

Kapitola 3

Varianty Turingova stroje

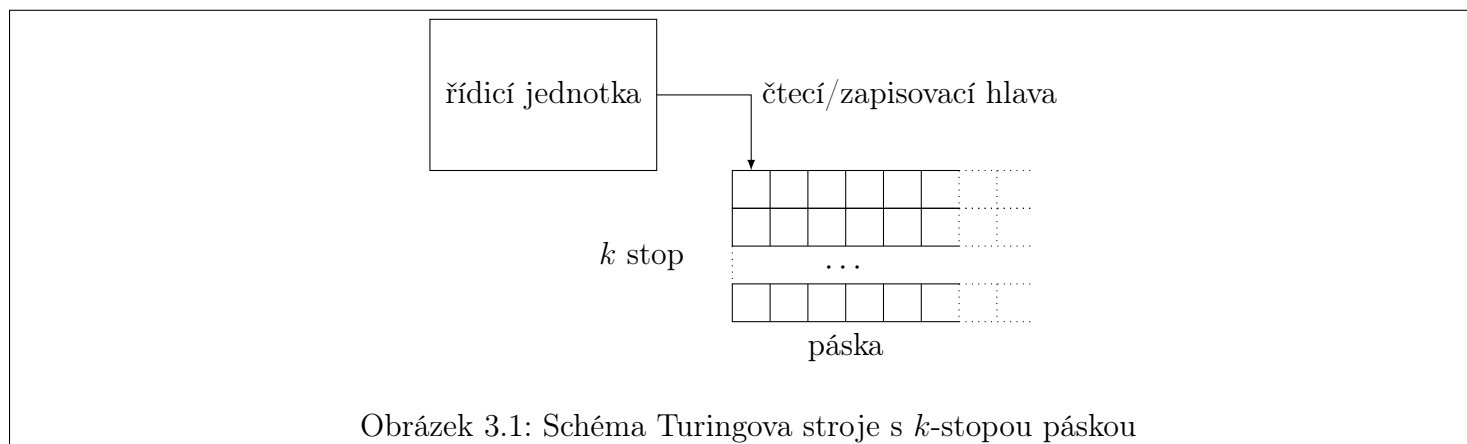
3.1 Programovací techniky

V této kapitole se budeme věnovat několika variantám TS: TS s oboustranně nekonečnou páskou, TS s k páskami a lineárně ohraničeným automatům.

Nejprve si ale představíme dvě programovací techniky, které nám usnadní uvažování o Turingových strojích.

3.1.1 Složené páskové symboly

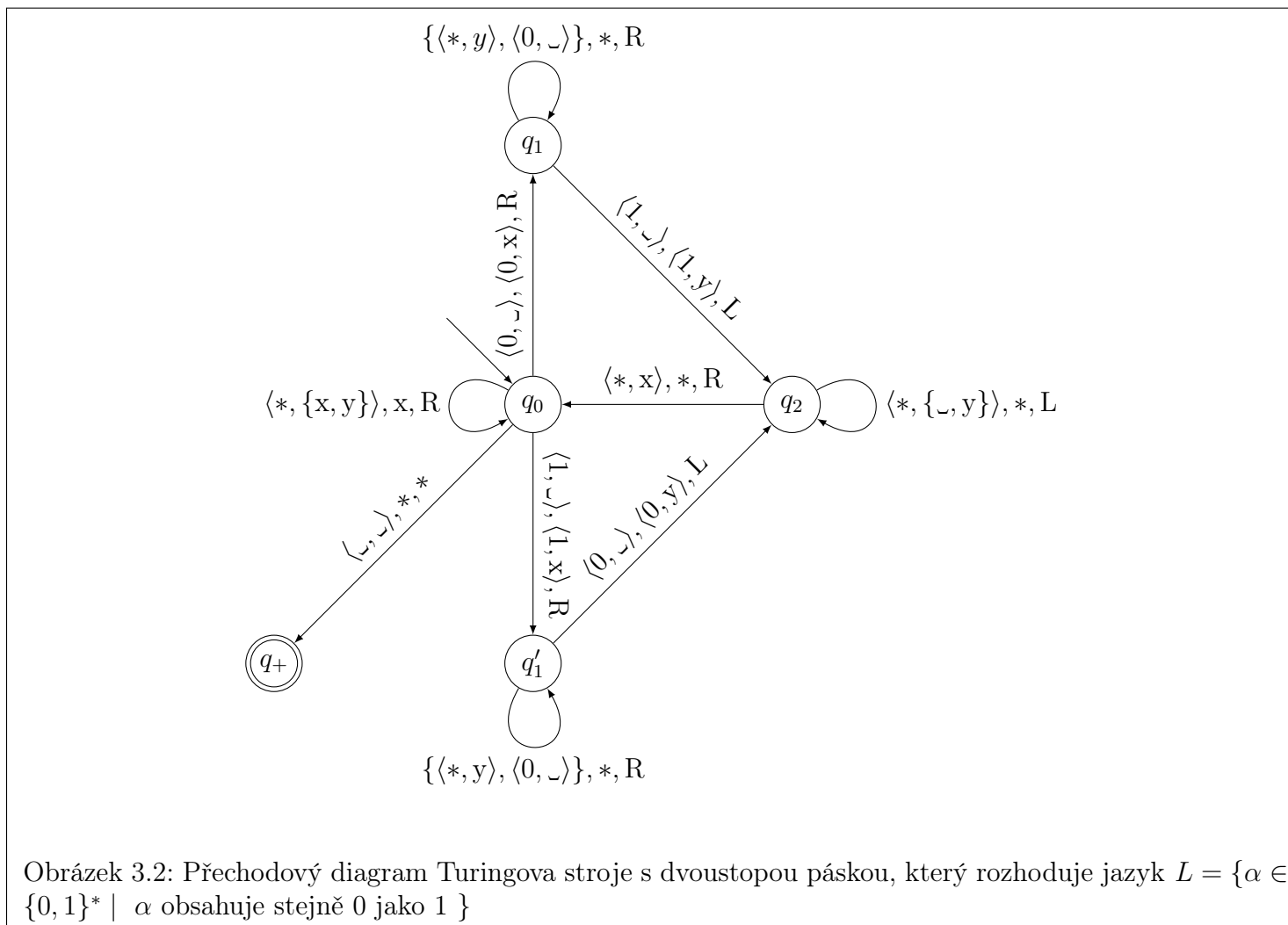
Uvažujme, že symboly páskové abecedy Γ jsou prvky kartézského součinu $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$. Vstupní abeceda je pak $\Sigma = \Sigma_1 \times \{\sqcup\}^{k-1}$, kde $\Sigma_1 \subset \Gamma_1$ a $\sqcup \notin \Sigma_1$ a prázdný symbol v Γ je pak k -tice $\langle \sqcup, \dots, \sqcup \rangle$. Takto můžeme uvažovat Turingův stroj s páskou rozdělenou na k -stop (obr. 3.1).



