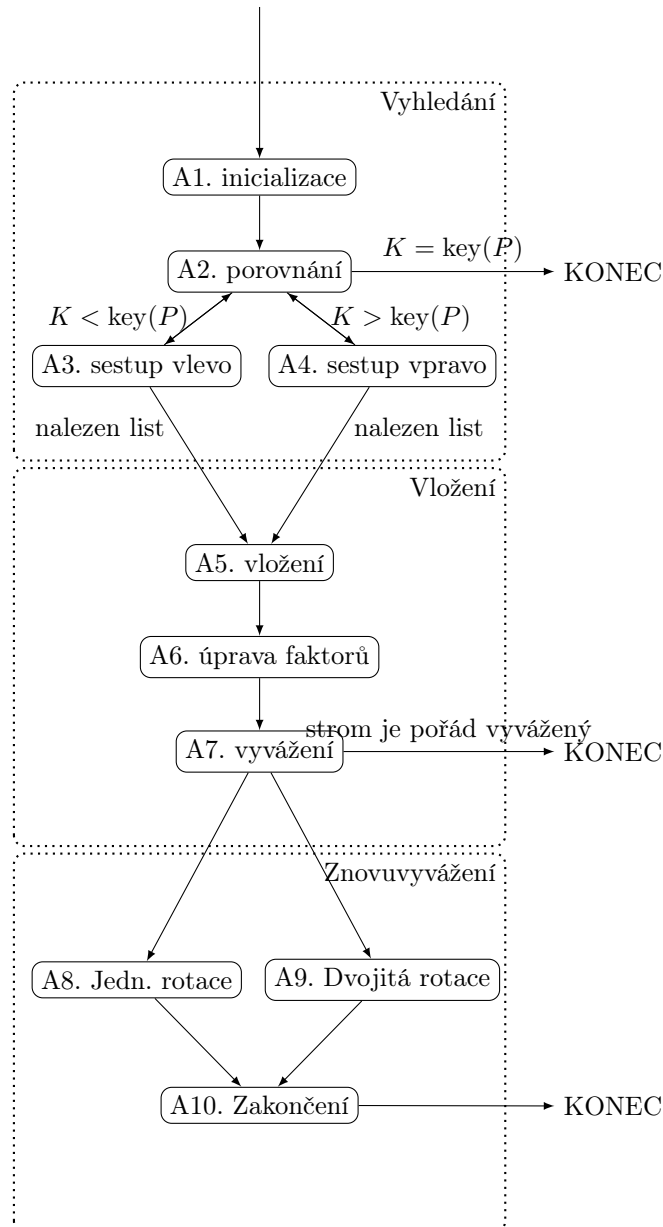


ALS1 – Přednáška 4

1 Vkládání do AVL-stromu



Algoritmus

P se bude pohybovat ve stromě směrem dolů.
 S bude ukazovat, kde by mohlo být nutné vyvažování.
 T bude vždycky rodič S .
head je „hlavička“,
right(head) ukazuje na kořen.

Vstup: neprázdný AVL-strom, klíč K

A1 [inicializace]

$T \leftarrow \text{head}$

$S \leftarrow \text{right}(\text{head})$

$P \leftarrow \text{right}(\text{head})$

A2 [porovnání]

```
if  $K < \text{key}(P)$  then
| continue A3
else if  $K > \text{key}(P)$  then
| continue A4
else if  $K = \text{key}(P)$  then
| terminate
end
```

A3 [pohyb vlevo]

```
 $Q \leftarrow \text{left}(P)$ .
if  $Q = \text{NIL}$  then
|  $Q \leftarrow \text{alloc}$ 
|  $\text{left}(P) \leftarrow Q$ 
| continue A5
else
| if  $B(Q) \neq 0$  then
| |  $T \leftarrow P$ 
| |  $S \leftarrow Q$ 
| | end
| |  $P \leftarrow Q$ 
| | continue A2
end
```

