

pro všechna x, pak

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$$

pro všechna A.[1]

[1] Přesněji máme, že $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ pro každý měřitelný jev A.

Věta 55.

Funkce $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *je distribuční funkce pro nějakou pravděpodobnostní míru* $\mathbb{P}$*, právě když* F *splňuje následující tři podmínky:*

1. F *je neklesající:* $x_1 < x_2$ *implikuje, že* $F(x_1) \leq F(x_2)$
2. F *je normalizovaná:* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. F *je zprava spojitá:* $F(x) = F(x^+)$ *pro všechna* x*, kde* $F(x^+) = \lim_{y\to x,\, x<y} F(y)$.

Důkaz.

Ukážeme 3. Nechť x je reálné číslo a $y_1, y_2, \ldots$ posloupnost reálných čísel takových, že $y_1 > y_2 > \cdots$ a $\lim_i y_i = x$. Nechť $A_i = (-\infty, y_i]$ a $A = (-\infty, x]$. Pak $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ a $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. Protože jsou jevy monotónní, je $\lim_i \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcap_i A_i)$, tj.

$$F(x) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcap_i A_i) = \lim_i \mathbb{P}(A_i) = \lim_i F(y_i) = F(x^+).$$

Důkaz 1 a 2 je podobný. Opačná implikace je komplikovanější. □

Diskrétní náhodná veličina

Diskrétní náhodná veličina

Definice 56.

Náhodná veličina X je diskrétní, jestliže nabývá spočetně mnoho hodnot $\{x_1, x_2, \ldots\}$.
Definujme pravděpodobnostní funkci pro X jako

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Pak $f_X(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $\sum_i f_X(x_i) = 1$.

Někdy píšeme f místo f_X.

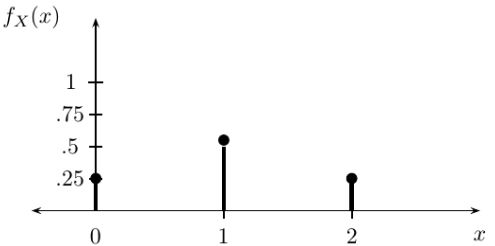
Distribuční funkce X souvisí s pravděpodobnostní funkcí f_X následovně:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i).$$

Příklad 57.

Hod férovou mincí dvakrát, X je počet orlů. Pak $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ a $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. Pravděpodobnostní funkce je

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{pro } x = 0 \\ 1/2 & \text{pro } x = 1 \\ 1/4 & \text{pro } x = 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Vybrané diskrétní náhodné veličiny

Vybrané diskrétní náhodné veličiny

- $X \sim F$ značí, že X má rozdělení F.
- $X \sim F$ tedy čteme jako „X má rozdělení F“, nikoli „X je přibližně F“.

Bodové rozdělení

X má bodové rozdělení v a, $X \sim \delta_a$, jestliže $\mathbb{P}(X = a) = 1$, přičemž

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ 1 & \text{pro } x \geq a. \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce je $f(x) = 1$ pro $x = a$ a 0 jinak.

Diskrétní rovnoměrné rozdělení

Nechť $k > 1$ a nechť X má pravděpodobnostní funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{pro } x = 1, \ldots, k \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak X má rovnoměrné (uniformní) rozdělení na $\{1, \ldots, k\}$.

Jak vypadá distribuční funkce?

Bernoulliho rozdělení

Nechť X představuje hod mincí. Pak

$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$

a

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

pro $p \in [0, 1]$.
Řekneme, že X má Bernoulliho rozdělení, $X \sim Bernoulli(p)$.
Pravděpodobnostní funkce je

$$f(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ pro } x \in \{0, 1\}.$$

Jak vypadá distribuční funkce?

Binomické rozdělení

Mějme minci na níž padá orel s pravděpodobností p pro nějaké $0 \leq p \leq 1$. Házíme n krát a X je počet hodů, kdy padl orel. Předpokládejme, že hody jsou nezávislé. Pak pravděpodobnostní funkce je

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Taková náhodná veličina (NV) se nazývá binomická, $X \sim Binomial(n, p)$.

Jestliže $X_1 \sim Binomial(n_1, p)$ a $X_2 \sim Binomial(n_2, p)$, pak $X_1 + X_2 \sim Binomial(n_1 + n_2, p)$.

Jak vypadá distribuční funkce si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 58.

Házíme pětkrát férovou mincí a předpokládáme, že hody jsou nezávislé. Jaká je pravděpodobnostní funkce počtu padlých orlů? (Jak vypadá odpovídající distribuční funkce?) Nechť X je NV vyjadřující počet úspěchů, tj. počet padlých orlů. Pak X má binomické rozdělení s parametry $n = 5$ a $p = 1/2$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$
$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$
$$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Příklad 59.

Jistý výrobce vyrábí produkt, o němž je známo, že je špatný s pravděpodobností 0,01, nezávisle na ostatních. Tento produkt výrobce prodává v balení po 10 kusech a nabízí výměnu balení, pokud je více než jeden produkt špatný. Jaké množství prodaných balení by mělo být výrobcem vyměněno?

Řešení: Pokud X značí počet špatných produktů, pak X je binomická NV s parametry $(10; 0,01)$. Pravděpodobnost, že balení bude obsahovat alespoň dva špatné produkty je tedy

$$1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) = 1 - \binom{10}{0}(0,01)^0(0,99)^{10} - \binom{10}{1}(0,01)^1(0,99)^9 \approx 0,004.$$

Výrobce tedy očekává oprávnění na výměnu u 0,4 procenta balení.

Poznámka

- X je náhodná veličina a x je konkrétní hodnota náhodné veličiny.
- n a p jsou parametry, nějaká fixní reálná čísla.
- Parametr p je obvykle neznámý a musí být odhadnut z dat (třeba na základě statistické inference).
- V mnoha statistických modelech jsou NV a parametry – nezaměňovat!

Geometrické rozdělení

NV X má geometrické rozdělení s parametrem $p \in (0,1)$, $X \sim Geom(p)$, jestliže

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \text{ kde } x \geq 1.$$

Pak platí

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x) = p \sum_{x=0}^{+\infty} (1-p)^x = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Příklad 60.

X vyjadřuje počet hodů mincí než poprvé padne orel.

Příklad 61.

Urna obsahuje N bílých a M černých míčků. Míčky jsou náhodně vybírány jeden po druhém, dokud není vybrán černý. Pokud je vždy vybraný míček nahrazen jiným míčkem stejné barvy před tím, než se vybírá další, jaká je pravděpodobnost, že
(a) je potřeba přesně n tahů?
(b) je potřeba alespoň k tahů?

Řešení: Nechť X značí počet tahů, které jsou potřeba k vybrání černého míčku. Pak X je geometrická NV s $p = M/(M+N)$ a máme:
(a)

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{N}{N+M}\right)^{n-1} \frac{M}{N+M} = \frac{MN^{n-1}}{(M+N)^n}.$$

(b)

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{M}{M+N} \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{N}{N+M}\right)^{n-1} = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{k-1} = (1-p)^{k-1}.$$

Poissonovo rozdělení

NV X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, $X \sim Poisson(\lambda)$, jestliže

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \text{ kde } x \geq 0.$$

Platí

$$\sum_{x=0}^{+\infty} f(x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Poznámka 62.

Poissonovo rozdělení se často používá jako model pro počítání vyjímečných jevů (radioaktivní rozklad, dopravní nehody, atd.).

Jestliže $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ a $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$, pak $X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Aproximace binomického rozdělení

Poissonovo rozdělení má mnoho aplikací – lze jej použít jako aproximaci binomického rozdělení s parametry (n, p), kde n je velké a p je dostatečně malé, aby np bylo přiměřené.

Nechť X je binomická NV s parametry (n, p) a $\lambda = np$. Pak

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= \frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)\lambda^i(1-\lambda/n)^n}{n^i i!(1-\lambda/n)^i}.\end{aligned}$$

Pro velké n a přiměřené λ dostáváme

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \approx 1, \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1,$$

odkud

$$\mathbb{P}(X = i) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Příklady použití

Pokud provedeme n nezávislých pokusů, každý s pravděpodobností úspěchu p, a pokud n je velké a p dostatečně malé, aby np bylo přiměřené, tak počet výskytů úspěchů je přibližně Poissonova NV s parametrem $\lambda = np$.

Hodnota λ se obvykle zjistí empiricky.

Příklady NV, které mají Poissonovo rozdělení:

- Počet překlepů na stránce knihy.
- Počet lidí v komunitě, kteří se dožijí 100 let.
- Počet špatně zadaných telefonních čísel denně.
- Počet balíků psích sucharů prodaných v daném obchodě za den.
- Počet zákazníků, kteří přijdou daný den na poštu.
- Počet α-částic uvolněných z radioaktivního materiálu během fixního časového období.

Příklad 63.

Nechť počet typografických chyb na jedné stránce knihy má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 1/2$. Určete pravděpodobnost, že na dané stránce je chyba.

Řešení: Nechť X značí počet chyb na dané stránce. Pak máme

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1/2} \approx 0,393.$$

Příklad 64.

Nechť pravděpodobnost, že produkt vyrobený jistým strojem bude vadný je 0,1. Určete pravděpodobnost toho, že vzorek 10 produktů bude obsahovat nejvýše jeden vadný.

Řešení: Hledaná pravděpodobnost je

$$\binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} + \binom{10}{1}(0,1)^1(0,9)^9 = 0,7365.$$

Pro srovnání, aproximace pomocí Poissonova rozdělení dává hodnotu

$$e^{-1} + e^{-1} \approx 0,7358.$$

Poznámka

- NV jsou funkce z Ω do $\mathbb{R}$, ale v rozděleních nezmiňujeme výběrový prostor Ω.
  - Ten tam vždy je a lze ho zkonstruovat.
- Zkonstruujme výběrový prostor například pro Bernoulliho NV.
  - Nechť $\Omega = [0, 1]$ a definujme $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$ pro $0 \leq a \leq b \leq 1$.
  - Fixujme $p \in [0, 1]$ a definujme

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \leq p \\ 0 & \text{pro } \omega > p. \end{cases}$$

  - Pak $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\omega \leq p) = \mathbb{P}([0, p]) = p$ a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
  - Tedy $X \sim \mathit{Bernoulli}(p)$.
- Podobně lze postupovat pro všechna definovaná rozdělení.
- V praxi bereme NV jako náhodná čísla, ale formálně jde o funkce na nějakém výběrovém prostoru.

Spojitá náhodná veličina

Spojitá náhodná veličina

Definice 65.

Náhodná veličina X je spojitá, jestliže existuje funkce f_X taková, že

1. $f_X(x) \geq 0$ pro všechna x
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
3. pro každé $a \leq b$ platí

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

Funkce f_X se nazývá hustota. Platí

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

a $f_X(x) = F_X'(x)$ ve všech bodech x, ve kterých je F_X diferencovatelná.

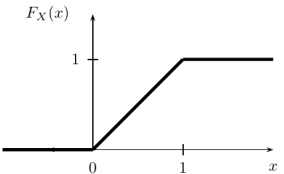
Příklad 66.

Nechť X má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak $f_X(x) \geq 0$ a $\int f_X(x)\,dx = 1$. NV s touto hustotou má uniformní (rovnoměrné) rozdělení na intervalu $(0, 1)$, tj. náhodný výběr bodu mezi 0 a 1. Distribuční funkce je pak dána jako

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$



Příklad 67.

Nechť X má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jelikož $\int f_X(x)\,dx = 1$, jde skutečně o hustotu.

Pozor!

- Spojité náhodné veličiny mohou být záludné!

- Pokud je X spojitá, tak $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pro každé x.
  - Neuvažujte tedy o $f(x)$ jako o $\mathbb{P}(X = x)$, to platí pouze pro diskrétní NV.
  - Pravděpodobnosti získáme z hustoty integrací.

- Hustota může být větší než 1 (narozdíl od pravděpodobnosti).
  - Například pro

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{pro } x \in [0, 1/5] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

  je $f(x) \geq 0$ a $\int f(x)\,dx = 1$, tudíž jde o hustotu, ačkoli $f(x) = 5$.

- Hustota může být i neomezená.
  - Například pro

$$f(x) = \begin{cases} (2/3)x^{-1/3} & \text{pro } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad 68.

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak nejde o hustotu, protože $\int f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = \ln +\infty = +\infty$.

Lemma 69.

Nechť F je distribuční funkce náhodné veličiny X. Pak

1. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$, *kde* $F(x^-) = \lim_{y \to x^-} F(y)$
2. $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$
3. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$
4. *Pokud je X spojitá, tak*

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b). \end{aligned}$$

Důkaz.

Intuice pro bod 2:
$\{X \leq y\} = \{X \leq x\} \cup \{x < X \leq y\}$, a tedy $\mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(x < X \leq y)$. □

Vybrané spojité náhodné veličiny

Rovnoměrné rozdělení

NV X má rovnoměrná rozdělení na intervalu (a, b), $X \sim Uniform(a, b)$, jestliže je pro $a < b$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 1 & \text{pro } x > b. \end{cases}$$

Příklad

Příklad 70.

Nechť X je NV s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 10)$. Určete pravděpodobnost, že

- $X < 3$
- $X > 6$
- $3 < X < 8$.

Řešení:

$$\mathbb{P}(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X > 6) = \int_6^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}$$

$$\mathbb{P}(3 < X < 8) = \int_3^8 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

NV X má normální (Gaussovo) rozdělení s parametry μ a σ, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, jestliže

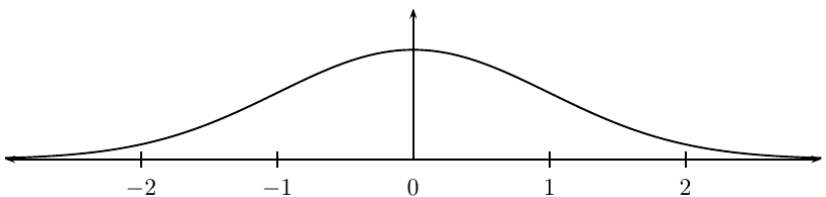
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$.

- Parametr μ je střední hodnota rozdělení a σ je směrodatná odchylka rozdělení.
  - Střední hodnotu a směrodatnou odchylku definujeme později.
- Normální rozdělení hraje důležitou roli v pravděpodobnosti a statistice.
  - Mnoho přírodních fenoménů má přibližně normální rozdělení.
- Později budeme studovat centrální limitní větu, která říká, že rozdělení sumy náhodných veličin lze aproximovat normálním rozdělením.

Standardní normální rozdělení

- NV X má standardní normální rozdělení pokud je $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.
- Tradičně se standardní normální NV značí Z.
- Hustota a distribuční funkce standardní NV se značí $\varphi(z)$ a $\Phi(z)$.[2]



[2] Hodnoty $\Phi(z)$ hledáme v tabulkách.

Vlastnosti standardní NV

1. Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak $Z = \dfrac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.
2. Jestliže $Z \sim N(0,1)$, pak $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.
3. Jestliže $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé, pak

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\Big).$$

Pokud je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

- Platí, že $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Příklad 71.

Nechť $X \sim N(3, 9)$. Určete $\mathbb{P}(2 < X < 5)$, $\mathbb{P}(X > 0)$ a $\mathbb{P}(|X - 3| > 6)$.

Řešení:

$$\mathbb{P}(2 < X < 5) = \mathbb{P}\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) \approx 0,3779$$

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = \mathbb{P}\left(Z > -1\right) = 1 - \Phi\left(-1\right) = \Phi\left(1\right) \approx 0,8413$$

$$\mathbb{P}(|X - 3| > 6) = \mathbb{P}\left(X > 9\right) + \mathbb{P}\left(X < -3\right) = \mathbb{P}\left(Z > 2\right) + \mathbb{P}\left(Z < -2\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(2\right) + \Phi\left(-2\right) = 2(1 - \Phi\left(2\right)) \approx 0,0456.$$

Příklad 72 (Detekce signálu).

Vysílač vysílá bit zakódovaný jako $S \in \{-1, +1\}$ a komunikační kanál přidává šum Y, kde Y je normální NV s parametry 0 a σ. Přijímač dekóduje signál jako $R = \text{sign}(S + Y)$. Jaká je pravděpodobnost, že $R \neq S$?

Řešení: Pravděpodobnost chyby pro $S = 1$ je pravděpodobnost, že $Y \leq -1$:

$$\mathbb{P}(Y \leq -1) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{-1-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right).$$

Pravděpodobnost chyby pro $S = -1$ je pravděpodobnost, že $Y \geq 1$:

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Z $\Phi(-\frac{1}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sigma})$ dostáváme výsledek $2(1 - \Phi(\frac{1}{\sigma}))$. Pomocí tabulky či PC lze zjistit, že pravděpodobnost chyby pro $\sigma \in \{0,5; 1; 2\}$ je, postupně, $0,0456$; $0,3174$ a $0,6170$.

Exponenciální rozdělení

NV X má exponenciální rozdělení s parametrem β, $X \sim Exp(\beta)$, jestliže

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}},$$

kde $x > 0$, $\beta > 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x}{\beta}} & \text{pokud } x > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení se používá na modelování doby čekání mezi vzácnými jevy:

- doba mezi nehodami na jisté křižovatce
- doba životnosti počítače
- doba čekání ve frontě.

Příklad 73.

Předpokládejme, že délka odbavení zákazníka kupujícího nový mobil v minutách je exponenciální NV s parametrem $\beta = 10$. Pokud někdo přijde těsně před vámi, jaká je pravděpodobnost, že budete čekat
(a) více jak 10 minut?
(b) mezi 10 a 20 minutami?

Řešení: Nechť X značí délku odbavení zákazníka před vámi. Pak

$$\text{(a)} \quad \mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \approx 0,368.$$

$$\text{(b)} \quad \mathbb{P}(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-2} + e^{-1} \approx 0,233.$$

Gamma rozdělení

Pro $\alpha > 0$ je Gamma funkce definována jako

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy.$$

NV X má Gamma rozdělení s parametry α a β, $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, jestliže

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}},$$

kde $x, \alpha, \beta > 0$.

Poznámka: Exponenciální rozdělení je $Gamma(1, \beta)$.

Pro $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta)$ nezávislé je $\sum_{i=1}^n X_i \sim Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$.

Gamma rozdělení se často používá pro modelování doby trvání, například při testování životnosti výrobku jde o dobu do „smrti“ výrobku.

Beta rozdělení

NV X má Beta rozdělení s parametry $\alpha > 0$ a $\beta > 0$, $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, jestliže je pro $0 < x < 1$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.$$

Beta rozdělení se používá k modelování chování NV omezených na intervaly konečných délek.

Beta rozdělení slouží jako vhodný model pro náhodné chování procent a podílů.

Studentovo t rozdělení a Cauchyho rozdělení

NV X má *t rozdělení* s ν stupni volnosti, $X \sim t_\nu$, jestliže

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x^2}{\nu})^{\frac{1+\nu}{2}}}.$$

Normální rozdělení odpovídá t rozdělení s $\nu = +\infty$.

