Úvod do informatiky

přednáška devátá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle učebního textu prof. Bělohlávka:
Úvod do informatiky, KMI UPOL, Olomouc 2008

Obsah

Obsah

Princip inkluze a exkluze

Princip inkluze a exkluze je často používaný kombinatorický princip, který udává počet prvků sjednocení několika množin pomocí počtu prvků průniku jednotlivých množin.

Věta: princip inkluze a exkluze

Pro množiny $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \Big|\bigcap_{i \in I} A_i\Big|.$$

Příklad

Ve městě M. fungují tři kluby. Tenisový klub má 20 členů, kriketový klub 15 členů a egyptologický klub je osmičlenný. Přitom z egyptologů jsou 2 hráči tenisu a 3 hráči kriketu, tenis a kriket zároveň provozuje 6 lidí, a jediná obzvláště agilní osoba je ve všech třech klubech. Kolik osob se celkem účastní klubového života v M.?

Řešení: $|T \cup K \cup E| =$

$= |T| + |K| + |E| - |T \cap K| - |T \cap E| - |K \cap E| + |T \cap K \cap E| =$

$= 20 + 15 + 8 - 6 - 2 - 3 + 1 = 33.$

Klubového života ve městě M. se účastní 33 osob.

Obsah

Představme si, že se koná nějaký pokus, který skončí jedním z výsledků $e_1, \ldots, e_n$. Výsledkům $e_1, \ldots, e_n$ říkáme **elementární jevy**. Předpokládáme, že každý z výsledků $e_1, \ldots, e_n$ má stejnou šanci, tj. elementární jevy jsou stejně pravděpodobné.
Jev je každá podmnožina $A \subseteq \{e_1, \ldots, e_n\} = E$.
Pravděpodobnost $P(A)$ **jevu** A je dána vztahem

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|},$$

tedy je to počet všech výsledků příznivých jevu A ku počtu všech možných výsledků.
Pravděpodobnost může nabývat reálných hodnot od 0 do 1; přitom 0 je pravděpodobnost **nemožného jevu**, 1 je pravděpodobnost **jistého jevu**.

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne

a) šestka,
b) číslo větší než jedna,
c) sudé číslo,
d) číslo deset,
e) číslo menší než deset?

Řešení: Zřejmé.

Příklad

Hodíme dvěmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

a) na obou kostkách padne šestka,
b) na obou kostkách padne liché číslo,
c) bude součet bodů na kostkách menší než šest?

Řešení: Zřejmé.

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne

a) šestka,
b) číslo větší než jedna,
c) sudé číslo,
d) číslo deset,
e) číslo menší než deset?

Řešení: Zřejmé.

Příklad

Hodíme dvěmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

a) na obou kostkách padne šestka,
b) na obou kostkách padne liché číslo,
c) bude součet bodů na kostkách menší než šest?

Řešení: Zřejmé.

Příklad

Hodíme třikrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne právě jednou šestka,

b) padne alespoň jednou šestka?

Řešení: Jednoduché,

a) $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{72}$,

b) $1 - (\frac{5}{6})^3 = \frac{91}{216}$.

Příklad

Z přirozených čísel 1 až 50 vybereme náhodně jedno číslo. S jakou pravděpodobností bude vybrané číslo

a) dělitelné šesti,

b) dělitelné šesti a osmi?

Řešení: Zřejmé.

Příklad

Hodíme třikrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne právě jednou šestka,

b) padne alespoň jednou šestka?

Řešení: Jednoduché,

a) $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{72}$,

b) $1 - (\frac{5}{6})^3 = \frac{91}{216}$.

Příklad

Z přirozených čísel 1 až 50 vybereme náhodně jedno číslo. S jakou pravděpodobností bude vybrané číslo

a) dělitelné šesti,

b) dělitelné šesti a osmi?

Řešení: Zřejmé.

Příklad

Krychli o délce hrany 3 cm obarvíme červenou barvou a potom ji rozřežeme na krychličky o délce hrany 1 cm. Všechny malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme jednu z nich. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná krychlička

a) bude mít obarvené právě 3 strany,
b) bude mít obarvené právě 2 strany,
c) bude mít obarvenou právě 1 stranu,
d) nebude mít obarvenou žádnou stranu?

Řešení: Jednoduché.

Příklad

Máme k dispozici 36 dobrých výrobků a 4 zmetky. Vybereme namátkou 9 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky budou právě 2 nebo 3 zmetky?

Řešení: Jednoduché.