A4 [pohyb vpravo]

```
 $Q \leftarrow \text{right}(P)$ 
if  $Q = \text{NIL}$  then
|  $Q \leftarrow \text{alloc}$ 
|  $\text{right}(P) \leftarrow Q$ 
| continue A5
else
| if  $B(Q) \neq 0$  then
| |  $T \leftarrow P$ 
| |  $S \leftarrow Q$ 
| | end
| |  $P \leftarrow Q$ 
| | continue A2
end
```

A5 [vlození]

```
 $\text{key}(Q) \leftarrow K$ 
 $\text{left}(Q) \leftarrow \text{NIL}$ 
 $\text{right}(Q) \leftarrow \text{NIL}$ 
 $B(Q) \leftarrow 0$ 
```

A6 [úprava vyvažovacích faktorů] *vyvažovací faktory na uzlech mezi S a Q musí být změněny z 0 na ±1.*

```
if  $K < \text{key}(S)$  then
|  $a \leftarrow -1$ 
else
|  $a \leftarrow 1$ 
end
 $R \leftarrow P \leftarrow \text{link}(a, S)$ 
while  $P \neq Q$  do
| if  $K < \text{key}(P)$  then
| |  $B(P) \leftarrow -1$ 
| |  $P \leftarrow \text{left}(P)$ 
| else if  $K > \text{key}(P)$  then
| |  $B(P) \leftarrow +1$ 
| |  $P \leftarrow \text{right}(P)$ 
| end
end
```

($\text{link}(a, S)$ představuje levý nebo pravý podstrom, podle toho, jestli $a = -1$ nebo $a = +1$.)

A7 [vyvažování]

```

if  $B(S) = 0$  then
  |  $B(S) \leftarrow a$ 
  |  $\text{left}(\text{head}) \leftarrow \text{left}(\text{head}) + 1$ 
  | terminate
end
if  $B(S) = -a$  then  $B(S) \leftarrow 0$ 
  terminate

if  $B(S) = a$  then
  | if  $B(R) = a$  then continue A8
  | if  $B(R) = -a$  then continue A9
end

```

A8 [jednoduchá rotace]

```

 $P \leftarrow R$ 
 $\text{link}(a, S) \leftarrow \text{link}(-a, R)$ 
 $\text{link}(-a, R) \leftarrow S$ 
 $B(S) \leftarrow B(R) \leftarrow 0$ 
  continue A10

```

A9 [dvojitá rotace]

```

 $P \leftarrow \text{link}(-a, R)$ 
 $\text{link}(-a, R) \leftarrow \text{link}(a, P)$ 
 $\text{link}(a, P) \leftarrow R$ 
 $\text{link}(a, S) \leftarrow \text{link}(-a, P)$ 
 $\text{link}(-a, P) \leftarrow S$ 

 $(B(S), B(R)) \leftarrow \begin{cases} (-a, 0), & \text{if } B(P) = a \\ (0, 0), & \text{if } B(P) = 0 \\ (0, a), & \text{if } B(P) = -a \end{cases}$ 

 $B(P) \leftarrow 0$ 
  continue A10.

```

A10 [zakončení]

```

if  $S = \text{right}(T)$  then
  |  $\text{right}(T) \leftarrow P$ 
else
  |  $\text{left}(T) \leftarrow P$ 
end

```

Abychom mohli studovat chování vkládání a vyvažovacích fází algoritmu, klasifikujeme externí uzly vyvážených algoritmů následovně:

Cesta vedoucí z externího uzlu k prvnímu uzlu, který má vyvažovací faktor 0, může být specifikována sekvencemi $+ a -$:

- $+$ pro pravý podstrom
- $-$ pro levý podstrom.