Cauchyho rozdělení je speciální případ t rozdělení pro $\nu = 1$. Hustota je

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x)^2}.$$

χ^2 rozdělení

NV X má χ^2 rozdělení s p stupni volnosti, $X \sim \chi^2_p$, jestliže je pro $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) 2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Jsou-li $Z_1, \ldots, Z_p$ nezávislé standardní normální NV, pak $\sum_{i=1}^{p} Z_i^2 \sim \chi^2_p$.

Rozdělení χ^2 se také nazývá Pearsonovo rozdělení. Využívá se ve statistice a má velký význam pro určování, zda množina dat vyhovuje dané distribuční funkci.

Kvantilová funkce

Kvantily

Kvantily se používají k sumarizaci skupiny čísel.
Intuitivně, kvantil znamená, že je vzorek rozdělen na několik stejně velkých částí.

Definice 74 (Kvantil řádu n).

Nechť $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_N$ je uspořádaný statistický soubor. Definujme číslo

$$r = \left\lfloor j\frac{N}{n} + 1 \right\rfloor .$$

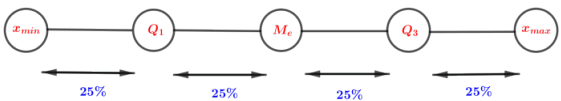
Kvantily řádu n jsou hodnoty $K_1, \ldots, K_n$ počítané následovně:

$$K_j = \begin{cases} y_r & \text{pokud } j\frac{N}{n} \notin \mathbb{N} \\ \frac{y_{r-1}+y_r}{2} & \text{pokud } j\frac{N}{n} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kvantily řádu n definují n intervalů $(y_1, K_1], [K_1, K_2], \ldots, [K_{n-1}, y_N)$, kde v každém intervalu je nejvýše $\frac{100}{n}$ % hodnot souboru.

Speciální typy kvantilů

- Kvantil řádu 2 je medián.
- Kvantily řádu 4 jsou kvartily.
- Kvantily řádu 10 jsou decily.
- Kvantily řádu 100 jsou percentily.



Jinými slovy, kvartily jsou 3 čísla, která dělí soubor na 4 stejně velké částí, decily 9 čísel dělící soubor na 10 stejně velkých částí a percentily 99 čísel dělící soubor na 100 stejně velkých částí.
Q_1 je dolní kvartil a Q_3 je horní kvartil.
Kvartily jsou speciálním případem percentilů: 25-tý percentil je první kvartil, 50-tý percentil je druhý kvartil (a současně medián) a 75-tý percentil je třetí kvartil.
Například 60-tý percentil znamená, že číslo je větší než 60 % ostatních čísel v souboru.

Příklad 75.

Najděte kvartily následujícího souboru čísel: $-1, -3, 0, -1, -1, 5, 0, -3, 1, 2, 3, 3$.

Řešení: Nejprve uspořádáme: $-3, -3, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 5$.
Pak $12/4 = 3$, $2 \cdot 12/4 = 6$ a $3 \cdot 12/4 = 9$, z čehož dostáváme

- $Q_1 = \frac{y_3 + y_4}{2} = -1$
- $Q_2 = \frac{y_6 + y_7}{2} = 0$
- $Q_3 = \frac{y_9 + y_{10}}{2} = 2,5$.

Příklad 76.

Najděte decily D_1, D_3 a D_8 následujícího souboru čísel $22, 20, 24, 30, 32, 28, 35$.

Řešení: Nejprve uspořádáme: $20, 22, 24, 28, 30, 32, 35$.
Pak

- $7/10 = 0,7$, $r = \lfloor 0,7 \rfloor + 1 = 1$ a $D_1 = y_1 = 20$
- $3 \cdot 7/10 = 2,1$, $r = 3$ a $D_3 = y_3 = 24$
- $8 \cdot 7/10 = 5,6$, $r = 6$ a $D_8 = y_6 = 32$.

Inverzní distribuční funkce či kvantilová funkce

Definice 77.

Nechť $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je NV s distribuční funkcí $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$. Inverzní distribuční funkce či kvantilová funkce je definována jako

$$F^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > q\}$$

pro $q \in [0,1]$.

Pokud je F striktně rostoucí a spojitá, pak je $F^{-1}(q)$ jediné reálné číslo x takové, že $F(x) = q$.

Některé speciální hodnoty:

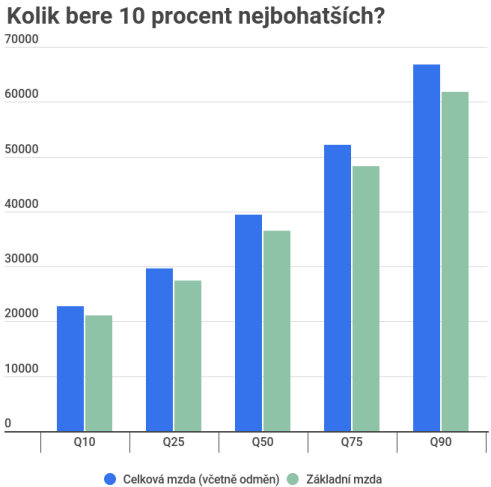
- $Q25 = F^{-1}(1/4)$ se nazývá první kvartil
- $Q50 = F^{-1}(1/2)$ je medián či druhý kvartil
- $Q75 = F^{-1}(3/4)$ je třetí kvartil.

Příklad

Salary (in €)	Percent $p_i 100\%$	Cumulative percentage	Width of the class
499.5 - 700.5	0.1	0.1	200
700.5 - 900.5	0.2	0.3	200
900.5 - 1100.5	2.6	2.9	200
1100.5 - 1300.5	6.5	9.4	200
1300.5 - 1500.5	12.3	21.7	200
1500.5 - 1700.5	16.5	38.2	200
1700.5 - 1900.5	23.8	62.0	200
1900.5 - 2100.5	14.9	76.9	200
2100.5 - 2300.5	11.1	88.0	200
2300.5 - 2500.5	7.0	95.0	200
2500.5 - 3000.5	4.2	99.2	500
3000.5 - 4000.5	0.8	100.00	1000

- $Q25 = F^{-1}(1/4) = 1500,5$
- $Q50 = F^{-1}(1/2) = 1700,5$
- $Q75 = F^{-1}(3/4) = 1900,5$

Příklad (převzato z Aktuálně.cz)



- Decily a kvartily (Q10, Q25, Q50, Q75, Q90)
  - Decil a kvartil dělí statistický soubor na desetiny a čtvrtiny.
  - Q25 znamená, že 75 procent Čechů má vyšší mzdu, než je číslo uvedené v grafu.
  - Například modře označený údaj Q10 uvádí, že 90 procent Čechů má vyšší celkovou hrubou mzdu (včetně odměn) než 22762 Kč.
- Databáze obsahuje údaje od 47000 lidí.

- Dvě náhodné veličiny X a Y jsou si rovné v rozdělení,

$$X \stackrel{d}{=} Y,$$

pokud je pro všechna x

$$F_X(x) = F_Y(x).$$

- To neznamená, že $X = Y$, ale že pravděpodobnosti tvrzení o X a Y jsou stejné!

Příklad 78.

- Nechť $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ a nechť $Y = -X$.
- Pak $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$, a tedy $X \stackrel{d}{=} Y$
- Očividně se X a Y nerovnají, $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Sdružená rozdělení

Sdružená rozdělení

- Pro dvě diskrétní NV X a Y definujeme sdruženou pravděpodobnostní funkci

$$f(x, y) = \mathbb{P}(X = x \text{ a } Y = y).$$

- $\mathbb{P}(X = x \text{ a } Y = y)$ budeme stručně zapisovat $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

- Pokud budeme chtít specifikovat NV, budeme psát $f_{X,Y}$.

Příklad 79.

Mějme sdružené rozdělení NV X a Y, kde každá NV nabývá hodnot 0 nebo 1:

	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	$1/9$	$2/9$
$X=1$	$2/9$	$4/9$

Pak například $f(1,1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{4}{9}$.

Sdružená funkce hustoty

Definice 80.

Ve spojitém případě je $f(x, y)$ hustota sdružené NV (X, Y), jestliže

1. $f(x, y) \geq 0$ pro všechna (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$
3. pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$.

V diskrétním i spojitém případě je sdružená distribuční funkce definována jako

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Příklad 81.

Nechť sdružená NV (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém čtverci. Pak

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2})$.

Řešení: Jev $A = \{X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\}$ odpovídá podmnožině jednotkového čtverce.

Integrace funkce f přes A odpovídá obsahu A, který je $\frac{1}{4}$, tedy

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Příklad 82.

Nechť (X, Y) má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{pro } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy + \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = 1,$$

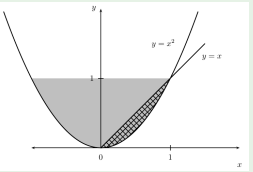
což je v souladu s tím, že f je skutečně hustota.

Pozn.: $\iint_I (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_I f(x,y)\,dx\,dy + \iint_I g(x,y)\,dx\,dy$

Příklad 83.

Nechť (X, Y) má hustotu $f(x,y) = \begin{cases} cx^2y & \text{pro } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, $(-1 \le x \le 1)$. Určete c.

Řešení: Nechme x probíhat přes definiční obor a pro každou hodnotu x nechme y probíhat přes svůj definiční obor, s tím, že $x^2 \le y \le 1$, viz obrázek.



Pak $1 = \iint f(x,y)\,dy\,dx = c\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2y\,dy\,dx = \dfrac{4c}{21}$, a tedy $c = \frac{21}{4}$.

Určeme $\mathbb{P}(X \ge Y)$, tj. $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$. Máme

$$\mathbb{P}(X \ge Y) = \frac{21}{4}\int_0^1\int_{x^2}^{x} x^2y\,dy\,dx = \frac{3}{20}.$$

Marginální rozdělení

Marginální rozdělení

Definice 84.

Jestliže sdružená NV (X, Y) má sdružené rozdělení s pravděpodobnostní funkcí $f_{X,Y}$, pak marginální pravděpodobnost X je

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_y f(x, y)$$

a podobně marginální pravděpodobnost Y je

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_x f(x, y).$$

Příklad 85.

Nechť $f_{X,Y}$ je dána tabulkou

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	$1/10$	$2/10$	$3/10$
$X=1$	$3/10$	$4/10$	$7/10$
	$4/10$	$6/10$	1

Pak

- marginální rozdělení X odpovídá sumě řádků a
- marginální rozdělení Y sumě sloupců.

Například $f_X(0) = \frac{3}{10}$ a $f_X(1) = \frac{7}{10}$.

Definice 86.

Pro spojité NV je marginální hustota

$$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy \qquad \text{a} \qquad f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx.$$

Marginální distribuční funkce se značí F_X a F_Y.

Příklad 87.

Nechť je pro $x, y \geq 0$

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}.$$

Pak

$$f_X(x) = e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x}.$$

Příklad 88.

Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{pro } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y.$$

Příklad 89.

Nechť (X, Y) má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2 y & \text{pro } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$f_X(x) = \begin{cases} \int f(x,y)\,dy = \frac{21}{4}x^2 \int_{x^2}^{1} y\,dy = \frac{21}{8}x^2(1-x^4) & \text{pro } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nezávislé náhodné veličiny

Nezávislé náhodné veličiny

Definice 90.

Dvě náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, jestliže pro každé A a B platí

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B).$$

Ověřit, zda X a Y jsou nezávislé, znamená ověřit podmínku pro všechny podmnožiny A a B. Následující trzení dává zjednodušení.

Věta 91.

Nechť X a Y mají sdruženou pravděpodobnost (hustotu) $f_{X,Y}$. Pak X a Y jsou nezávislé, jestliže

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

pro všechny hodnoty x a y.[3]

[3] Tvrzení není úplně přesné, hustota je definována pouze pro množiny nenulové míry.

Příklad 92.

Nechť X a Y mají následující rozdělení

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$X=1$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
	$1/2$	$1/2$	1

Pak $f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{2}$ a $f_Y(0) = f_Y(1) = \frac{1}{2}$.

X a Y jsou nezávislé, protože

- $f_X(0)f_Y(0) = f(0,0)$
- $f_X(0)f_Y(1) = f(0,1)$
- $f_X(1)f_Y(0) = f(1,0)$
- $f_X(1)f_Y(1) = f(1,1)$.

Příklad 93.

Pokud by X a Y měly následující rozdělení

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	$1/2$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/2$	$1/2$
	$1/2$	$1/2$	1

tak by nebyly nezávislé, protože

$$f_X(0)f_Y(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

přičemž

$$f(0,1) = 0.$$

Příklad 94.

Nechť X a Y jsou nezávislé a mají stejnou hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.

Řešení: Z nezávislosti máme, že sdružená hustota je

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 4xy & \text{pro } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 1) = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y)\, dy\, dx = 4 \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} y\, dy \right) dx = \frac{1}{6}.$$

Věta 95.

Nechť obor hodnot NV X a Y je (nekonečný) obdélník. Pokud $f(x,y) = g(x)h(y)$ pro nějaké funkce g a h (ne nutně hustoty), pak X a Y jsou nezávislé.

Příklad 96.

Nechť (X, Y) má sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & \text{pro } 0 < x, y \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Obor hodnot X a Y je obdélník $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ a $f(x,y) = g(x)h(y)$ pro $g(x) = 2e^{-x}$ a $h(y) = e^{-2y}$. Proto jsou X a Y nezávislé.

Podmíněná rozdělení

Podmíněná rozdělení

Jestliže X a Y jsou diskrétní NV, pak můžeme spočítat podmíněné rozdělení X za předpokladu $Y = y$. Platí

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

Definice 97.

Podmíněná pravděpodobnostní funkce je funkce

$$f_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

pro $f_Y(y) > 0$.

Poznámka: Definice platí i pro spojitá rozdělení, interpretace se však liší.
V diskrétním případě je $f_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y)$.
Ve spojitém musíme integrovat, abychom dostali pravděpodobnost.[4]

Definice 98.

Pro spojitou NV je podmíněná hustota definována jako

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

pro $f_Y(y) > 0$, tedy

$$\mathbb{P}(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\, dx.$$

[4] Ve spojitém případě podmiňujeme $\mathbb{P}(X \in A|Y = y)$ jevem $\{Y = y\}$, který má nulovou pravděpodobnost. Tomu se vyhneme pomocí hustoty. To, že jde o dobře definovanou teorii viz R.B. Ash, Basic Probability Theory.

Příklad 99.

Nechť X a Y mají sdružené rovnoměrné rozdělení na jednotkovém čtverci. Pak

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $Y = y$ tak má X rovnoměrné rozdělení na $(0, 1)$.

To lze zapsat jako $(X|Y = y) \sim \mathit{Uniform}(0, 1)$.

Příklad 100.

Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{pro } 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určeme $\mathbb{P}(X < 1/4 | Y = 1/3)$.

Řešení: Již jsme si ukázali, že $f_Y(y) = y + 1/2$, a proto

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}.$$

Tedy

$$\mathbb{P}(x < 1/4 | Y = 1/3) = \int_0^{1/4} f_{X|Y}(x|1/3)\,dx = \int_0^{1/4} \frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\,dx = \frac{11}{80}.$$

Příklad 101.

Nechť $X \sim \mathit{Uniform}(0,1)$ a nechť po obdržení hodnoty X dostaneme $(Y|X=x) \sim \mathit{Uniform}(x,1)$. Jaké je marginální rozdělení Y?

Řešení: Předně $f_X(x) = 1$ pro $0 \leq x \leq 1$, 0 jinak, a

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{pro } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a tedy $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$.

Marginální rozdělení Y je

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-y)$$

pro $0 < y < 1$.

Příklad 102.

Nechť (X, Y) má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2 y & \text{pro } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $f_{Y|X}(y|x)$ a $\mathbb{P}(Y \ge 3/4 | X = 1/2)$.

Řešení: Pro $X = x$ musí y splňovat $x^2 \le y \le 1$. Víme, že $f_X(x) = (21/8)x^2(1-x^4)$, a tedy pro $x^2 \le y \le 1$ platí

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2 y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}.$$

Pak

$$\mathbb{P}(Y \ge 3/4 | X = 1/2) = \int_{3/4}^{1} f_{Y|X}(y|1/2)\, dy = \int_{3/4}^{1} \frac{32y}{15}\, dy = \frac{7}{15}.$$

Náhodné vektory

Náhodné vektory

Nechť $X = (X_1, \ldots, X_n)$, kde $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny. Pak X je náhodný vektor.

Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je hustota náhodného vektoru X. Pak je možné definovat marginální a podmíněné pravděpodobnosti podobně jako ve sdruženém případě.

Řekneme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $A_1, \ldots, A_n$ je

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Opět stačí ověřit, že $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$.

Definice 103.

Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé NV a každá má stejné marginální rozdělení s distribuční funkcí F, pak říkáme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID (independent and identically distributed) a píšeme

$$X_1, \ldots, X_n \sim F.$$

Jestliže F má hustotu f, píšeme také $X_1, \ldots, X_n \sim f$.

$X_1, \ldots, X_n$ nazýváme také náhodný výběr velikosti n z F.

Více o IID později.

Dvě důležitá rozdělení náhodných vektorů

Multinomiální rozdělení

Uvažme losování míčků z urny, která obsahuje míčky k různých barev $(c_1, \ldots, c_k)$. Nechť $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $p_j \geq 0$ a $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, kde p_j je pravděpodobnost vytažení míčku s barvou c_j. Opakujme losování n krát (nezávislé tahy s opakováním) a označme $X = (X_1, \ldots, X_k)$, kde X_j je počet výskytu barvy c_j, tj. $n = \sum_{j=1}^{k} X_j$. Pak X má multinomiální rozdělení s parametry (n, p), psáno $X \sim \mathit{Multinomial}(n, p)$.

Pravděpodobnostní funkce je

$$f(x) = \binom{n}{x_1, \ldots, x_k} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \qquad \text{kde } \binom{n}{x_1, \ldots, x_k} = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!}.$$

Lemma 104.

Nechť $X \sim \mathit{Multinomial}(n, p)$, kde $X = (X_1, \ldots, X_k)$ a $p = (p_1, \ldots, p_k)$.
Pak marginální rozdělení X_j je $\mathit{Binomial}(n, p_j)$.

Vícerozměrné normální rozdělení

Normální rozdělení má dva parametry, μ a σ. Ve vícerozměrné verzi je μ vektor a σ matice Σ. Nechť

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix},$$

kde $Z_1, \ldots, Z_k \sim N(0,1)$ jsou nezávislé. Hustota Z pak je

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} f(z_i) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} z_j^2} = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2} z^T z}$$

a Z má standardní vícerozměrné normální rozdělení, $Z \sim N(0, I)$, kde 0 reprezentuje nulový vektor a I jednotkovou matici.

Obecně, vektor X má vícerozměrné normální rozdělení, $X \sim N(\mu, \Sigma)$, pokud má hustotu

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} |\Sigma|^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)},$$

kde

- $|\Sigma|$ značí determinant Σ
- μ je vektor délky k
- Σ je symetrická pozitivně definitní matice typu $k \times k$.[5]

Pro $\mu = 0$ a $\Sigma = I$ dostáváme standarní normální rozdělení.

[5] Σ je pozitivně definitní, pokud pro všechny nenulové vektory x je $x^T \Sigma x > 0$.