Příklad

Krychli o délce hrany 3 cm obarvíme červenou barvou a potom ji rozřežeme na krychličky o délce hrany 1 cm. Všechny malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme jednu z nich. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná krychlička

a) bude mít obarvené právě 3 strany,
b) bude mít obarvené právě 2 strany,
c) bude mít obarvenou právě 1 stranu,
d) nebude mít obarvenou žádnou stranu?

Řešení: Jednoduché.

Příklad

Máme k dispozici 36 dobrých výrobků a 4 zmetky. Vybereme namátkou 9 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky budou právě 2 nebo 3 zmetky?

Řešení: Jednoduché.

Obsah

Algoritmus je přesný návod či postup, kterým lze vyřešit daný typ úlohy. (Algoritmem rozumíme předpis pro řešení „nějakého“ problému. Algoritmem je například předpis pro konstrukci trojúhelníka pomocí pravítka a kružítka ze tří daných prvků nebo třeba algoritmus pro setřídění posloupnosti čísel.)

Algoritmus obsahuje

1) hodnoty vstupních dat
2) předpis pro řešení
3) požadovaný výsledek, tj. výstupní data.

Pro zpřesnění pojmu algoritmus tedy dodejme: je to předpis, který se skládá z kroků a který zabezpečí, že na základě vstupních dat jsou poskytnuta požadovaná data výstupní.

Základní vlastnosti algoritmů

- **konečnost** (finitnost)
  každý algoritmus musí skončit v konečném počtu kroků (v praxi je navíc chtěno, aby požadovaný výsledek byl poskytnut v „rozumném“ čase, ne za milion let)
- **jednoznačnost** (determinovanost)
  každý krok algoritmu musí být jednoznačně a přesně definován (v každé situaci musí být jasné, co a jak se má provést, jak má provádění algoritmu pokračovat)
- **obecnost** (hromadnost)
  algoritmus neřeší jen jeden konkrétní problém, ale celou třídu obdobných problémů (např. nejen jak spočítat $2 \cdot 6$, ale např. jak obecně spočítat součin dvou celých čísel).

K dalším vlastnostem algoritmů patří:
rezultativnost – algoritmus při zadání vstupních dat vždy vrátí nějaký výsledek (např. chybové hlášení);
korektnost – výsledek vydaný algoritmem musí být správný;
opakovatelnost – při použití stejných vstupních údajů musí algoritmus dospět vždy ke stejnému výsledku.

Příklady algoritmů: Erathostenovo síto, Eukleidův algoritmus, Dijkstrův algoritmus, dělení mnohočlenů, vyřešení kvadratické rovnice, ...

Poznámka: Algoritmus můžeme chápat jako „mlýnek na data“. Nasypeme-li do něj správná data a zameleme, obdržíme požadovaný výsledek. (Uvědomme si, že kvalita mlýnku může být různá – časová náročnost, paměťová náročnost, bude dále.)

Některé druhy algoritmů 1/2

- rekurzivní algoritmy – využívají (volají) sami sebe
- hladové algoritmy – k řešení se propracovávají po jednotlivých rozhodnutích, která jsou nevratná; např. Kruskalův algoritmus pro hledání minimální kostry grafu
- algoritmy typu rozděl a panuj – dělí problém na menší podproblémy až po triviální podproblémy (které lze vyřešit přímo), dílčí řešení pak vhodným způsobem sloučí
- pravděpodobnostní algoritmy – provádějí některá rozhodnutí náhodně či pseudonáhodně
- paralelní algoritmy – rozdělení úlohy (třeba) mezi více počítačů
- genetické algoritmy – pracují na základě napodobování evolučních procesů, postupným „pěstováním“ nejlepších řešení pomocí mutací a křížení

Některé druhy algoritmů 2/2

- algoritmy dynamického programování – postupně řeší části problému od nejjednodušších po složitější s tím, že využívají výsledky již vyřešených jednodušších podproblémů
- heuristické algoritmy – nekladou si za cíl nalézt přesné řešení, ale pouze nějaké vhodné přiblížení; používají se v situacích, kdy dostupné zdroje (např. čas) nepostačují na využití exaktních algoritmů (nebo pokud nejsou žádné exaktní algoritmy vůbec známy)

Poznámka: Jeden algoritmus může patřit zároveň do více skupin; např. quicksort s rekurzí je současně rekurzivní a typu rozděl a panuj.

Později (až definujeme potřebné pojmy) si ukážeme dva příklady algoritmů z teorie grafů (diskrétní matematika) a to Dijkstrův algoritmus a Kruskalův (hladový) algoritmus.