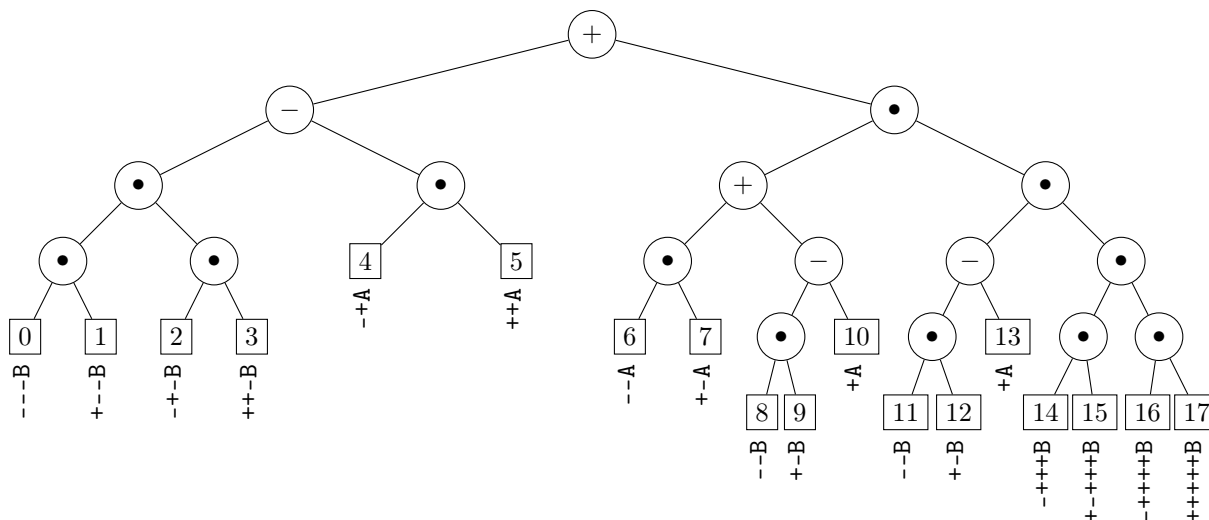
Píšeme tuto sekvenci dokud nenarazíme na uzlu s nenulovým vyvažovacím faktorem, nebo na kořen.

Poté zapíšeme A nebo B podle toho, jestli strom vzniklý umístěním nového vnitřního uzlu na místo onoho externího bude vyvážený nebo ne.

Takže:

- Specifikace končící A nepotřebuje rotaci.
- Specifikace končící $--B, ++B$ potřebuje jednoduchou rotaci.
- Specifikace končící $-+B, +-B$ potřebuje dvojitou rotaci.
- Specifikace obsahuje k znamének, je potřeba upravit $k - 1$ vyvažovacích faktorů.

Tyto specifikace ukazují základní fakta, která určují čas potřebný pro kroky A6–A10.



Empirické testy, na náhodných číslech $100 \leq n \leq 2000$ dávají odhady pravděpodobností uvedené v tabulce:

délka cesty k	bez vyvažování	jednoduchá rotace	dvojitá rotace
1	0.143	0.000	0.000
2	0.152	0.143	0.143
3	0.092	0.048	0.048
4	0.060	0.024	0.024
5	0.036	0.010	0.010
> 5	0.051	0.009	0.008

Nepřesný model

Mějme následující (nepřesný) model pro algoritmus AVL.

Předpokládejme, že p je pravděpodobnost, že vyvažovací faktor daného uzlu ve velkém stromu vybudovaném algoritmem A je 0.

Pak pravděpodobnost že tento faktor je 1 je $\frac{1}{2}(1-p)$ a pravděpodobnost že tento faktor je -1 je $\frac{1}{2}(1-p)$.

Dále uvažujme (bez odůvodnění), že vyvažovací faktory všech uzlů jsou nezávislé.

Pak pravděpodobnost, že krok A6 nastaví přesně $k-1$ vyvažovacích faktorů na nenulovou hodnotu je $p^{k-1}(1-p)$ takže průměrná hodnota k je $1/(1-p)$.

Pravděpodobnost, že musíme zrotovat část stromu je $q \approx \frac{1}{2}$.

Vložení nového uzlu by mělo zvýšit počet vyvážených uzlů o p – toto číslo je zvýšeno

- o 1 v kroku A5,
- o $-p/(1-p)$ v kroku A6
- o q v kroku A7
- o $2q$ v kroku A8 nebo A9

takže bychom měli mít

$$p = 1 - p/(1-p) + 3q \approx 5/2 - p/(1-p).$$

Řešení p dává

$$p \approx \frac{9 - \sqrt{41}}{4} \quad 1/(1-p) \approx 2.851.$$

(víceméně ve shodě s tou tabulkou s pravděpodobnostmi)