Protože je Σ symetrická a pozitivně definitní, existuje matice $\Sigma^{1/2}$ tzv. odmocnina Σ, že:

1. $\Sigma^{1/2}$ je symetrická
2. $\Sigma = \Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}$
3. $\Sigma^{1/2}\Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1/2}\Sigma^{1/2} = I$.

Věta 105.

Jestliže $Z \sim N(0, I)$ *a* $X = \mu + \Sigma^{1/2}Z$, *pak* $X \sim N(\mu, \Sigma)$.
Naopak, jestliže $X \sim N(\mu, \Sigma)$, *pak* $\Sigma^{-1/2}(X - \mu) \sim N(0, I)$.

Nechť náhodný normální vektor X lze rozdělit jako $X = (X_a, X_b)$ a podobně $\mu = (\mu_a, \mu_b)$ a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}.$$

Věta 106.

Nechť $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Pak

1. *marginální rozdělení X_a je $N(\mu_a, \Sigma_{aa})$.*
2. *podmíněné rozdělení X_b za předpokladu $X_a = x_a$ je*

$$X_b | X_a = x_a \sim N(\mu_b + \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}(x_a - \mu_a), \Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab})$$

3. *jestliže a je vektor, pak $a^T X \sim N(a^T \mu, a^T \Sigma a)$*
4. $V = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi^2_k$.

Transformace náhodných veličin

Transformace náhodných veličin

- Nechť X je náhodná veličina s hustotou f_X a distribuční funkcí F_X.
- Nechť $Y = r(X)$ je funkce X, pak $Y = r(X)$ se nazývá transformace X.
  - Například $Y = X^2$ nebo $Y = e^X$.
- Jak určit hustotu a distribuční funkci Y?
- V diskrétním případě je pravděpodobnost Y dána jako

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(r(X) = y) = \mathbb{P}(\{x \mid r(x) = y\}) = \mathbb{P}(X \in r^{-1}(y)).$$

Příklad 107.

Nechť $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/4$ a $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$. Nechť $Y = X^2$. Pak $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$ a $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. Dohromady

x	$f_X(x)$
-1	$1/4$
0	$1/2$
1	$1/4$

$\rightsquigarrow$

$y = x^2$	$f_X(x)$
1	$1/4$
0	$1/2$
1	$1/4$

$\rightsquigarrow$

y	$f_Y(y)$
0	$1/2$
1	$1/2$

Transformace náhodných veličin

Příklad 108.

Nechť X je diskrétní NV zadaná tabulkou

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f_X(x)$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

.

Určete rozdělení NV $Y = \sin(X)$. Máme

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$sin(x)$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
$f_X(x)$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

,

odkud

$y = sin(x)$	0	$\sqrt{2}/2$	1
$f_X(x)$	0,4	0,4	0,2

.

Kroky transformace pro spojitý případ:

1. Pro každé y určíme množinu $A_y = \{x \mid r(x) \leq y\}$.
2. Určíme distribuční funkci

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(r(X) \leq y) = \mathbb{P}(\{x \mid r(x) \leq y\}) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx.$$

3. Hustota pak je $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

Pozn. Po transformaci se může rozdělení změnit (i ze spojitého na diskrétní, ne naopak).

Příklad 109.

Nechť $f_X(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$. Pak $F_X(x) = \int_0^x f_X(s)\,ds = 1 - e^{-x}$.

Nechť $Y = r(X) = \ln(X)$. Pak $A_y = \{x \mid x \leq e^y\}$ a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\ln(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq e^y) = F_X(e^y) = 1 - e^{-e^y}$$

a tedy $f_Y(y) = e^y e^{-e^y}$ pro $y \in \mathbb{R}$.

Příklad 110.

Nechť $X \sim \mathit{Uniform}(-1, 3)$, tj. $f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{pro } -1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Určeme hustotu NV $Y = X^2$; Y nabývá hodnot $(0, 9)$.

- Pro $0 < y < 1$, $A_y = [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]$ a $F_Y(y) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx = (1/2)\sqrt{y}$.
- $1 \le y < 9$, $A_y = [-1, \sqrt{y}]$ a $F_Y(y) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx = (1/4)(\sqrt{y} + 1)$.

Derivováním F dostaneme

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{pro } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & \text{pro } 1 < y < 9 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 111.

Nechť X je spojitá NV, $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze monotónní na $X(\Omega)$ a r^{-1} je diferencovatelná (pokud je r striktně rostoucí nebo striktně klesající, tak má inverzi), pak $Y = r(X)$ má hustotu

$$f_Y(y) = f_X(r^{-1}(y)) \left| \frac{dr^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Příklad 112.

Nechť X má hustotu $f_X(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$. Určeme hustotu NV $Y = a \cdot \ln(X)$, $a \neq 0$.

$$\text{Máme } r(x) = a\ln(x) \rightsquigarrow r^{-1}(y) = e^{\frac{y}{a}} \rightsquigarrow f_Y(y) = f_X(e^{\frac{y}{a}}) e^{\frac{y}{a}} \frac{1}{|a|}.$$

Pak pro $c > 0$ a $f_X(x) = 1/c$, $0 < x < c$, má NV $Y = -\ln(X)$ hustotu

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{c} e^{-y} & \text{pro } y > -\ln(c) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Transformace více náhodných veličin

Pokud jsou X a Y NV, jaké je rozdělení X/Y, $X+Y$, $\max\{X,Y\}$ či $\min\{X,Y\}$?

Nechť $Z = r(X,Y)$.

1. Pro každé z určíme $A_z = \{(x,y) \mid r(x,y) \leq z\}$.
2. Určíme distribuční funkci

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(r(X,Y) \leq z) = \mathbb{P}(A_z) = \iint_{A_z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Položíme $f_Z(z) = F_Z'(z)$.

Příklad I

Nechť $X_1, X_2 \sim \mathit{Uniform}(0,1)$ jsou nezávislé. Určeme hustotu $Y = X_1 + X_2$.

Řešení: Sdružená hustotu (X_1, X_2) je

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 < x_1, x_2 < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme $r(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, pak

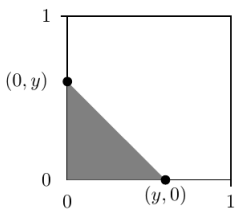
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(r(X_1, X_2) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\{(x_1, x_2) \mid r(x_1, x_2) \leq y\}) = \iint_{A_y} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2. \end{aligned}$$

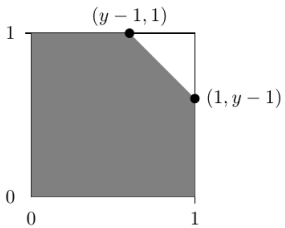
Jak najít A_y?

Příklad II

Pro $0 \leq y < 1$ je A_y množina na prvním obrázku o ploše $y^2/2$.

Pro $1 \leq y \leq 2$ je A_y množina na druhém obrázku o ploše $1 - (2-y)^2/2$.





Příklad III

Tedy

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ \frac{y^2}{2} & \text{pro } 0 \leq y < 1 \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{2} & \text{pro } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{pro } y \geq 2 \end{cases}$$

a hustota je

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & \text{pro } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & \text{pro } 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota

Definice 113.

Očekávaná či střední hodnota (či první moment) NV X je definována jako

$$\mathbb{E}[X] = \int x \, dF(x) = \begin{cases} \sum\limits_{x} x f(x) & X \text{ je diskrétní} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx & X \text{ je spojitá} \end{cases}$$

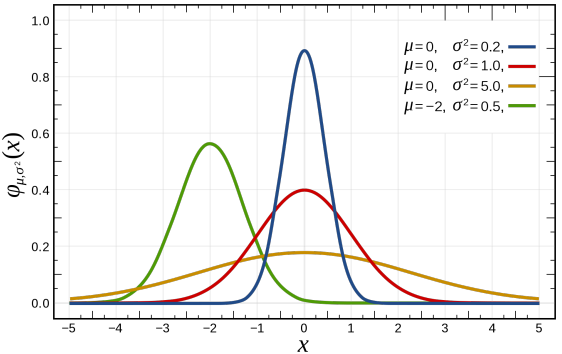
za předpokladu, že daná suma/integrál existuje (je absolutně konvergentní).

Notace:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}X = \int x \, dF(x) = \mu = \mu_X$$

Poznámka: Zápis $\int x \, dF(x)$ zde slouží pouze jako notace pro zjednodušení, abychom nemuseli rozlišovat diskrétní a spojitý případ. (V analýze má svůj vlastní význam!)

- Střední hodnota je jednočíselný souhrn rozdělení.
  - Udává hodnotu, kolem které náhodná veličina kolísá.
- Uvažujme o $\mathbb{E}(X)$ jako o průměru $\sum_{i=1}^{n} X_i / n$ velkého počtu IID[6] výběrů $X_1, \ldots, X_n$.
  - Fakt, že $\mathbb{E}(X) \approx \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ je ve skutečnosti věta nazývaná zákon velkých čísel (později).
- $\mathbb{E}(X)$ existuje, jestliže $\int |x| dF_X(x) < +\infty$; jinak neexistuje.



[6] Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé NV a každá má stejné marginální rozdělení s distribuční funkcí F, pak říkáme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID (independent and identically distributed).

Příklad 114.

Nechť $X \sim Bernoulli(p)$, pak

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{1} xf(x) = 0(1-p) + 1p = p.$$

Příklad 115.

Hodíme dvakrát férovou mincí. Nechť X je počet orlů. Pak

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x} xf(x) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) \\ &= 0(1/4) + 1(1/2) + 2(1/4) = 1.\end{aligned}$$

Příklad 116.

Nechť $X \sim Uniform(-1, 3)$, pak

$$\mathbb{E}(X) = \int x f(x)\, dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} x\, dx = 1.$$

Příklad 117.

Náhodná veličina má Cauchyho rozdělení, jestliže má hustotu $f_X(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$. Integrací dostaneme, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1 + x^2} = +\infty,$$

tedy střední hodnota neexistuje.

Kdykoliv dále mluvíme o střední hodnotě, tak předpokládáme, že existuje (je abs. konv.).

Nechť $Y = r(X)$. Jak určit $\mathbb{E}(Y)$? Lze najít $f_Y(y)$ a spočítat $\mathbb{E}(Y) = \int y f_Y(y)\,dy$. Existuje však jednodušší způsob.

Věta 118 (Pravidlo líného statistika).

Nechť X je NV, $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení a $Y = r(X)$ je NV. Pak

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(r(X)) = \int r(x)\,dF_X(x).$$

Intuice: Uvažme hru, kde vybíráme X náhodně a dostanete $Y = r(X)$. Průměrná výhra je $r(x)$ krát pravděpodobnost, že $X = x$, sečteno či zintegrováno přes všechny hodnoty x.

Speciální případ:
Nechť A je jev a $r(x) = I_A(x)$, kde $I_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a $I_A(x) = 0$ pro $x \notin A$. Pak

$$\mathbb{E}(I_A(X)) = \int I_A(x) f_X(x)\,dx = \int_A f_X(x)\,dx = \mathbb{P}(X \in A).$$

Pravděpodobnost je tedy speciálním případem střední hodnoty.

Věta 119 (Pravidlo líného statistika pro diskrétní NV).

Nechť X je diskrétní NV, $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení a $Y = r(X)$ je NV. Pak

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x_i} r(x_i) f_X(x_i).$$

Důkaz.

Pro diskrétní rozdělení je důkaz triviální. Pro hodnoty x_i, kterých může nabývat náhodná veličina X, platí $r(x_i) = y_i$ a pro získání pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny Y stačí sečíst hodnoty $f_X(x_i), f_X(x_j)$ pro taková i, j, kde $r(x_i) = r(x_j)$. □

Věta 120 (Pravidlo líného statistika pro spojitou NV).

Nechť X je spojitá NV, $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení a $Y = r(X)$ je NV. Pak

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x) f_X(x)\, dx.$$

Důkaz.

Dokažme tvrzení pro (ostře) rostoucí funkci r na $\mathbb{R}$. S využitím věty o transformaci a faktu, že mimo interval $(r(-\infty), r(+\infty))$ je hustota f_Y nulová, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) f_X(x)\, dx = \left| \begin{matrix} y = r(x) & x = r^{-1}(y) \\ dx = \frac{dr^{-1}(y)}{dy} dy \end{matrix} \right| = \int_{r(-\infty)}^{r(+\infty)} y f_X(r^{-1}(y)) \frac{dr^{-1}(y)}{dy} dy$$

$$= \int_{r(-\infty)}^{r(+\infty)} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \mathbb{E}(Y).$$

□

Příklad 121.

Nechť $X \sim \mathit{Uniform}(0,1)$. Nechť $Y = r(X) = e^X$. Pak

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 e^x f(x)\, dx = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1.$$

Příklad 122.

Mějme jehlu jednotkové délky a zlomme ji v náhodném místě. Nechť Y je délka delší části. Jaká je střední hodnota Y?

Řešení: Pokud X značí bod zlomu, pak $X \sim \mathit{Uniform}(0,1)$ a

$$Y = r(X) = \max\{X, 1-X\},$$

tedy $r(x) = 1-x$ pro $0 < x < 1/2$ a $r(x) = x$ pro $1/2 \leq x < 1$. Pak

$$\mathbb{E}(Y) = \int r(x)\, dF(x) = \int_0^{1/2} (1-x)\, dx + \int_{1/2}^1 x\, dx = \frac{3}{4}.$$

Poznámka. Pro funkce více proměnných to funguje podobně. Pokud $Z = r(X, Y)$, pak

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(r(X, Y)) = \iint r(x, y)\, dF(x, y).$$

Příklad 123.

Nechť náhodný vektor (X, Y) má sdružené rovnoměrné rozdělení na jednotkovém čtverci a nechť $Z = r(X, Y) = X^2 + Y^2$. Pak

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \iint f(x, y)\, dF(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 y^2\, dy = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Definice 124.

Pro NV X je *k-tý moment* X definován jako $\mathbb{E}(X^k)$, pokud $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$.

Věta 125.

Jestliže k-tý moment existuje a $j < k$, pak existuje i j-tý moment.

Důkaz.

Platí, že

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|^j) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j f_X(x)\,dx = \int_{|x|\le 1} |x|^j f_X(x)\,dx + \int_{|x|>1} |x|^j f_X(x)\,dx \\ &\le \int_{|x|\le 1} f_X(x)\,dx + \int_{|x|>1} |x|^k f_X(x)\,dx \le 1 + \mathbb{E}(|X|^k) < +\infty.\end{aligned}$$

□

Definice 126.

Pro NV X je *k-tý centrální moment* definován jako $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.

Speciálně máme: $\mathbb{E}(X^0) = 1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^0$ a $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$.

Vlastnosti střední hodnoty

Věta 127.

Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \ldots, a_n$ jsou konstanty, pak

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i).$$

Příklad 128.

Nechť $X \sim Binomial(n, p)$. Jaká je střední hodnota X?

Řešení: Z definice je $\mathbb{E}(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, což není snadné určit.

Místo toho si všimněme, že $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pro $X_i = 1$ když na i-tý hod padl orel a $X_i = 0$ jinak. Pak

$$\mathbb{E}(X_i) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p,$$

a proto je $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sum_i X_i) = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = np$.

Důsledek 129.

Nechť X je NV a c konstanta. Pak $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$.

Důkaz.

Například pro diskrétní NV: $\mathbb{E}(cX) = \sum_x cxf_X(x) = c\sum_x xf_X(x) = c\mathbb{E}(X)$. □

Důsledek 130.

Nechť X a Y jsou NV. Pak $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Důsledek 131.

Nechť X je NV, a, b jsou konstanty. Pak $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Věta 132.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Důsledek 133.

Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2).$$

Poznámka. Pravidlo součtu nevyžaduje nezávislost, pravidlo součinu ano!

Aplikace: průměrná časová složitost Quicksortu

Algoritmus 1: Quicksort

Input: Seznam n různých čísel $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Output: Seřazený seznam S

1 **if** $|S| \leq 1$ **then return** S
2 $p \leftarrow$ náhodně (uniformě, rovnoměrně) zvolený prvek S
3 $S_1 = \{x \in S \mid x < p\}$
4 $S_2 = \{x \in S \mid x > p\}$
5 Zavolej Quicksort na S_1 a S_2
6 **return** S_1, p, S_2

Poznámka. Toto je tzv. Randomized Quicksort. Při jiné volbě pivota (například prvního prvku seznamu) je analýza průměrné časové složitosti analogická.

Věta 134.

Nechť je pivot p vybírán nezávisle a rovnoměrně ze všech možností. Pak očekávaný počet porovnání dvou čísel pro libovolný vstup je $2n \ln n + \Theta(n)$.

Důkaz

- Nechť $y_1, \ldots, y_n$ jsou hodnoty vstupů $x_1, \ldots, x_n$ seřazené vzestupně.
- Pro $i < j$ je NV X_{ij} rovna 1 pokud jsou y_i a y_j porovnány algoritmem; 0 jinak.
- Celkový počet X porovnání dvou čísel splňuje

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$

a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}(X_{ij}).$$

Důkaz pokračování

- Jelikož je X_{ij} indikátor (charakteristická funkce), je $\mathbb{E}(X_{ij}) = \mathbb{P}(X_{ij} = 1)$.
- Potřebujeme tedy určit pravděpodobnost, že prvky y_i a y_j budou porovnány.
- Prvky y_i a y_j budou porovnány právě tehdy, když y_i či y_j je pivot vybraný z množiny $Y^{ij} = \{y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}, y_j\}$:
  - Pokud je y_i (či y_j) pivot z Y^{ij}, pak y_i a y_j musí být ve stejném podseznamu, a tedy budou porovnány.
  - Pokud ani jedno není vybráno jako pivot, pak y_i a y_j budou rozděleny do dvou různých podseznamů, a tedy nebudou nikdy porovnány.
- Jelikož vybíráme pivoty nezávisle a rovnoměrně z každého podseznamu, má každý prvek Y^{ij} stejnou pravděpodobnost, že bude vybrán jako pivot.
- Tedy pravděpodobnost, že y_i či y_j je vybráno jako pivot z Y^{ij}, tedy pravděpodobnost, že $X_{ij} = 1$, je $2/(j - i + 1)$.

Důkaz pokračování.

- Za použití substituce $k = j - i + 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} = \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{2}{k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} (n+1-k)\frac{2}{k} = \sum_{k=2}^{n} (n+1)\frac{2}{k} - \sum_{k=2}^{n} k\frac{2}{k} \\
&= \left((n+1) \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} \right) - 2(n-1) \\
&= \left(2(n+1) \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) - 2n + 2 + 2(n+1) - 2(n+1) = 2(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 4n.
\end{aligned}$$

- Jelikož platí, že $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \Theta(1)$, dostáváme $\mathbb{E}(X) = 2n \ln n + \Theta(n)$.

Variance a kovariance

Variance

Variance (též rozptyl) je charakteristika variability rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny. Vyjadřuje variabilitu rozdělení souboru náhodných hodnot kolem své střední hodnoty.

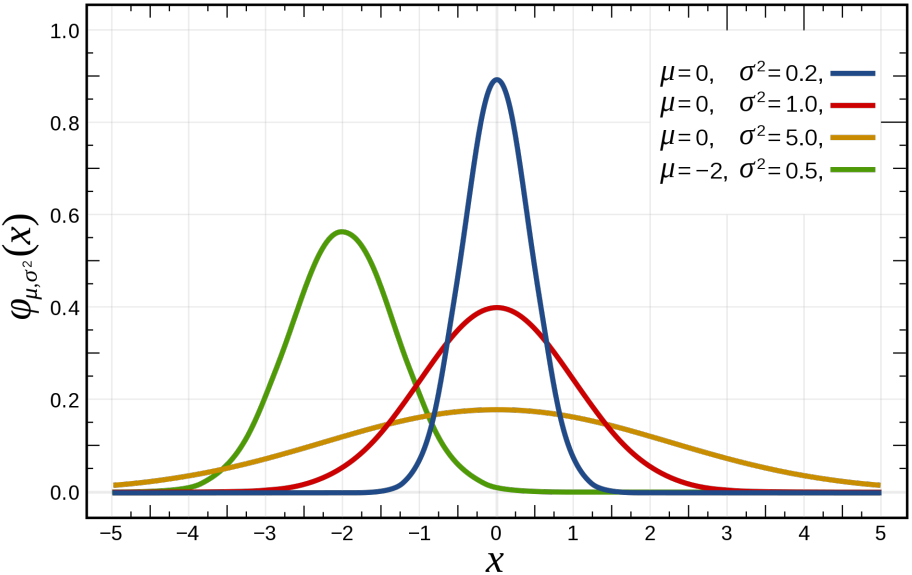
Definice 135.

Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou $\mu = \mathbb{E}[X]$.
Variance X (značeno σ^2, σ_X^2 či $Var(X)$) je definována jako

$$Var(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \int (x-\mu)^2 dF(x),$$

pokud střední hodnota existuje.

Poznámka. Všimněme si, že nelze použít $\mathbb{E}(X-\mu)$ jako míru rozptylu, neboť $\mathbb{E}(X-\mu) = \mathbb{E}(X) - \mu = \mu - \mu = 0$. Občas se používá $\mathbb{E}|X-\mu|$, častěji však variance.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x
$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 0.2,$
$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1.0,$
$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 5.0,$
$\mu = -2, \quad \sigma^2 = 0.5,$

Směrodatná odchylka

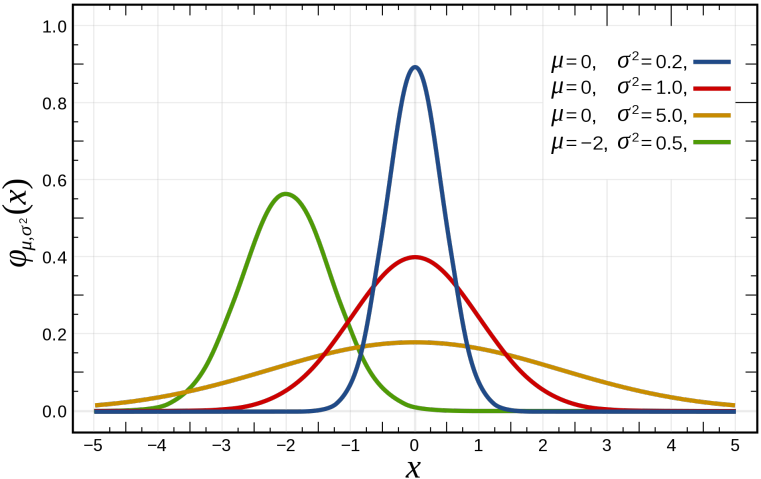
Definice 136.

Směrodatná odchylka náhodné veličiny X se značí jako σ, σ_X či $sd(X)$ a je definovaná jako

$$\sqrt{Var(X)}\,.$$

Poznámka. Směrodatná odchylka vypovídá o tom, nakolik se od sebe navzájem typicky liší jednotlivé případy v souboru zkoumaných hodnot.

- Je-li malá, jsou si prvky souboru většinou navzájem podobné.
- Je-li velká, signalizuje to velké vzájemné odlišnosti.



Směrodatná odchylka σ je postupně $0,447$; 1; $2,236$ a $0,707$.

Věta 137.

Variance má následující vlastnosti:

1. $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$
2. *Pokud jsou* a, b *konstanty, pak* $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
3. *Pokud jsou* $X_1, \ldots, X_n$ *nezávislé a* $a_1, \ldots, a_n$ *jsou konstanty, pak*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i).$$

Důkaz.

1. $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) = \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2$.

2. $Var(aX + b) = \mathbb{E}[(aX + b - a\mu - b)^2] = \mathbb{E}[a^2(X-\mu)^2] = a^2 Var(X)$.

3. Později. □

Příklad 138.

Nechť $X \sim Binomial(n, p)$ a nechť $X = \sum_i X_i$, kde $X_i = 1$ pokud na i-tý hod padne orel, jinak $X_i = 0$. NV X_i jsou nezávislé a $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ a $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$. Již jsme ukázali, že $\mathbb{E}(X_i) = p$. Proto

$$\mathbb{E}(X_i^2) = p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 = p,$$

$$Var(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p),$$

a tedy

$$Var(X) = Var\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i Var(X_i) = np(1 - p).$$

Poznámka: Všimněme si, že $Var(X) = 0$, pokud $p = 1$ nebo $p = 0$.

Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou NV, definujeme výběrovou střední hodnotu jako

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a výběrovou varianci jako

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$$

Věta 139.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID[7] *a nechť $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ a $\sigma^2 = Var(X_i)$. Pak*

$$\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \mu, \qquad Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad a \qquad \mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2.$$

[7] Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé NV a každá má stejné marginální rozdělení s distribuční funkcí F, pak říkáme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID (independent and identically distributed).

Kovariance a korelace

Pokud jsou X a Y náhodné veličiny, pak kovariance a korelace mezi X a Y určuje, jak silná je lineární závislost mezi X a Y.

Definice 140.

Nechť X a Y jsou náhodné veličiny se střední hodnotou μ_X a μ_Y a směrodatnými odchylkami σ_X a σ_Y. Definujme kovarianci mezi X a Y jako

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$$

a korelaci jako

$$\rho = \rho_{X,Y} = \rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Věta 141.

Kovariance splňuje

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

a korelace splňuje

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Pro $Y = aX + b$, kde a, b jsou konstanty, je

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a > 0 \\ -1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Pro X a Y nezávislé je $Cov(X, Y) = \rho = 0$; NV X a Y s $\rho(X, Y) = 0$ nazýváme nekorelované (srovnejte následující větu s bodem 3 Věty 137). Opak obecně neplatí.

Věta 142.

Nechť X a Y jsou náhodné veličiny, pak

1. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$.
2. $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$.
3. *Obecně, pro náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$,*

$$Var\left(\sum_i a_i X_i\right) = \sum_i a_i^2 Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j).$$

- $Cov(X, Y) > 0$: NV X a Y jsou závislé v pozitivním smyslu
  - vyšší hodnoty X jsou svázány s vyššími hodnotamy Y (a nižší s nižšími)
    - např. výška a váha člověka
- $Cov(X, Y) < 0$: NV X a Y jsou závislé v negativním smyslu
  - vyšší hodnoty X jsou svázány s nižšími hodnotamy Y (a nižší s vyššími)
    - např. hloubka dezénu pneu a brzdná dráha
- Korelace je kovariance normovaná na interval $[-1, 1]$
  - umožňuje lepší srovnání a vyjadřuje lineární závislost
- Velká absolutní hodnota $\rho(X, Y)$ vyjadřuje velkou míru lineární závislosti NV X a Y
  - Vysoká hodnota $\rho(X, Y)$: hodnoty obou veličin se vyvíjejí podobně, nemusí ale mezi nimi existovat příčinný vztah!
- Nízká absolutní hodnota $\rho(X, Y)$ vyjadřuje, že X a Y jsou téměř nekorelované, tj. jsou nezávislé, nebo jejich závislost není lineární.

Příklad 143.

Uvažme rodinu se třemi dětmi. Nechť X značí počet dcer a Y značí počet starších bratrů nejmladšího dítěte se sdruženou pravděpodobností

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	
$X=0$	0	0	1/8	1/8
$X=1$	0	1/4	1/8	3/8
$X=2$	1/8	1/4	0	3/8
$X=3$	1/8	0	0	1/8
	1/4	1/2	1/4	1

Pak

- $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$ a $\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$.
- $\mathbb{E}[XY] = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0 \vee Y = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + 2 \cdot (\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1)) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} = 1$
- $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1 - 1,5 = -0,5$,

odkud X a Y nejsou nezávislé. Platí tak, že čím více je dcer, tím méně je starších bratrů.

Střední hodnota a variance důležitých NV

rozdělení	střední hodnota	variance (rozptyl)
Bodové v a	a	0
Bernoulli(p)	p	$p(1-p)$
Binomial(n, p)	np	$np(1-p)$
Geometric(p)	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	λ	λ
Uniform(a, b)	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Normal(μ, σ^2)	μ	σ^2
Exponencial(β)	β	β^2
Gamma(α, β)	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Beta(α, β)	$\alpha/(\alpha+\beta)$	$\alpha\beta/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$
t_ν	0 pro $\nu > 1$	$\nu/(\nu-2)$ pro $\nu > 2$
χ^2_p	p	$2p$
Multinomial(n, p)	np	viz dále
Multivariate Normal(μ, Σ)	μ	Σ

Nechť $X = (X_1, \ldots, X_k)^T$ je náhodný vektor.

Střední hodnota náhodného vektoru X je definována jako

$$\mu = (\mu_1 \ \ldots, \mu_k)^T = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_k) \end{pmatrix}.$$

Kovarianční matice (též variančně-kovarianční matice) Σ je definována jako

$$\Sigma(X) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_k) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_k, X_1) & Cov(X_k, X_2) & \cdots & Var(X_k) \end{pmatrix},$$

přičemž je tato matice symetrická.

Příklad 144.

Pro $X \sim Multinomial(n, p)$ je

$$\Sigma(X) = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \cdots & -np_1p_k \\ -np_2p_1 & np_2(1-p_2) & \cdots & -np_2p_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -np_kp_1 & -np_kp_2 & \cdots & np_k(1-p_k) \end{pmatrix}.$$

- Máme $X_i \sim Binomial(n, p_i)$, tedy $\mathbb{E}(X_i) = np_i$ a $Var(X_i) = np_i(1-p_i)$.
- Z $X_i + X_j \sim Binomial(n, p_i + p_j)$ máme $Var(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - [p_i + p_j])$.
- Z $Var(X_i + X_j) = Var(X_i) + Var(X_j) + 2Cov(X_i, X_j)$ máme $Var(X_i + X_j) = np_i(1-p_i) + np_j(1-p_j) + 2Cov(X_i, X_j)$.
- Z výše uvedeného dostáváme $Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$.

Lemma 145.

Jestliže a je vektor a X je náhodný vektor se střední hodnotou μ a variančně-kovarianční maticí Σ, tak

$$\mathbb{E}(a^T X) = a^T \mu \qquad a \qquad Var(a^T X) = a^T \Sigma a.$$

Jestliže A je matice, tak

$$\mathbb{E}(AX) = A\mu \qquad a \qquad Var(AX) = A\Sigma A^T.$$

Podmíněná střední hodnota

Podmíněná střední hodnota

Definice 146.

Podmíněná střední hodnota X za předpokladu $Y = y$ je

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \begin{cases} \sum x f_{X|Y}(x|y) & \text{v diskrétním případě} \\ \int x f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{ve spojitém případě.} \end{cases}$$

Jestliže $r(x,y)$ je funkce x a y, pak

$$\mathbb{E}(r(X,Y)|Y=y) = \begin{cases} \sum r(x,y) f_{X|Y}(x|y) & \text{v diskrétním případě} \\ \int r(x,y) f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{ve spojitém případě.} \end{cases}$$

Poznámka

- Zatímco $\mathbb{E}(X)$ je číslo, $\mathbb{E}(X|Y=y)$ je funkce y.
  - Dokud nepozorujeme hodnotu Y, neznáme hodnotu $\mathbb{E}(X|Y=y)$.
  - Jde o náhodnou veličinu značenou $\mathbb{E}(X|Y)$.
- Jinak řečeno, $\mathbb{E}(X|Y)$ je NV jejíž hodnota je $\mathbb{E}(X|Y=y)$ pro $Y=y$.
- $\mathbb{E}(r(X,Y)|Y)$ je NV s hodnotou $\mathbb{E}(r(X,Y)|Y=y)$ pro $Y=y$.

Příklad 147.

- Zvolme $X \sim \mathit{Uniform}(0,1)$.
- Až zpozorujeme, že $X = x$, zvolíme $Y|X = x \sim \mathit{Uniform}(x,1)$.
- Intuitivně očekáváme, že $\mathbb{E}(Y|X = x) = (1+x)/2$.
- Ve skutečnosti je $f_{Y|X}(y|x) = 1/(1-x)$ pro $x < y < 1$, a tedy

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_x^1 y f_{Y|X}(y|x)\, dy = \frac{1+x}{2},$$

  jak jsme očekávali.
- Tedy $\mathbb{E}(Y|X) = (1+X)/2$.
- Všimněme si, že $\mathbb{E}(Y|X) = (1+X)/2$ je náhodná veličina jejíž hodnota je číslo $\mathbb{E}(Y|X = x) = (1+x)/2$ jakmile víme, že $X = x$.

Věta 148.

Pro náhodné veličiny X a Y, které mají střední hodnoty, platí

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}(Y) \quad a \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X).$$

Obecně, pro libovolnou funkci $r(x, y)$ platí $\mathbb{E}[\mathbb{E}(r(X, Y)|X)] = \mathbb{E}(r(X, Y))$.

Důkaz.

Ukážeme první rovnost. Z definice podmíněné střední hodnoty a $f(x, y) = f(x)f(y|x)$ máme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] &= \int \mathbb{E}(Y|X = x) f(x)\, dx = \iint y f(y|x)\, dy\, f(x)\, dx \\
&= \iint y f(y|x) f(x)\, dx\, dy = \iint y f(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int y \left(\int f(x, y)\, dx \right) dy = \int y f_Y(y)\, dy = \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

□

Příklad 149.

- Uvažme Příklad 147, kde $X \sim \mathit{Uniform}(0,1)$. Jak určíme $\mathbb{E}(Y)$?
- Můžeme najít sdruženou hustotu $f(x,y)$ a spočítat $\mathbb{E}(Y) = \iint yf(x,y)\,dx\,dy$.
- Jednodušší způsob je následující: už víme, že $\mathbb{E}(Y|X) = (1+X)/2$, a proto

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(\frac{1+X}{2}\right) = \frac{1+\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Aplikace podmíněné střední hodnoty

- Uvažme program, který jednou volá proces S.
- Nechť každé volání procesu S rekurzivně vytváří nové kopie procesu S, přičemž počet nových kopií je binomická NV s parametry n a p.
- Předpokládejme, že tyto NV jsou nezávislé pro každé volání S.
- Jaký je očekávaný počet kopií procesu S generovaný programem?

Aplikace podmíněné střední hodnoty

- Zaveďme pojem generace:
  - Iniciální proces S je v generaci 0.
  - Proces S je v generaci i, pokud byl vytvořen jiným procesem S z generace $i-1$.
- Nechť Y_i značí počet procesů S v generaci i.
  - Jelikož $Y_0 = 1$, má počet procesů v generaci 1 binomické rozdělení.
    - A tedy $\mathbb{E}[Y_1] = np$.
  - Podobně předpokládejme, že počet procesů v generaci $i-1$ je y_{i-1}, tedy $Y_{i-1} = y_{i-1}$.
- Nechť Z_k je počet kopií vytvořených k-tým procesem z $(i-1)$-ní generace, $1 \leq k \leq y_{i-1}$.
  - Každé Z_k je binomická NV s parametry n a p.

Aplikace podmíněné střední hodnoty

Platí, že

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_i \mid Y_{i-1} = y_{i-1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k \mid Y_{i-1} = y_{i-1}\right] &= \sum_{j\geq 0} j\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k = j \mid Y_{i-1} = y_{i-1}\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} j\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k = j\right) && = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{y_{i-1}} \mathbb{E}\left[Z_k\right] && = y_{i-1} np.
\end{aligned}$$

Třetí rovnost plyne z toho, že Z_k jsou nezávislé binomické NV, zejména hodnota každého Z_k je nezávislá na Y_{i-1}, což umožňuje odstranit podmíněnost. Pátá rovnost vyplývá z linearity střední hodnoty.

Aplikace podmíněné střední hodnoty

- Použitím Věty 148 induktivně spočítáme očekávanou velikost i-té generace.
- Máme $\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_i|Y_{i-1}]] = \mathbb{E}[Y_{i-1}np] = np\mathbb{E}[Y_{i-1}]$.
- Indukcí k i a použitím faktu $Y_0 = 1$ dostáváme, že $\mathbb{E}[Y_i] = (np)^i$.
- Očekávaný celkový počet kopií procesu S generovaný programem je pak

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i\geq 0} Y_i\right] = \sum_{i\geq 0} \mathbb{E}[Y_i] = \sum_{i\geq 0} (np)^i.$$

- Pokud je $np \geq 1$, je střední hodnota neomezená; pokud je $np < 1$, je střední hodnota $1/(1-np)$.
  - Očekávaný počet procesů generovaných programem je omezený, právě když očekávaný počet procesů vytvořených každým procesem je menší než 1.
- Analyzovaný proces je jednoduchým příkladem tzv. branching procesů, což je pravděpodobnostní paradigma hojně studované v teorii pravděpodobnosti.

Definice 150.

Podmíněná variance je definována jako

$$Var(Y|X = x) = \int (y - \mu(x))^2 f(y|x)\, dy,$$

kde $\mu(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$.

Věta 151.

Pro náhodné veličiny X a Y platí

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Var(Y|X)) + Var(\mathbb{E}(Y|X)).$$

Příklad 152.

- Zvolme náhodně okres a z něj n lidí. Nechť X je počet lidí, kteří mají jistou nemoc.
  - Jestliže Q je poměr lidí majících onu nemoc v daném okrese, pak Q je NV, neboť se liší od okresu k okresu.
  - Pro $Q = q$ má $X \sim Binomial(n, q)$, tedy $\mathbb{E}(X|Q = q) = nq$ a $Var(X|Q = q) = nq(1 - q)$.
- Předpokládejme, že Q má rovnoměrné rozdělení na $(0, 1)$, tj. máme tzv. hierarchistický model

$$Q \sim Uniform(0, 1) \quad \text{a} \quad X|Q = q \sim Binomial(n, q).$$

- Pak $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\mathbb{E}(X|Q) = \mathbb{E}(nQ) = n\mathbb{E}(Q) = n/2$ a $Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Q)) + Var(\mathbb{E}(X|Q)) = (n/6) + (n^2/12)$, protože
  - $\mathbb{E}\,Var(X|Q) = \mathbb{E}[nQ(1 - Q)] = n\mathbb{E}(Q(1 - Q)) = n \int q(1 - q)f(q)\,dq =$ $n \int_0^1 q(1 - q)\,dq = n/6$.
  - $Var\mathbb{E}(X|Q) = Var(nQ) = n^2 Var(Q) = n^2 \int (q - (1/2))^2\,dq = n^2/12$.

Momentové vytvořující funkce

Budeme definovat momentovou vytvořující funkci, která se používá k nalezení momentů NV a k nalezení rozdělení sumy NV.

Definice 153.

Momentová vytvořující funkce či Laplaceova transformace NV X je pro $t \in \mathbb{R}$ definována jako

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int e^{tx} dF(x).$$

Předpokládáme, že je definována pro všechna t v nějakém otevřeném intervalu kolem $t = 0$.[8]

Pokud je funkce dobře definovaná, platí

$$\psi'(0) = \left[\frac{d}{dt}\mathbb{E}(e^{tX})\right]_{t=0} = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}e^{tX}\right]_{t=0} = \mathbb{E}[Xe^{tX}]_{t=0} = \mathbb{E}[X].$$

Platí, že k-tá derivace $\psi^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$, což dává způsob, jak počítat momenty rozdělení.

[8] Příbuzná funkce je charakteristická funkce definovaná jako $\mathbb{E}(e^{itX})$, která je dobře definovaná pro všechna t.

Příklad 154.

Nechť $X \sim Exp(1)$, tedy $f_X(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$. Pak pro $t < 1$ máme

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x}\, dx = \left[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-t}$$

a pro $t \geq 1$ integrál diverguje, tedy $\psi_X(t) = 1/(1-t)$ pro $t < 1$.

Protože $\psi'(0) = \left[\frac{1}{(1-t)^2}\right]_{t=0} = 1$ a $\psi''(0) = \left[\frac{(-2)\cdot(-1)}{(1-t)^3}\right]_{t=0} = 2$, máme

$$\mathbb{E}(X) = 1, \qquad \mathbb{E}(X^2) = 2,$$

odkud

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

Lemma 155.

Vlastnosti momentové vytvořující funkce.

- *Jestliže* $Y = aX + b$, *pak* $\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)$.
- *Jestliže* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé a* $Y = \sum_i X_i$, *pak* $\psi_Y(t) = \prod_i \psi_i(t)$, *kde* ψ_i *je momentová vytvořující funkce* X_i.

Příklad 156.

- Nechť $X \sim Binomial(n, p)$.
- Víme, že $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ a $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$.
- Pak $\psi_i(t) = \mathbb{E}(e^{tX_i}) = (p \cdot e^{t \cdot 1}) + (1 - p)e^{t \cdot 0} = pe^t + q$, kde $q = 1 - p$.
- Tedy

$$\psi_X(t) = \prod_i \psi_i(t) = (pe^t + q)^n.$$

Zopakujme, že X a Y jsou rovné v rozdělení, $X \stackrel{d}{=} Y$, pokud mají stejné distribuční funkce.

Věta 157.

Nechť X a Y jsou NV. Jestliže $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ pro všechna t v nějakém otevřeném intervalu kolem 0, pak $X \stackrel{d}{=} Y$.

Příklad 158.

- Nechť $X_1 \sim Binomial(n_1, p)$ a $X_2 \sim Binomial(n_2, p)$ jsou nezávislé. Nechť $Y = X_1 + X_2$.
- Pak
$$\psi_Y(t) = \psi_1(t)\psi_2(t) = (pe^t + q)^{n_1}(pe^t + q)^{n_2} = (pe^t + q)^{n_1+n_2},$$
kde poslední je momentová vytvořující funkce rozdělení $Binom(n_1 + n_2, p)$.
- Protože momentová vytvořující funkce charakterizuje rozdělení (tedy neexistuje jiná NV se stejnou momentovou vytvořující funkcí) dostáváme, že $Y \sim Binomial(n_1 + n_2, p)$.

Momentové vytvořující (generující) funkce pro některá rozdělení

rozdělení	momentové vytvořující funkce $\psi(t)$
$Bernoulli(p)$	$pe^t + (1-p)$
$Binomial(n,p)$	$(pe^t + (1-p))^n$
$Poisson(\lambda)$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
$Normal(\mu,\sigma^2)$	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
$Gamma(\alpha,\beta)$	$(\frac{1}{1-\beta t})^\alpha$ pro $t < 1/\beta$

Příklad 159.

- Nechť $Y_1 \sim \mathit{Poisson}(\lambda_1)$ a $Y_2 \sim \mathit{Poisson}(\lambda_2)$ jsou nezávislé.
- Momentová generující funkce $Y = Y_1 + Y_2$ je

$$\psi_Y(t) = \psi_{Y_1}(t)\psi_{Y_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)},$$

  což je momentová generující funkce $\mathit{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- Tedy suma nezávislých Poissonových NV má Poissonovo rozdělení.

Nerovnosti

Nerovnosti jsou užitečné k ohraničení hodnot, které je obtížné spočítat.

Věta 160 (Markovova nerovnost).

Nechť X je nezáporná náhodná veličina a nechť $\mathbb{E}(X)$ existuje. Pak pro libovolné $t > 0$ platí

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Důkaz.

Protože $X \geq 0$, máme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^t x f(x)\,dx + \int_t^\infty x f(x)\,dx \\ &\geq \int_t^\infty x f(x)\,dx \geq t \int_t^\infty f(x)\,dx = t\mathbb{P}(X \geq t).\end{aligned}$$

□

Věta 161 (Čebyševova nerovnost).

Nechť $\mu = \mathbb{E}(X)$ a $\sigma^2 = Var(X)$. Pak pro $t > 0$ platí

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \qquad a \qquad \mathbb{P}(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2},$$

kde $Z = (X - \mu)/\sigma$.
Například tedy platí:

- $\mathbb{P}(|Z| > 2) \leq 1/4$
- $\mathbb{P}(|Z| > 3) \leq 1/9$.

Důkaz.

Použijeme Markovovu nerovnost a dostaneme

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) = \mathbb{P}(|X - \mu|^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mu)^2}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Druhá část plyne z toho, že položíme $t = k\sigma$. □

Příklad 162.

- Testujeme predikční metodu, například neuronovou síť, na n případech.
  - $X_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud se prediktor mýlí} \\ 0 & \text{pokud se nemýlí.} \end{cases}$
- Pak $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ je pozorovaná míra chybovosti.
  - Každé X_i lze považovat za Bernoulliho rozdělení s neznámou střední hodnotou p.
  - Rádi bychom znali správnou, avšak neznámou míru chybovosti p.
  - Intuitivně očekáváme, že $\overline{X_n}$ by mělo být blízko p.
- Jak je pravděpodobné, že $\overline{X_n}$ není v ϵ okolí p?
  - Máme $Var(\overline{X_n}) = Var(X_i)/n = p(1-p)/n$ a

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2},$$

    neboť $p(1-p) \leq 1/4$ pro všechna p.
  - Pro $\epsilon = 0,2$ a $n = 100$ je hranice $0,0625$.

Věta 163 (Hoeffdingova nerovnost).

Nechť $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou nezávislá pozorování taková, že $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, $a_i \leq Y_i \leq b_i$, nechť $\epsilon > 0$. Pak pro libovolné $t > 0$ je

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \epsilon\right) \leq e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{t^2(b_i - a_i)^2/8}.$$

Důkaz

Pro libovolné $t > 0$ dává Markovova nerovnost

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(t\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq t\epsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_i} \geq e^{t\epsilon}\right)$$
$$\leq e^{-t\epsilon}\mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right) = e^{-t\epsilon}\prod_i \mathbb{E}\left(e^{tY_i}\right).$$

Důkaz pokračování.

Protože $a_i \leq Y_i \leq b_i$, lze psát $Y_i = \alpha b_i + (1-\alpha)a_i$, kde $\alpha = (Y_i - a_i)/(b_i - a_i)$, a tedy

$$e^{tY_i} \leq \frac{Y_i - a_i}{b_i - a_i} e^{tb_i} + \frac{b_i - Y_i}{b_i - a_i} e^{ta_i}. \qquad \text{(konvexita, viz dále)}$$

Využitím faktu, že $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, odtud dále dostáváme

$$\mathbb{E}(e^{tY_i}) \leq -\frac{a_i}{b_i - a_i} e^{tb_i} + \frac{b_i}{b_i - a_i} e^{ta_i} = e^{g(u)},$$

kde $u = t(b_i - a_i)$, $g(u) = -\gamma u + \log(1 - \gamma + \gamma e^u)$ a $\gamma = -a_i/(b_i - a_i)$.

Platí $g(0) = g'(0) = 0$ a $g''(u) \leq 1/4$ pro všechna $u > 0$. Taylorova věta dává, že existuje $\xi \in (0, u)$ takové, že $g(u) = g(0) + ug'(0) + \frac{u^2}{2} g''(\xi)$, tedy

$$g(u) = \frac{u^2}{2} g''(\xi) \leq \frac{u^2}{8} = \frac{t^2 (b_i - a_i)^2}{8}.$$

Proto $\mathbb{E}(e^{tY_i}) \leq e^{g(u)} \leq e^{t^2 (b_i - a_i)^2/8}$, což dokazuje tvrzení. □

Věta 164.

Nechť $X_1, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(p). Pak pro libovolné $\epsilon > 0$ je

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2},$$

kde $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Důkaz.

Nechť $Y_i = (1/n)(X_i - p)$. Pak $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ a $a \leq Y_i \leq b$, kde $a = -p/n$ a $b = (1-p)/n$. Rovněž $(b-a)^2 = 1/n^2$. Z Věty 163 (Hoeffdingova nerovnost) máme, že

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} - p > \epsilon) = \mathbb{P}\left(\sum_i Y_i > \epsilon\right) \leq e^{-t\epsilon} e^{t^2/(8n)},$$

platí pro libovolné $t > 0$. Pak $t = 4n\epsilon$ dává $\mathbb{P}(\overline{X_n} - p > \epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}$. Podobně $\mathbb{P}(\overline{X_n} - p < -\epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}$, odkud $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}$. □

Příklad 165.

Nechť $X_1, \ldots, X_n \sim Bernoulli(p)$. Nechť $n = 100$ a $\epsilon = 0,2$.
Čebyševova nerovnost dává

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geq 0,2) \leq 0,0625.$$

Hoeffdingova nerovnost dává

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geq 0,2) \leq 2e^{-2\cdot(100)\cdot(0,2)^2} = 0,00067,$$

což je mnohem menší než 0,0625.

Hoeffdingova nerovnost dává způsob, jak vytvořit interval spolehlivosti pro binomický parametr p (více o tom později, ve statistice). Fixujme $\alpha > 0$ a nechť

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log\left(\frac{2}{\alpha}\right)}.$$

Hoeffdingova nerovnost říká, že $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geq \epsilon_n) \leq 2e^{-2n\epsilon_n^2} = \alpha$. Nechť

$$C = (\overline{X_n} - \epsilon_n, \overline{X_n} + \epsilon_n).$$

Pak

$$\mathbb{P}(p \notin C) = \mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geq \epsilon_n) \leq \alpha, \quad \text{tedy} \quad \mathbb{P}(p \in C) \geq 1 - \alpha.$$

Tedy náhodně zvolený interval C obsahuje hodnotu parametru p s pravděpodobností $1 - \alpha$. Dodejme, že C se nazývá interval spolehlivosti s koeficientem spolehlivosti α.

Následující nerovnost je užitečná pro ohraničování pravděpodobnostních tvrzení o normálních náhodných veličinách.

Věta 166 (Millova nerovnost).

Nechť $Z \sim N(0,1)$. *Pak*

$$\mathbb{P}(|Z| \geq t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}.$$

Nerovnosti pro střední hodnoty

Věta 167 (Cauchyho-Schwarzova nerovnost).

Jestliže X a Y mají konečné variance, pak

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Funkce g je konvexní, jestliže pro každé x, y a každé $\alpha \in [0, 1]$ platí

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).$$

- Pokud je $g''(x) \geq 0$ pro všechna x, pak g je konvexní.
- Pokud je g konvexní, pak g leží nad tečnou.
- Funkce g je konkávní, jestliže $-g$ je konvexní.
  - Příklady konvexních funkcí: $g_1(x) = x^2$ a $g_2(x) = e^x$.
  - Příklady konkávních funkcí: $g_3(x) = -x^2$ a $g_4(x) = \ln x$.

Věta 168 (Jensenova nerovnost).

- *Jestliže g je konvexní, pak* $\mathbb{E}(g(X)) \geq g(\mathbb{E}(X))$.
- *Jestliže g je konkávní, pak* $\mathbb{E}(g(X)) \leq g(\mathbb{E}(X))$.

Důkaz.

Nechť $L(x) = a + bx$ je tečna funkce $g(x)$ v bodě $\mathbb{E}(X)$. Protože g je konvexní, leží g nad tečnou $L(x)$, a proto

$$\mathbb{E}(g(X)) \geq \mathbb{E}(L(X)) = \mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X) = L(\mathbb{E}(X)) = g(E(X)).$$

□

Důsledek 169.

- *Platí, že* $\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}(X))^2$.
- *Pokud je X pozitivní, pak* $\mathbb{E}(1/X) \geq 1/\mathbb{E}(X)$.
- *Je-li* log *konkávní, je* $\mathbb{E}(\log X) \leq \log \mathbb{E}(X)$.

Konvergence náhodných veličin

- Důležitá část teorie pravděpodobnosti se věnuje chování sekvence náhodných veličin.
- Říká se jí large sample theory (limitní teorie, asymptotická teorie).
  - Otázkou je, co můžeme říct o limitním chování posloupnosti náhodných veličin $X_1, X_2, X_3, \ldots$?

- Statistika a data mining úzce souvisí se získáváním dat.
- Co se děje, když máme více a více dat?

- V analýze posloupnost reálných čísel x_n konverguje k limitě x, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ je $|x_n - x| < \epsilon$ pro všechna dostatečně velká n.
  - Je-li například $x_n = x$ pro všechna n, pak zřejmě $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

- V pravděpodobnosti je situace trochu komplikovanější.
- Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé NV každá s rozdělením $N(0,1)$.
  - Jelikož všechny NV mají stejné rozdělení, zdálo by se, že X_n „konverguje“ k $X \sim N(0,1)$.
- To ale není v pořádku, neboť $\mathbb{P}(X_n = X) = 0$ pro všechna n.
  - Dvě spojité NV jsou si rovny s pravděpodobností nula.
  - $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X - Y = 0) = 0$.

- Jiný příklad.
  - Nechť $X_1, X_2, \ldots$, kde $X_i \sim N(0, 1/n)$
  - X_n je koncentrováno kolem 0 pro velká n
  - Chtěli bychom proto říct, že X_n konverguje k 0.
    - Ale $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$ pro všechna n.

- Potřebujeme nějaký nástroje k definici konvergence.

Zde se podíváme na následující dva:

- Zákon velkých čísel

  říká, že výběrový průměr $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konverguje v pravděpodobnosti ke střední hodnotě $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, tedy, že $\overline{X}_n$ je blízko μ s velkou pravděpodobností.

- Centrální limitní věta

  říká, že $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$ konverguje v rozdělení k normálnímu rozdělení, tedy, že výběrový průměr má přibližně normální rozdělení pro velká n.

Typy konvergence

Definice 170.

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost NV a X je další NV. Nechť F_n značí distribuční funkci X_n a F distribuční funkci X.

1. X_n konverguje k X v pravděpodobnosti, $X_n \xrightarrow{P} X$, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ platí

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$$

   pro $n \to +\infty$.

2. X_n konverguje k X v rozdělení, $X_n \rightsquigarrow X$, jestliže

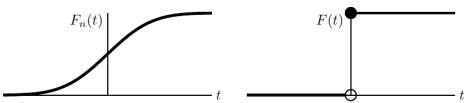
$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t) = F(t)$$

   pro všechna t, kde je F spojitá.

Pokud je limitní NV bodová, $\mathbb{P}(X = c) = 1$ a $X_n \xrightarrow{P} X$, píšeme $X_n \xrightarrow{P} c$.
Podobně pro $X_n \rightsquigarrow X$ píšeme $X_n \rightsquigarrow c$.

Příklad 171 (Konvergence v rozdělení).

- Nechť $X_n \sim N(0, 1/n)$. Konverguje X_n k 0? Platí $\sqrt{n}X_n \sim N(0,1)$?
- Nechť F je distribuční funkce s bodovým rozdělením v 0.
- Nechť Z je standardní normální NV.
  - Pro $t < 0$ je $F_n(t) = \mathbb{P}(X_n < t) = \mathbb{P}(\sqrt{n}X_n < \sqrt{n}t) = \mathbb{P}(Z < \sqrt{n}t) \to 0$, neboť $\sqrt{n}t \to -\infty$.
  - Pro $t > 0$ je $F_n(t) = \mathbb{P}(X_n < t) = \mathbb{P}(\sqrt{n}X_n < \sqrt{n}t) = \mathbb{P}(Z < \sqrt{n}t) \to 1$, neboť $\sqrt{n}t \to +\infty$.
  - Tedy $F_n(t) \to F(t)$ pro všechna $t \neq 0$, tj. $X_n \rightsquigarrow 0$.
- Avšak $F_n(0) = 1/2 \neq F(0) = 1$, a proto konvergence neplatí v $t = 0$. Na tom ale nezáleží, protože v $t = 0$ není F spojitá a definice konvergence v rozdělení vyžaduje konvergenci v bodech, kde je funkce spojitá.



Příklad 172 (Konvergence v pravděpodobnosti).

- Nechť $X_n \sim N(0, 1/n)$. Konverguje X_n k 0?
- Opět je F distribuční funkce s bodovým rozdělením v 0.
- Jak je to s konvergencí v pravděpodobnosti?
- Pro libovolné $\epsilon > 0$ dává Markovova nerovnost

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\epsilon^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\epsilon^2} \to 0$$

  pro $n \to +\infty$.
- Tedy $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Následující věta popisuje vztah mezi typy konvergence.

Věta 173.

Platí, že:

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ implikuje, že } X_n \rightsquigarrow X.$$

Opačná implikace neplatí, až na následující speciální případ:

Jestliže $X_n \rightsquigarrow X$ *a* $\mathbb{P}(X = c) = 1$ *pro nějaké reálné* c*, pak* $X_n \xrightarrow{P} X$.

Věta 174.

Nechť X_n, X, Y_n, Y jsou náhodné veličiny. Nechť g je spojitá funkce.

1. *Jestliže $X_n \xrightarrow{P} X$ a $Y_n \xrightarrow{P} Y$, pak $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.*
2. *Jestliže $X_n \rightsquigarrow X$ a $Y_n \rightsquigarrow c$, pak $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$.*
3. *Jestliže $X_n \xrightarrow{P} X$ a $Y_n \xrightarrow{P} Y$, pak $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$.*
4. *Jestliže $X_n \rightsquigarrow X$ a $Y_n \rightsquigarrow c$, pak $X_n Y_n \rightsquigarrow cX$.*
5. *Jestliže $X_n \xrightarrow{P} X$, pak $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.*
6. *Jestliže $X_n \rightsquigarrow X$, pak $g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$.*

Obecně $X_n \rightsquigarrow X$ a $Y_n \rightsquigarrow Y$ neimplikuje $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + Y$.

Zákon velkých čísel

Zákon velkých čísel je jeden z hlavních výsledků teorie pravděpodobnosti. Říká, že střední hodnota velkého výběru se blíží střední hodnotě rozdělení. Například při velkém počtu hodů padne orel kolem poloviny případů.
Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou IID NV. Nechť $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ a $\sigma^2 = Var(X_i)$. Zopakujme, že výběrový průměr $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ a že $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu$ a $Var(\overline{X}_n) = \sigma^2/n$.

Věta 175 (Slabý zákon velkých čísel).

Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID, pak $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Tedy rozdělení $\overline{X}_n$ se začíná koncentrovat kolem μ s rostoucím n.

Důkaz.

Předpokládejme, že $\sigma < +\infty$. Tento předpoklad není nutný, ale zjednodušuje důkaz.
Z Čebyševovy nerovnosti máme

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

což jde k 0 pro $n \to +\infty$. □

Příklad 176.

Uvažujme hody mincí, kde orel padá s pravděpodobností rovnou p. Nechť X_i je výsledek jednoho hodu (0 nebo 1), tedy

$$p = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{E}(X_i).$$

Poměr orlů po n hodech je $\overline{X}_n$. Zákon velkých čísel říká, že $\overline{X}_n$ konverguje v pravděpodobnosti k p. To však neznamená, že $\overline{X}_n$ se bude rovnat p, ale že pro velká n bude rozdělení $\overline{X}_n$ koncentrované těsně kolem p.

Nechť $p = 1/2$. Jak velké musí být n, aby $\mathbb{P}(0,4 \leq \overline{X}_n \leq 0,6) \geq 0,7$?

Máme $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = p = 1/2$ a $Var(\overline{X}_n) = \sigma^2/n = p(1-p)/n = 1/(4n)$. Čebyševova nerovnost pak dává

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,4 \leq \overline{X}_n \leq 0,6) &= \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0,1) = 1 - \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > 0,1) \\ &\geq 1 - \frac{1}{4n(0,1)^2} = 1 - \frac{25}{n},\end{aligned}$$

což je větší než $0,7$ pro $n = 84$.

Silný zákon velkých čísel

Zatímco slabý zákon velkých čísel říká, že $\overline{X}_n$ konverguje v pravděpodobnosti ke střední hodnotě $\mathbb{E}(X_i)$, silný zákon velkých čísel říká, že skoro jistě konverguje ke střední hodnotě.

Věta 177 (Silný zákon velkých čísel).

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou IID. Jesliže $\mu = \mathbb{E}(|X_i|) < +\infty$, pak

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Slabý vs. silný zákon velkých čísel

Slabý zákon velkých čísel říká, že pro libovolně specifikovanou velkou hodnotu n^* je $(X_1 + \cdots + X_{n^*})/n^*$ blízko μ. Neříká však, že $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ musí být blízko μ pro všechny hodnoty $n > n^*$, tj. připouští možnost, že se velké hodnoty

$$\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu \right|$$

mohou vyskytnout nekonečně často.

Silný zákon říká, že toto nemůže nastat, tedy, že s pravděpodobností 1 bude

$$\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu \right|$$

větší než jakékoliv $\epsilon > 0$ pouze konečně mnohokrát.

Centrální limitní věta

- Zákon velkých čísel říká, že rozdělení $\overline{X}_n$ jde k μ.
- To nám nepomůže aproximovat tvrzení o $\overline{X}_n$.
- K tomu potřebujeme centrální limitní větu.

- Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID se střední hodnotou μ a variancí σ^2.
- Centrální limitní věta říká, že $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_i X_i$ má rozdělení, které je přibližně rovno normálnímu rozdělení se střední hodnotou μ a variancí σ^2/n.
- Toto je pozoruhodné, neboť o rozdělení X_i nic nepředpokládáme, mimo toho, že střední hodnoty a variance existují.

Věta 178 (Centrální limitní věta).

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID se střední hodnotou μ a variancí σ^2. Nechť $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Pak tzv. normalizovaná či standardizovaná veličina

$$Z_n \equiv \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow Z,$$

kde $Z \sim N(0,1)$. Jinak řečeno,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}\, dx.$$

Poznámka. Pravděpodobnostní tvrzení o $\overline{X}_n$ lze aproximovat pomocí normálního rozdělení. Aproximujeme pravděpodobnostní tvrzení, nikoliv samotnou náhodnou veličinu.

Příklad 179.

- Předpokládejme, že počet chyb na jeden počítačový program má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou 5.
- Dostaneme 125 programů.
- Nechť $X_1, \ldots, X_{125}$ jsou počty chyb v programech.
- Budeme aproximovat $\mathbb{P}(\overline{X}_n < 5,5)$.
- Nechť $\mu = \mathbb{E}(X_i) = \lambda = 5$ a $\sigma^2 = Var(X_i) = \lambda = 5$.
- Pak $\mathbb{P}(\overline{X}_n < 5,5) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}(5,5 - \mu)}{\sigma}\right) \approx \mathbb{P}(Z < 2,5) \approx 0,9938.$

- Centrální limitní věta říká, že
$$Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$$
je přibližně $N(0,1)$.
- My však neznáme σ.
- Později uvidíme, že σ^2 lze odhadnout z $X_1, \ldots, X_n$ pomocí výběrové variance
$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Platí centrální limitní věta, pokud nahradíme σ za S_n? Odpověď je ano.

Věta 180.

Předpokládejme stejné podmínky jako u centrální limitní věty. Pak

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} \rightsquigarrow N(0,1).$$

Jak přesná je tato normální aproximace?

Věta 181 (Berry-Essèenova nerovnost).

Předpokládejme, že $\mathbb{E}|X_i|^3 < +\infty$. *Pak*

$$\sup_z |\mathbb{P}(Z_n \leq z) - \Phi(z)| \leq \frac{33}{4} \cdot \frac{\mathbb{E}|X_i - \mu|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}.$$

Delta metoda

Jestliže má Y_n limitní normální rozdělení, pak delta metoda nám umožňuje najít limitní rozdělení $g(Y_n)$, kde g je libovolná hladká[9] funkce.

Věta 182 (Delta metoda).

Předpokládejme, že

$$\frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

a že g je diferencovatelná funkce taková, že $g'(\mu) \neq 0$. Pak

$$\frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{|g'(\mu)|\sigma} \rightsquigarrow N(0,1).$$

Jinak řečeno, $Y_n \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ implikuje, že $g(Y_n) \approx N(g(\mu), (g'(\mu))^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n})$.

[9] Funkce je hladká tehdy, má-li v každém svém bodě spojitou derivaci.

Příklad 183.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou IID s konečnou střední hodnotou μ a konečnou variancí σ^2.
Podle centrální limitní věty máme

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)/\sigma \rightsquigarrow N(0,1).$$

Nechť $W_n = e^{\overline{X_n}}$, tedy $W_n = g(\overline{X_n})$, kde $g(s) = e^s$. Protože $g'(s) = e^s$, delta metoda implikuje, že

$$W_n \approx N(e^\mu, e^{2\mu} \cdot \sigma^2/n).$$

Popisná statistika

Statistika

- (Popisná) statistika = odvození (číselných) charakteristik o datech a jejich vizualizace.
  - Například roční příjmy občanů podle dat finančních úřadů.

- Matematická statistika = použití matematických metod pro odvozování závěrů platných pro celý soubor objektů na základě malého vzorku (společně s kvalitativním odhadem věrohodnosti výsledného sdělení).
  - Například choroby populace z dat získaných u několika nahodile vybraných osob.
  - Pro daná data zjišťujeme, jaké vlastnosti popisované objekty mají a jak věrohodné jsou odvozené výsledky.

Popisná statistika: Příklad

Příklad 184.

- Soubor objektů mohou být studenti nějakého základního kurzu, jako číselné údaje pak můžeme zkoumat:
  - průměrný počet bodů získaný z předmětu v minulém semestru a rozptyl těchto hodnot
  - průměrné dosažené známky z tohoto a jiných předmětů a korelace mezi výsledky
  - korelace dat vypovídajících o historii dřívějšího studia u konkrétních studentů
  - korelace neúspěchů ve studiu a počtu hodin týdně odpracovaných studentem mimo fakultu.

Poznámky ke statistikám posuzovaných veličin

- Aritmetický průměr bodů říká málo o kvalitě přednášky. Zajímavější hodnotou je počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní i nad ní (či první a poslední čtvrtina, desetina, atp.). Tyto hodnoty nazýváme statistiky.
- Rozumné hodnocení by mělo mít normální rozdělení.
- Z číselných hodnot statistik pro konkrétní výběr lze kvalitativně popsat věrohodnost závěrů.
  - Například pokud výsledky hodnocení nevykazují dostatečnou variabilitu, jde o náznak, že s předmětem není něco v pořádku.
- Jak je to s věrohodností zpracovávaných dat?
  - Data mohou být nepřesná v důsledku nevhodné konstrukce experimentu a samotného sběru dat.
- V mnoha případech nic nevíme o charakteru rozdělení dat.

Popisná statistika

- V popisné statistice máme k dispozici nástroje, které umožňují dobře porozumět struktuře a povaze i velmi rozsáhlých dat.
- V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti, který je použitelný pro analýzu daných dat, zejména když máme k dispozici teoretický model, kterému mají odpovídat.
- Závěry statických šetření na vzorcích konkrétních souborů dat může dát matematická statistika.
- Do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní výběr dat je možné vyjádřit pomocí metod matematické statistiky.

Terminologie

- Statistický soubor je přesně definovaná množina základních statistických jednotek, která je dána výčtem nebo nějakými pravidly.
  - Statistickým souborem jsou například všichni obyvatelé Olomouce, kde každý obyvatel zvlášť je statistickou jednotkou.
- Na každé statistické jednotce měříme jeden nebo více statistických znaků, například číselné hodnoty jako výška, váha, věk atd.
- Základním objektem pro zkoumání jednotlivých znaků je soubor hodnot, zpravidla ve formě uspořádaných hodnot, přičemž k porovnávání a poměřování jednotlivých hodnot potřebujeme měřítko.

Typy měřítek znaků

Hodnoty mohou být následujících typů:

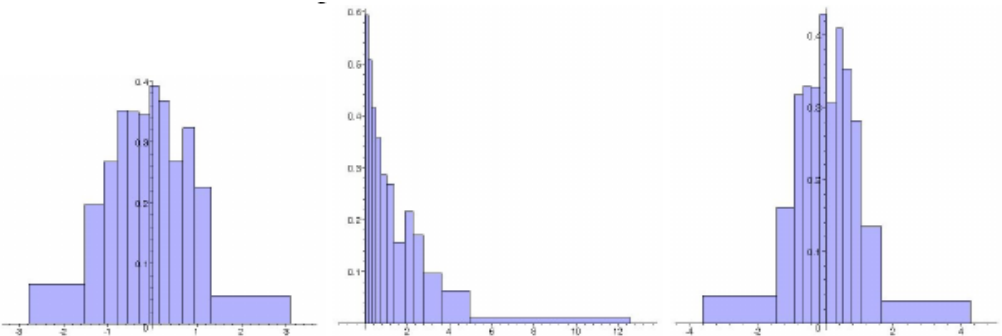
- nominální – mezi hodnotami není žádný vztah, jde pouze o označení možných hodnot
  - například názvy politických stran
  - jsme schopni interpretovat pouze rovnost $x = y$.
- ordinální – hodnoty s uspořádáním
  - výška, váha, počet hvězdiček u hotelů atd.
  - jsme schopni interpretovat rovnost a nerovnost $x < y$, případně $x > y$.
- intervalové – číselné hodnoty, kde jde o porovnání velikostí, nikoliv o absolutní hodnotu
  - umíme posoudit i rozdíl $x - y$.
- poměrové – pevně stanovené měřítko a nula
  - většina fyzikálních nebo ekonomických veličin
  - máme k dispozici rovnost, nerovnost, rozdíl i podíl x/y.

Uspořádání hodnot

- Mějme soubor hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$, které lze uspořádat, a které vznikly měřením n statistických jednotek.
  - Uspořádáme je do uspořádaného souboru hodnot $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$.
  - Číslo n nazýváme rozsah souboru.
- Pokud pracujeme s rozsáhlými soubory znaků, které připouští málo hodnot, uvádíme pouze četnosti výskytu.
  - U průzkumu preferencí politických stran uvádíme u každé možné hodnoty počet jejích výskytů.
- Pokud je naopak možných hodnot mnoho, dělíme možný rozsah hodnot na vhodný počet intervalů a o statistickém znaku uvádíme četnost hodnot v daných intervalech.
  - Například mzda mezi 1500 až 2000 EUR, výška 180 až 190 cm, atd.
  - Intervalům se říká třídy a počtu znaků ve třídě třídní četnosti.
    - Používáme také kumulativní četnosti a kumulativní třídní četnosti, které pro danou třídu vznikají součtem třídních četností s hodnotami nejvýše jako má ta daná třída.
  - Nejčastěji uvažujeme střed a_i dané třídy za hodnotu, která ji reprezentuje.
    - Hodnota $a_i n_i$, kde n_i je četnost výskytu této třídy, představuje celkový příspěvek této třídy.
  - Místo četností často zobrazujeme relativní četnosti $\frac{a_i}{n}$, resp. relativní kumulativní četnosti.

Vizualizace

- Graf, který na jedné ose vynáší intervaly jednotlivých tříd a nad nimi obdélníky s výškou rovnou četnosti se nazývá histogram.
  - Obdobně se znázorňuje kumulativní četnost.
- Na obrázku jsou histogramy souborů o rozsahu $n = 500$, které vznikly náhodným generováním dat s různými standardními rozděleními (normální, χ^2 a studentovo).



Míry polohy statistických znaků – průměry

Mějme (nesetříděný) soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ hodnot měřeného znaku pro všechny zpracovávané statistické jednotky a nechť $n_1, \ldots, n_m$ jsou třídní četnosti m možných hodnot $a_1, \ldots, a_m$.

Definice 185.

Aritmetický průměr (často jen průměr): $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j a_j$.

Geometrický průměr: $\bar{x}^G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ a má smysl pouze u kladných hodnot znaků.

Harmonický průměr: $\bar{x}^H = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$ a je definován jen pro kladné hodnoty znaků.

- Platí $\bar{x}^H \leq \bar{x}^G \leq \bar{x}$.
- Aritmetický průměr je invariantní vůči afinním transformacím:
  - pro lib. skaláry a, b platí $\overline{(a + b \cdot x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i) = a + \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a + b \cdot \bar{x}$, je tedy vhodný pro intervalové typy měřítek.
- Logaritmus geometrického průměru znaků je aritmetický průměr logaritmů znaků.
  - Je vhodný pro znaky, které se kumulují multiplikativně, jako například úrokové míry.
    - Je-li úroková míra v jednotlivých časových jednotkách x_i %, bude za celé období výsledek takový, jakoby byla po celou dobu konstantní úroková míra $\bar{x}^G$ %.

Příklad na průměrnou rychlost

Příklad 186.

Auto jelo z Brna do Prahy rychlostí 160 km/h a z Prahy do Brna rychlostí 120 km/h. Jakou jelo průměrnou rychlostí?

Řešení. Pro průměrnou rychlost musí platit, že auto jedoucí touto rychlostí stráví na trase stejnou dobu. Označíme-li d vzdálenost obou měst v kilometrech a v_p průměrnou rychlost, tak

$$\frac{d}{160} + \frac{d}{120} = \frac{2d}{v_p},$$

odkud

$$v_p = \frac{2}{\frac{1}{160} + \frac{1}{120}} = 137,14\,.$$

Průměrná rychlost je tedy harmonický průměr jednotlivých průměrných rychlostí.

Medián, kvartil, decil, percentil,...

- Další způsob vyjádření míry hodnot nabývaných znaky je pro parametr $\alpha \in (0,1)$ nalezení hodnoty x_α tak, aby 100α % hodnot znaku bylo nejvýše x_α a zbylé hodnoty byly větší než x_α. Číslu x_α říkáme α-kvantil.
  - Pokud takový znak není určen jednoznačně, volíme průměr mezi krajními hodnotami.
- Nejobvyklejší hodnoty x_α jsou:
  - medián (výběrový medián) definovaný vztahem $\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{pro liché } n \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{pro sudé } n, \end{cases}$

    kde $x_{(k)}$ představuje hodnotu v uspořádaném souboru hodnot.
  - dolní a horní kvartil $Q_1 = x_{0,25}$ a $Q_3 = x_{0,75}$.
  - p-tý kvantil (výběrový kvantil či percentil) x_p, pro $0 < p < 1$.
  - modus definovaný jako hodnota $\hat{x}$ znaku s největší četností v souboru x.
- Aritmetický průměr, medián a modus představují očekávatelné hodnoty znaků.
  - Průměr u znaku podílového typu, medián u poměrového typu a modus u typu ordinálního nebo nominálního.

(Výběrový) rozptyl

Definice 187.

Rozptyl souboru znaků x je definován vztahem

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Směrodatná odchylka s_x je odmocnina z výběrového rozptylu.

- Někdy se místo s_x^2 používá tzv. výběrový rozptyl, který se liší tím, že se ve jmenovateli zlomku používá $(n-1)$.
- V případě třídních četností n_j hodnot a_j pro m tříd dává stejný výraz hodnotu rozptylu

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_j(a_j - \bar{x})^2,$$

ale v praxi se doporučuje používat tzv. Shepardovu korekci, která s_x^2 zmenší o $h^2/12$, kde h je šířka stejných intervalů definujících třídy hodnot.

- Dále se můžeme setkat s tzv. rozpětím výběru $R = x_{(n)} - x_{(1)}$ a kvartilovým rozpětím výběru $Q = Q_3 - Q_1$.
- Používá se také tzv. průměrná odchylka, která je dána průměrnou vzdáleností hodnot od mediánu

$$D_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}|.$$

Věta 188.

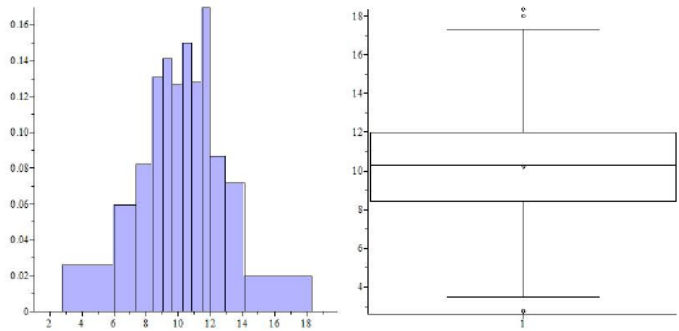
Funkce $S(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - t)^2$ *nabývá minima pro* $t = \bar{x}$, *tedy pro výběrový průměr.*
Funkce $D(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - t|$ *nabývá minima pro* $t = \tilde{x}$, *tedy pro medián.*

V praxi potřebujeme poměřovat variabilitu různých souborů hodnot znaků různých statistických jednotek. Pro tento účel je vhodné relativizovat měřítko a používat tzv. variační koeficient V_x daného souboru x:

$$V_x = \frac{\sqrt{s_x^2}}{|\bar{x}|}.$$

Diagramy

Pro zobrazení statistiky jednotlivých znaků nebo jejich korelací se používá mnoho standardizovaných nástrojů. Jedním z nich jsou tzv. krabicové diagramy.



Na obrázku je zobrazen histogram a krabicový diagram stejného souboru hodnot.
Střední linka je medián, kraje boxu jsou kvartily, packy ukazují 1,5 kvartilového rozsahu, ne však víc než kraje rozsahu výběru, případné hodnoty mimo jsou přímo naznačeny body.

Příklad 189.

V rybníku se vylovilo 425 kaprů a u všech byly zjištěny jejich hmotnosti. Pak se vhodně zvolily hmotnostní intervaly a sestavila se následující tabulka četností:

Hmotnost (kg)	0–1	1–2	2–3	3-4	4–5	5–6	6–7
Střed třídy	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
Četnost	75	90	97	63	48	42	10

Načrtněte histogram, určete aritmetický, geometrický a harmonický průměr hmotnosti kaprů. Dále určete medián, horní a dolní kvartil, modus, rozptyl, směrodatnou odchylku, variační koeficient a načrtněte příslušný krabicový diagram.

Matematická statistika

Matematická statistika

- Pracuje s výběrem základního souboru a snaží se popsat míru relevantnosti zjištěných statistik, případně zjistit či upřesnit vhodný teoretický model pro chování celého souboru a z něj pak třeba odhadovat pravděpodobnost nějakého budoucího jevu.
  - Pokud například padne k orlů v n hodech mincí, tak můžeme chtít vyvodit s jakou pravděpodobností padne v následujících dvou hodech orel.
- Existují dva základní přístupy:
  - klasická (frekvenční) statistika
  - Bayesovská statistika.

Klasická (frekvenční) statistika

- Vychází z toho, že pravděpodobnosti jsou dány četnostmi výskytů jevů ve velkých vzorcích dat – lze je tedy aproximovat nekonečnými modely – a využít pro odhady spolehlivosti centrální limitní větu.
  - Na pravděpodobnost pohlíží jako na idealizaci relativní četnosti případů, v nichž se vyskytne určitý výsledek při opakovaných pokusech.
  - Tato zdánlivá výhoda/rigoróznost se může ale rychle stát nevýhodou, jakmile se začneme zabývat spolehlivostí samotných dat a vhodností zvoleného experimentu.
  - Stejně tak je obtížné frekvenční statistiku dobře použít pro odhad pravděpodobnosti výskytu jednorázového děje.
- U hodu mincí vychází z předpokladu, že jednotlivé hody jsou nezávislé a u všech je stejná pravděpodobnost orla dána parametrem $\theta = p$ (který však neznáme).

Bayesovská statistika

- Je příkladem matematizace „selského rozumu“, kdy chceme naše původní přesvědčení postupně pozměňovat ve světle nových dat.
  - Historicky byl první Bayesovský přístup (např. Laplace a další již v 18. století), který byl prakticky zcela vystřídán frekvenční statistikou ve 20. století.
  - V posledních desetiletích se však Bayesovská statistika vrátila, společně s dalšími novými přístupy.
- U hodu mincí považuje Bayesovská statistika parametr θ za náhodnou proměnnou, data získaná experimentem za konstanty a pokouší se z nich vydedukovat informace o rozložení pravděpodobnosti náhodné veličiny θ.

Klasická (frekvenční) statistika

Náhodný výběr z populace

- Mějme (velký) základní statistický soubor s N jednotkami, tzv. populaci a nějaký číselný znak pro každou z jednotek, tedy soubor hodnot

$$(x_1, \ldots, x_N).$$

  - Z něj máme k dispozici výběrový soubor s hodnotami $(X_1, \ldots, X_n)$.
  - Abychom se vyhnuli diskusi skutečné velikosti základního statistického souboru s N jednotkami, budeme předpokládat, že vybíráme položky výběrového souboru jednu po druhé a každou vybranou jednotku poté do populace vracíme.
  - Zároveň předpokládáme, že každá položka má stejnou pravděpodobnost výběru $1/N$.
  - Hovoříme pak o náhodném výběru.

Náhodný výběr z populace

- Způsob realizace náhodného výběru nyní interpretujeme tak, že pracujeme s vektorem $(X_1, \ldots, X_n)$ nezávislých náhodných veličin a že všechny tyto veličiny mají stejné rozdělení pravděpodobnosti.
  - Zejména tedy sdílí distribuční funkci $F_X(x)$ a momenty $E(X_i) = \mu$ a $var(X_i) = \sigma^2$.
- Dalším krokem je odvození charakteristik výběrového průměru $\overline{X_n}$ a výběrového rozptylu

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2.$$

Podle následující věty volíme koeficient $\frac{1}{n-1}$ místo $\frac{1}{n}$ proto, aby $\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2$.

Věta 190.

Pro výběrový průměr $\overline{X_n}$ spočítaný z náhodného výběru rozsahu n z rozdělení s konečnou střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 platí $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \mu$, $Var(\overline{X_n}) = \sigma^2/n$, a pro výběrový rozptyl S_n^2 platí $\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2$.

Náhodný výběr z normálního rozdělení

- V praktických úlohách je třeba znát nejen číselné charakteristiky výběrového průměru a rozptylu, ale jejich úplné rozdělení pravděpodobnosti.
  - To můžeme odvodit pouze pokud známe rozdělení pravděpodobnosti X_i.
  - Jako užitečnou ilustraci si ukažme výsledek pro náhodný výběr z normálního rozdělení.

Věta 191.

Je-li $(X_1, \ldots, X_n)$ *náhodný výběr z rozdělení* $N(\mu, \sigma^2)$, *pak jsou* $\overline{X_n}$ *a* S_n^2 *nezávislé veličiny a platí*

$$\overline{X_n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad a \qquad \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}\,.$$

Bodové a intervalové odhady

Bodové a intervalové odhady

- Uvažme anketu mezi 500 studenty o spokojenosti s kurzem ve formě bodů od 1 do 10.
  - Spokojenost jednotlivých studentů X_i je aproximována náhodnou veličinou s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, přičemž zjištěné hodnoty z celé populace minulého semestru jsou $\mu = 6$ a $\sigma = 2$.
- V běžícím semestru je provedeno namátkové šetření u $n = 15$ studentů.
  - Výsledkem je hodnocení, kde se vyskytují dvě 3, tři 4, tři 5, pět 6 a dvě 7.
  - Výběrový průměr je tedy $\overline{X_{15}} \doteq 5,133$ a výběrový rozptyl $S^2_{15} \doteq 1,695$.
- Z předpokladů víme, že $\overline{X_n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.
- Pro vyjádření spolehlivosti našeho odhadu určíme interval, který bude odhadovaný parametr obsahovat s předem zvolenou pravděpodobností $100(1-\alpha)$ %.
  - Hovoříme o hladině spolehlivosti $0 < \alpha < 1$.

Bodové a intervalové odhady

- Nejprve považujme za neznámý nový parametr μ, zatímco o rozptylu budeme předpokládat, že zůstal stejný. Pak

$$1-\alpha = \mathbb{P}(|Z| < z(1-\alpha/2)) = \mathbb{P}(|\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma}| < z(1-\alpha/2))$$
$$= \mathbb{P}\left(\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z(1-\alpha/2) < \mu < \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z(1-\alpha/2)\right)$$

  a máme interval, jehož hranice jsou náhodné veličiny, a který s předem danou pravděpodobnostní bude obsahovat odhadovaný parametr μ.
  - $z(\beta)$ je β-kvantil standardního normálního rozdělení $N(0,1)$, který najdeme v tabulkách.
- Střed intervalu nazýváme bodovým odhadem pro parametr μ, celý interval intervalovým odhadem.
- Výsledek můžeme interpretovat i tak, že na hladině spolehlivosti α je nebo není odhadovaný parametr μ odlišný od jiné hodnoty μ_0.

Bodové a intervalové odhady

- V případě našich dat vyjde pro $\alpha = 0,05$, že $\mu \in (4,121; 6,145)$.
  - Na hladině spolehlivosti 5 % nemůžeme potvrdit, že se názor studentů na kurz zhoršil, protože uvedený interval obsahuje i hodnotu $\mu_0 = 6$.
- Pro $\alpha = 0,1$ vyjde, že $\mu \in (4,284; 5,983)$.
  - Na úrovni 10 % už takový úsudek uděláme, protože hodnota $\mu_0 = 6$ do intervalu nepadne.

Bodové a intervalové odhady

- Pokud bychom předpokládali, že spokojenost s letošním kurzem bude mít rozptyl odpovědí jiný než loni, museli bychom postupovat odlišně.
- Místo normalizované veličiny Z uvedené výše budeme stejně postupovat s veličinou

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{S_n}.$$

  - Tato NV má rozdělení $T \sim t_{n-1}$; v našem případě je $n = 15$.
- Vyjde tak intervalový odhad

$$\overline{X_n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2) < \mu < \overline{X_n} + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2).$$

  - Pro $\alpha = 0,05$ máme $\mu \in (4,412; 5,854)$.
  - Pro $\alpha = 0,03$ máme $\mu \in (4,321; 5,945)$.
    - Už na úrovni 3 % spolehlivosti máme za to, že je názor na kurz horší.
  - To odpovídá intuici, že by výrazně menší výběrová směrodatná odchylka $S_n = 1,302$ (než odchylka $\sigma = 2$ z minulého šetření) měla být podstatná pro naše úvahy.

Příklad 192.

Při 600 hodech kostkou padla šestka celkem 45 krát. Je možné tvrdit, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0,01$?

Řešení. Pro ideální kostku je pravděpodobnost hodu šestky v každém hodu rovna $p = 1/6$. Počet šestek v 600 hodech je dán NV $\overline{X_n}$, která má binomické rozdělení $\overline{X_n} \sim Bi(600, 1/6)$, a tedy $\mu = 100$ a $var(\overline{X_n}) = 250/3$. Toto rozdělení lze podle centrální limitní věty aproximovat rozdělením $N(\mu, \sigma^2/n) = N(100, 250/3)$. Naměřenou hodnotu $\overline{X_n} = 45$ můžeme považovat za náhodný výběr o jednom členu. Považujeme-li rozptyl za známý, pak je 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ roven

$$(45 - \sqrt{250/3}z(0,995), 45 + \sqrt{250/3}z(0,995)) .$$

Z tabulek zjistíme, že kvantil $z(0,995) \approx 2,58$, což dává interval $(21, 69)$. Na ideální kostce je ale $\mu = 100$, a proto nejde v tomto smyslu o ideální kostku na hladině $\alpha = 0,01$.

Příklad 193.

NV X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 nejsou známy. V následující tabulce jsou uvedeny četnosti jednotlivých realizací této NV.

X_i	8	11	12	14	15	16	17	18	20	21
n_i	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Vypočtěte výběrový průměr, výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku a určete 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Řešení.

Výběrový průměr $\overline{X} = \sum n_i X_i / \sum n_i = 490/32 \approx 15,3$.

Výběrový rozptyl $S^2 = \sum n_i (X_i - \overline{X})^2 / (\sum n_i - 1) = 1943/256 \approx 7,6$, a tedy výběrová směrodatná odchylka je $S \approx 2,8$.

$100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu je $\mu \in (\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2))$. Dosazením $\overline{X} = 15,3$, $n = 32$, $S \approx 2,8$, $\alpha = 0,01$ a z tabulek $t_{31}(0,995) \approx 2,75$ máme 99% interval spolehlivosti $\mu \in (14,0; 16,7)$.

Horní a dolní odhady

Někdy nás zajímá pouze horní nebo dolní odhad, tedy statistiky U a L pro něž $\mathbb{P}(\mu < U)$ a $\mathbb{P}(L < \mu)$. Jde o tzv. jednostranné intervaly spolehlivosti $(-\infty, U)$ a $(L, +\infty)$.

Pro náhodnou veličinu $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ máme

$$1 - \alpha = \phi(z(1-\alpha)) = P(Z < z(1-\alpha)),$$

odkud

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha) < \mu),$$

a tedy $L = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha)$. Obdobně $U = \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha)$ a pro rozdělení s neznámým rozptylem

$$\mu \geq \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha) \qquad \text{a} \qquad \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha).$$

Příklad 194.

Předpokládejme, že výška desetiletých chlapců má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 = 39,112$. Změřením výšky 15 chlapců jsme určili výběrový průměr $\overline{X} = 139,13$. Určete

a) 99% oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ.

b) dolní odhad μ na hladině spolehlivosti 95 %.

Řešení.

a) $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ normálního rozložení je $\mu \in (\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha/2), \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha/2))$, kde $\overline{X}$ je výběrový průměr z n hodnot, σ je známý rozptyl a $z(1-\alpha/2)$ je příslušný kvantil. Dosazením ze zadání $n = 15$, $\sigma \approx 6,254$ a z tabulek $z(0,995) \approx 2,576$ dostaneme $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha/2) \approx 4,16$, tedy $\mu \in (134,97; 143,29)$.

b) Dolní odhad L parametru μ na hladině spolehlivosti 95 % je $L = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(0,95)$. Z tabulek $z(0,95) \approx 1,645$, a proto $\mu \in (136,474; +\infty)$.

Odhady rozptylu

Pokud potřebujeme odhadnout rozptyl σ^2 náhodného rozložení, pak stejně jako u odvození odhadu střední hodnoty využijeme Větu 191, podle které má NV $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Pak platí

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1}(\alpha/2) \leq \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \leq \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \right).$$

Oboustranný $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro rozptyl je

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \right)$$

a podobně pro jednostranný horní a dolní odhad dostaneme

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha)} \qquad \text{a} \qquad \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)} \leq \sigma^2.$$

Příklad 195.

Provádí se průzkum volebních preferencí pěti stran. Kolik (náhodně vybraných) respondentů se musí zúčastnit, aby s pravděpodobností $0,95$ byly výsledky u všech zkoumaných stran v rozmezí ± 2 % od skutečných preferencí?

Řešení.

Nechť p_i je skutečná relativní četnost příznivců i-té strany v populaci a nechť NV X_i udává počet příznivců této strany mezi zvolenými n voliči. Budeme považovat za nezávislé jevy, že do 2% intervalu padne X_i/n. Pokud zvolíme n takové, že pro všechna i padne X_i/n do 2% intervalu s pravděpodobností alespoň $\sqrt[5]{0,95} \approx 0,99$, bude požadavek zadání splněn, neboť chceme p tak, aby $p^5 = 0,95$. Hledáme tedy n takové, že $\mathbb{P}\left[|\frac{X}{n} - p| < 0,02\right] \geq 0,99$. Máme

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0,02\right] = \mathbb{P}\left[-0,02 < \frac{X}{n} - p < 0,02\right] = \mathbb{P}[-0,02n < X - pn < 0,02n]$$
$$= \mathbb{P}\left[\frac{-0,02n}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - pn}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{0,02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$$

Příklad 195 (pokračování).

$$
\begin{aligned}
&= \Phi\left(\frac{0,02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{0,02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{0,02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 0,99 \\
&\Longrightarrow \Phi\left(\frac{0,02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq 0,995.
\end{aligned}
$$

Protože je distribuční funkce rostoucí, máme $\frac{0,02n}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \Phi^{-1}(0,995) \approx 2,576$, a tedy

$$\sqrt{n} \geq 50 \cdot 2,576 \cdot \sqrt{p(1-p)} \geq 50 \cdot 2,576 \cdot \frac{1}{2},$$

odkud $\quad n \geq (25 \cdot 2.576)^2 = 4147$ respondentů.

Věrohodnost odhadů

- Matematicky jsou intervalové a bodové odhady pochopitelné, prakticky je však problém ověřit předpoklady o náhodnosti výběru.
  - Ve složitějších případech bude problém s věrohodností odhadů.
- Obecně chceme pracovat s náhodným výběrem o rozsahu n.
  - Implicitně předpokládáme, že NV X_i jsou nezávislé se stejným rozdělením pravděpodobnosti, které závisí na neznámém (vektorovém) parametru θ.
- Snažíme se najít výběrovou statistiku T,tedy funkci náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$, která bude dobře odhadovat skutečnou hodnotu parametru θ.
  - T je nestranným odhadem parametru θ, jestliže $\mathbb{E}(T) = \theta$.
    - Střední hodnota $\mathbb{E}(T - \theta)$ se nazývá vychýlení odhadu T.
- Často nás zajímá asymptotické chování odhadu.
  - Říkáme, že $T = T(n)$ je konzistentním odhadem parametru θ, jestliže $T(n)$ konverguje v pravděpodobnosti k θ, tedy pro každé $\epsilon > 0$ je $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|T(n) - \theta| < \epsilon) = 1$.

Věrohodnost odhadů

Věta 196.

Nechť $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T(n)) = \theta$ *a* $\lim_{n\to+\infty} Var(T(n)) = 0$. *Pak* $T(n)$ *je konzistentním odhadem* θ.

Důkaz.

Čebyševova nerovnost dává

$$\mathbb{P}\left(|T(n) - \mathbb{E}(T(n))| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{Var(T(n))}{\epsilon^2}.$$

Z $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T(n)) = \theta$ pro dostatečně velká n platí

$$\mathbb{P}(|T(n) - \theta| < 2\epsilon) \geq \mathbb{P}(|T(n) - \mathbb{E}(T(n))| < \epsilon) \geq 1 - \frac{Var(T(n))}{\epsilon^2}.$$

□

Příklad 197.

Jednoduchým příkladem použití věty je rozptyl

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{n-1}{n}S_n^2, \qquad \text{neboť} \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2.$$

Podle Věty 190 je $\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2$, a tedy S_n^2 je nestranným odhadem, přičemž $\hat{\sigma}^2$ nestranným odhadem není.

Avšak $\lim_{n\to+\infty} \hat{\sigma}^2 = \sigma^2$ a

$$\lim_{n\to+\infty} var(\hat{\sigma}^2) = \lim_{n\to+\infty} var(S_n^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0.$$

S_n^2 je tedy konzistentním odhadem rozptylu.

Věrohodnost odhadů

- Pro stejný parametr můžeme mít k dispozici mnoho nestranných odhadů.
  - Třeba aritmetický průměr $\overline{X}$ je nestranným odhadem střední hodnoty θ rozdělení veličin X_i.
  - Hodnota X_1 je také nestranným odhadem θ.
- Jaký je nejlepší odhad T mezi uvažovanými statistikami, které jsou nestrannými nebo konzistentními odhady?
  - Zpravidla je nejlepší odhad ten, který má ze všech uvažovaných odhadů nejmenší možný rozptyl.

Maximální věrohodnost

- Máme výběr, kde komponenty mají hustotu $f(x, \theta)$ závislou na neznámém (vektorovém) parametru θ.
- Z nezávislosti pro sdruženou hustotu vektoru $(X_1, \ldots, X_n)$ platí

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \cdots f(x_n, \theta);$$

  nazýváme ji věrohodnostní funkce.
- Hledáme hodnotu $\hat{\theta}$, která na množině dostupných hodnot parametru maximalizuje věrohodnostní funkci.
  - V diskrétním případě to znamená, že vybíráme takový parametr, při kterém vychází největší pravděpodobnost zjištěného výběru.

Maximální věrohodnost

- Zpravidla pracujeme s tzv. logaritmickou věrohodnostní funkcí

$$\ell(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \ln f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta),$$

neboť z monotonicity ln je maximalizace věrohodnostní funkce ekvivalentní maximalizaci logaritmické věrohodnostní funkce.

- Pokud je pro nějaké hodnoty $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, klademe $\ell(x_1, \ldots, x_n, \theta) = -\infty$.
- Pro diskrétní NV použijeme pravděpodobnostní funkci místo hustoty, tj.

$$\ell(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln(P(X_i = x_i|\theta)).$$

Příklad 198.

Uvažme náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ o rozsahu n. Neznámé parametry jsou μ nebo σ, nebo oba. Uvažovaná hustota je

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a logaritmováním

$$\ell(x, \mu, \sigma) = -n\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

Maximum pomocí derivací (σ^2 chápeme jako proměnnou): $\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}(-n\mu + \sum_{i=1}^{n} x_i)$ a $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\left(-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)$. Kritické body jsou $\hat{\mu} = \overline{x}$ a $\hat{\sigma}^2 = S_n^2$. Dá se ověřit, že jde o jediné (a tedy globální) maximum.

Střední hodnota a rozptyl jsou tedy maximálně věrohodné odhady pro μ a σ.

Testování hypotéz

Testování hypotéz

- Mějme dán náhodný vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ (vzniklý z náhodného výběru) se sdruženou distribuční funkcí $F_X(x)$.
- Hypotéza je tvrzení o rozdělení určeném touto distribuční funkcí.
  - Zpravidla formulujeme dvě hypotézy:
    - nulovou hypotézu H_0 a
    - alternativní hypotézu H_A.
  - Výsledkem testu je rozhodnutí založené na konkrétní realizaci NV X, zda hypotézu H_0 zamítnout ve prospěch hypotézy H_A.

Testování hypotéz

- Vznikají chyby dvou typů:
  1. zamítneme H_0, přestože je platná
  2. nezamítneme H_0, ačkoliv není platná.
- Rozhodování probíhá tak, že vybereme tzv. kritický obor W, tedy množinu výsledků realizace testu, při kterých hypotézu zamítáme
  - Velikost kritického oboru volíme tak, aby platnou hypotézu zamítal s pravděpodobností nejvýše α.
  - Předem požadujeme dané ohraničení pravděpodobnostní chyby prvního typu tzv. hladinu testu α.
  - Často se volí hladiny testů $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$.
- Prakticky užitečný je také postup, kdy určíme nejnižší možnou hladinu p testu, při které ještě hypotézu zamítáme a mluvíme o dosažené hladině testu, resp. p-hodnotě testu.

Kritický obor

- Jak volit kritické obory, abychom co nejvíce omezili výskyt chyby druhého typu?
  - Pomocí věrohodnostní funkce $f(x, \theta)$.
- Pro jednoduchost mějme jednorozměrný parametr θ, pro dvě konkrétní hodnoty $\theta_0 \neq \theta_1$.
  - Formulujme nulovou hypotézu tak, že rozdělení X je dáno funkcí $f(x, \theta_0)$ a alternativní hypotézu tak, že rozdělení X je dáno funkcí $f(x, \theta_1)$.
  - Po dosazení hodnot konkrétního pokusu do věrohodnostní funkce budeme hypotézu přijímat, pokud je $f(x, \theta_0)$ výrazně větší než $f(x, \theta_1)$.
- Pro každou konstantu $c > 0$ uvažme kritický obor

$$W_c = \{x \mid f(x, \theta_1) \geq c \cdot f(x, \theta_0)\}.$$

- Jakmile zvolíme hladinu testu α, budeme chtít takové c, aby platilo $\int_{W_c} f(x, \theta_0) = \alpha$.
  - Pak se pro výsledek testu $x \in W_c$ při platnosti H_0 dopustíme maximálně předepsané chyby prvního typu.
- Neymanovo-Pearsonovo lemma říká, že W_c je optimální kritický obor, který na předepsané úrovni minimalizuje chybu druhého typu.

Příklad 199.

- Dřívější intervalový odhad je speciálním případem testování hypotéz, kdy
  - H_0 je „střední hodnota spokojenosti studentů zůstala μ_0“ a
  - H_A je že poklesla na $\mu_1 < \mu_0$ (pouze jednostranný intervalový odhad).
- Předchozí postup vede na kritický obor zadaný požadavkem

$$|Z| = \left| \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| \geq z(\alpha/2).$$

Příklad 199 (pokračování).

- Kritický obor z Neymanova-Pearsonova lemmatu je určen nerovností

$$\frac{f(x,\mu_1,\sigma^2)}{f(x,\mu_0,\sigma^2)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}((x_i-\mu_1)^2-(x_i-\mu_0)^2)} \geq c.$$

- Logaritmování dává

$$2\overline{x}(\mu_1-\mu_0) - (\mu_1^2-\mu_0^2) \geq \frac{2\sigma^2}{n}\ln c.$$

A protože $\mu_1 < \mu_0$, máme

$$x \leq \frac{\mu_1+\mu_0}{2} + \frac{\sigma^2}{n(\mu_1-\mu_0)}\ln c = y.$$

Příklad 199 (pokračování).

- Konstantu c (a parametr y) pro hladinu α máme určenu tak, aby za předpokladu platnosti hypotézy H_0 platilo

$$\alpha = \mathbb{P}(\overline{X} \leq y) = \mathbb{P}(Z \leq \frac{y - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}).$$

- Z předpokladu platnosti hypotézy H_0 dostaneme $Z \sim N(0, 1)$, a proto

$$Z \leq -z(\alpha),$$

  což jednoznačně určuje optimální W_c.

Příklad 199 (pokračování).

- V našem příkladu máme
  - $H_0 : \mu = 6$
  - $H_A : \mu < 6$
  - $\sigma^2 = 4$.
- Test s $n = 15$ dal $x \doteq 5,133$.
- Dosazením dostaneme

$$Z \doteq \sqrt{15}(5,133 - 6)/2 = -1,679$$

zatímco

$$-z(0,05) \doteq -1,645.$$

- Hypotézu tedy na hladině 5 % zamítáme a usuzujeme, že skutečně došlo ke zhoršení názoru studentů.

- Pokud si za kritický obor zvolíme sjednocení oborů pro případy $\mu_1 < \mu_0$ a $\mu_1 > \mu_0$, dostaneme právě výsledek shodný s intervalovým odhadem dříve.

Lineární modely

Lineární modely s úplnou hodností

Uvažme náhodný vektor $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ a předpokládejme, že

$$Y = X\beta + \sigma Z,$$

kde

- $X = (x_{ij})$ je konstantní matice reálných čísel s n řádky a $k < n$ sloupci a hodností k,
- β je neznámý konstantní vektor mající k parametrů,
- Z je náhodný vektor, jehož n komponent má rozdělení $N(0, 1)$ a
- $\sigma > 0$ je neznámý kladný parametr.

Metoda nejmenších čtverců

- Často známe x_{ij} a snažíme se odhadnout hodnotu Y
  - x_{ij} může být hodnocení i-tého studenta v j-tém semestru, $j = 1, 2, 3$, a zajímá nás jeho hodnocení ve čtvrtém semestru.
- K tomu potřebujeme vektor β. K odhadu β se používá metoda nejmenších čtverců.
  - V ní hledáme $b \in \mathbb{R}^k$ tak, aby vektor $\hat{Y} = Xb$ minimalizoval

$$\|Y - X\beta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j \right)^2 .$$

  - Jedná se o nalezení kolmého průmětu Y do podprostoru $\langle X \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ generovaného sloupci matice X.
    - Zvolme lib. ortonormální bázi vektorového podprostoru $\langle X \rangle$ a napišme ji do sloupců matice P.
    - Pro takovou bázi bude kolmý průmět realizován násobením maticí PP^T, tedy

$$\hat{Y} = PP^T Y = PP^T(X\beta + \sigma Z) = X\beta + \sigma PP^T Z.$$

Metoda nejmenších čtverců

- Nyní doplníme bázi ze sloupců v P na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^n$. Vytvoříme tedy matici

$$Q = (P\ R)$$

  vepsáním nově přidaných vektorů báze do matice R s $(n-k)$ sloupci a n řádky.
- Označme $V = P^T Z$ a $U = R^T Z$ náhodné vektory s k a $(n-k)$ komponentami.
  - U a V jsou vzájemně kolmé a jejich součtem v $\mathbb{R}^n$ dostaneme vektor $(V^T U^T)^T = Q^T Z$.
- Náhodný vektor Y rozložíme na součet konstantního vektoru $X\beta$ a dvou kolmých projekcí

$$Y = X\beta + \sigma PV + \sigma RU.$$

- Hledaný kolmý průmět je součet prvních dvou sčítanců.

- Velikost $\|Y - \hat{Y}\|^2$ nazýváme reziduální součet čtverců, zpravidla se značí RSS.
- Definujeme také reziduální rozptyl jako

$$S^2 = \frac{\|Y - Xb\|^2}{n-k}.$$

Metoda nejmenších čtverců

- Z $\hat{Y} = Xb$ a z toho, že matice $X^T X$ je invertibilní, máme

$$b = (X^T X)^{-1} X^T \hat{Y}.$$

- Zároveň máme $X^T(Y - \hat{Y}) = \sigma X^T(RU) = 0$, odkud

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

- Navíc existuje čtvercová matice T taková, že $X = PT$.
- Celkem

$$b = (T^T P^T PT)^{-1} T^T P^T Y = T^{-1}(T^T)^{-1} T^T P^T (PT\beta + \sigma Z) = \beta + \sigma T^{-1} V.$$

Věta 200.

Uvažujme lineární model $Y = X\beta + \sigma Z$.

- *Pro odhad* $\hat{Y}$ *platí* $\hat{Y} = X\beta + \sigma PV$ *a* $\hat{Y} \sim N(X\beta, \sigma^2 PP^T)$.
- *Reziduální součet čtverců RSS a normovaný čtverec velikosti rezidua mají rozdělení* $Y - \hat{Y} \sim N(0, \sigma^2 RR^T)$ *a* $\|Y - \hat{Y}\|^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$.
- *Náhodná veličina* $b = \beta + \sigma T^{-1} V$ *má rozdělení* $b \sim N(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$.
- *Pro reziduální rozptyl platí* $(n-k)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$.
- *Střední hodnota reziduálního rozptylu je* $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$.
- *Veličiny* b *a* S^2 *jsou nezávislé.*

Lineární podmodely

- Náhodný vektor Y splňuje podmodel, pokud

$$Y = X\beta + \sigma Z \quad \text{a} \quad Y = X^0\beta^0 + \sigma Z,$$

kde X^0 má $q < k$ sloupců a sloupce X^0 generují podprostor v $\langle X \rangle$, tj. jsou lineárními kombinacemi sloupců v X.

- Zvolme matici P tak, aby prvních q sloupců generovalo $\langle X^0 \rangle$.
- Pak $P = (P^0 P^1)$ a $V = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P^0)^T Z \\ (P^1)^T Z \end{pmatrix}$
- Dostáváme tak jemnější rozklad vektorů a jejich velikostí a příslušných reziduí:

$$\begin{aligned} \hat{Y}^0 &= P^0 (P^0)^T Y = X^0\beta^0 + \sigma P^0 V^0 \\ Y - \hat{Y}^0 &= \sigma P^1 V^1 + \sigma R U \\ \|Y - \hat{Y}^0\|^2 &= \sigma^2 \|V^1\|^2 + \sigma^2 \|U\|^2 (RSS^0 - RSS)/\sigma^2 = \|V^1\|^2. \end{aligned}$$

Lineární podmodely

- Normovaný rozdíl reziduí má tedy rozdělení χ^2_{k-q}.
- Statistika F zadaná jako relativní rozdíl reziduí má Fischerovo-Snedecorovo rozdělení

$$F = \frac{(RSS^0 - RSS)/(k-q)}{RSS/(n-k)} \sim F_{k-q,n-k}.$$

- V praxi neznáme parametr σ a nahrazujeme ho proto odhadem S^2.
- Místo jednotlivých složek $b_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 c_{jj})$ náhodného vektoru b (kde c_{jj} jsou diagonální prvky v matici $C = (X^T X)^{-1}$), pracujeme se statistikami

$$T_j = \frac{b_j - \beta_j}{S\sqrt{c_{jj}}} \sim t_{n-k},$$

přičemž tyto veličiny již nemusí být nezávislé.

Jednovýběrový t-test

- Uvažme případ, kdy testujeme, zda jediný parametr β je roven dané hodnotě β_0.
- Můžeme zvolit matici X s jediným sloupcem plným jedniček.
- Výraz $Y = X\beta + \sigma Z$ značí, že jednotlivé komponenty v Y jsou nezávislé veličiny $Y_i \sim N(\beta, \sigma^2)$. Jedná se tedy o náhodný výběr rozsahu n z normálního rozdělení.
- Pak

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \| Y - X\overline{Y} \|^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2,$$

  což jsou výběrový průměr a rozptyl.
- Zajímavá je v tomto kontextu statistika $T = \frac{\overline{Y} - \beta_0}{S} \sqrt{n}$.
- Testování hypotézy $\beta = \beta_0$ se nazývá jednovýběrový t-test.
- Na hladině α hypotézu zamítáme, pokud $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$.

Párový t-test

- Párový t-test je vhodný na testování dvojice náhodných vektorů $W_1 = (W_{i1})$ a $W_2 = (W_{i2})$, kde $Y_i = W_{i1} - W_{i2}$ mají rozdělení $N(\beta, \sigma^2)$.
  - Potřebujeme, aby Y_i byly nezávislé,
    - což neříká, že musí být nezávislé jednotlivé dvojice W_{i1} a W_{i2}!
    - Můžeme si například představit hodnocení dvou různých vyučujících týmž studentem.
- Testujeme-li hypotézu, že pro všechna i je $\mathbb{E}[W_{i1}] = \mathbb{E}[W_{i2}]$, používáme statistiku

$$T = \frac{\overline{W_1} - \overline{W_2}}{S}\sqrt{n}.$$

Lineární regrese

Lineární regrese

- Standardním příkladem užití lineární regrese je proložení přímky danými daty.
- Máme posloupnost měření, ve kterých zaznamenáváme hodnoty dvou veličin u nichž předpokládáme lineární závislost.
  - Klasickým příkladem je závislost výšky syna na výšce otce.

Regresní přímka

- Předpokládáme, že veličiny $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$, kde x_i jsou dané konstanty, $i = 1, \ldots, n$.
- Hledáme nejlepší aproximaci $Y_i = b_0 + b_1 x_i$.
- Matice X příslušného lineárního modelu je

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

- Odtud

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \overline{x} \\ n\overline{x} & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n\overline{Y} \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \end{pmatrix},$$

a proto

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \quad \text{a} \quad b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{x}.$$

Příklad 201.

Určete lineární regresní model pro závislost veličiny Y na veličině X na základě naměřených seznamů dat: $X = [1, 4, 5, 7, 10]$, $Y = [3, 7, 8, 12, 18]$.

Regresní přímka

- Lze odvodit

$$Var(b_1) = \sigma^2 / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

- Pro testování hypotézy, zda střední hodnota veličiny Y nezávisí na x, tj. H_0 je tvaru $\beta_1 = 0$, můžeme použít statistiku

$$T = \frac{b_1}{S} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right)^{1/2} \sim t_{n-2}.$$

Regresní přímka

- Obdobně vypadá statistická analýza vícenásobné regrese, kde máme několik sad hodnot x_{ij} a vyhodnocujeme statistickou relevanci aproximace

$$Y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + \cdots + b_k x_{ki}.$$

- Jednotlivé statistiky T_j umožňují t-test závislosti regrese na jednotlivých parametrech.
- Softwarové balíčky zpravidla uvádí také parametr vyjadřující, jak dobře jsou celkově hodnoty Y_i aproximovány.
  - Tento parametr se nazývá koeficient determinace $R^2 = 1 - \frac{RSS}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$.

Příklad 202 (kvadratická regrese).

Orbitální stanice naměřila v pěti po sobě jdoucích dnech, ve stejnou hodinu následující rychlosti neznámého vesmírného tělesa (v km/s): 10, 11,4, 13,1, 15,8 a 18,7. Odhadněte rychlost tělesa desátého dne.

Bayesovské odhady

Bayesovské odhady

- Vraťme se k příkladu hodnocení studenty
- Zjištěná data $X_1, \ldots, X_{15}$ budeme chápat jako konstanty.
  - $X_1, \ldots, X_{15}$ jsou body vyjadřující spokojenost dotázaných studentů na škále $1 - 10$.
  - Parametr μ (střední hodnota bodů) bude NV, jejíž rozložení chceme odhadnout.
- Má-li vektor (X, θ) sdruženou hustotu $f(x, \theta)$, pak podmíněná pravděpodobnost θ za podmínky $X = x$ je dána hustotou

$$g(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)g(\theta)}{f(x)},$$

  kde $f(x)$ a $g(\theta)$ jsou marginální hustoty pravděpodobností.
- Pokud známe apriorní hustotu $g(\theta)$ odhadovaného parametru θ a $f(x|\theta)$, můžeme určit aposteriorní hustotu $g(\theta|x)$.

Bayesovské odhady

- Předpokládejme, že spokojenost studentů v jednotlivých předmětech je NV $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ a apriorní parametr θ dosahovaný učiteli je náhodná veličina $\theta \sim N(a, b)$. Pak aposteriorní parametr

$$\theta \sim N\left(\frac{b^2}{b^2+\sigma^2}x + \frac{\sigma^2}{b^2+\sigma^2}a, \frac{b^2\sigma^2}{b^2+\sigma^2}\right).$$

  - Když z dlouhodobého vyhodnocování anket známe parametry a, b, σ, můžeme po vyjádření nějakého studenta upřesnit apriorní představu o parametrech pro jeden konkrétní předmět

- V odhadu rozložení je pak střední hodnota dána váženým průměrem zjištěné hodnoty x a apriorně předpokládané střední hodnoty a v závislosti na rozptylech σ a b.

Interpretace v Bayesovské statistice

- V klasické statistice jsme pracovali s výběrovým průměrem $\overline{X}$ výsledku šetření.
  - Ten můžeme použít i v předchozím výpočtu, protože jde opět o normální rozdělení, jen budeme místo σ^2 dosazovat σ^2/n.
  - Pro zjednodušení zápisu definujme konstantu $c_n = \frac{nb^2}{nb^2+\sigma^2}$.
  - Pak aposteriorní odhad pro θ na základě zjištění výběrového průměru $\overline{X}$ má rozložení s parametry
$$\theta \sim N(c_n\overline{X} + (1-c_n)a, c_n\sigma^2/n).$$
    - Pro rostoucí n se bude střední hodnota našeho rozdělení pro θ stále více blížit výběrovému průměru a jeho rozptyl půjde k nule.
    - Čím je tedy n větší, tím více se blížíme bodovému odhadu z frekvencionalistického přístupu.

Interpretace v Bayesovské statistice

Přínosem Bayesovského přístupu je, že s použitím odhadnutého rozdělení můžeme odpovídat na dotazy typu „s jakou pravděpodobností je nový vyučující horší než předchozí?“

Příklad 203.

- Použijeme stejná data jako dříve a přidáme potřebné apriorní údaje.
- Předpokládejme, že $a = 7,5$, $b = 2,5$ a směrodatná odchylka $\sigma = 2$.
- Měli jsme $n = 15$ a výběrový průměr $5,133$.
- Dosazením dostaneme aposteriorní odhad pro rozdělení $\theta \sim N(5,230; 0,256)$.
- Pak $\mathbb{P}(\theta < 6) = 0,936$.
- Odpověď je tedy podobná jako v případě předpokladu o konstantním známém rozptylu.