Příklad 5. Vrátime se k Turingově stroji z příkladu 1. Ten stroj postupně přepisoval symboly 0,1 na symboly x, y , které představovaly spárované symboly 0,1. Tyto symboly můžeme zapisovat do druhé stopy a na první stopě zachovat vstupní slovo. Budeme tedy mít $\Sigma_1 = \{0, 1\}$, $\Gamma_1 = \{0, 1, \sqcup\}$, $\Sigma_2 = \{x, y\}$, $\Gamma_2 = \{x, y, \sqcup\}$.

3.1.2 Složené stavy

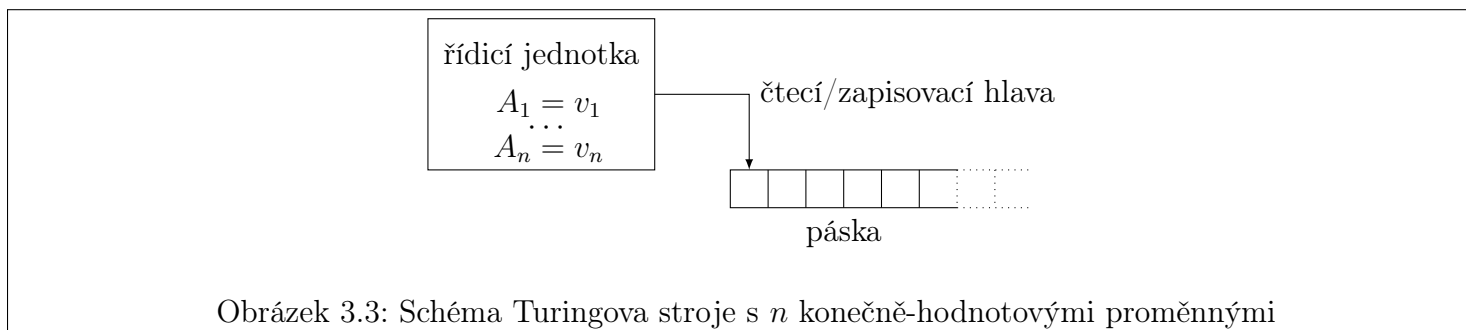
Těž můžeme uvažovat složené (nekoncové) stavy. Ty můžeme použít k reprezentaci konečně mnoha konečně-hodnotových proměnných.



Uvažujme proměnné A_1, \dots, A_n s konečnými doménami $\text{dom}(A_1), \dots, \text{dom}(A_n)$ a množinu řídicích stavů

$$Q = Q_1 \times \text{dom}(A_1), \dots, \text{dom}(A_n)$$

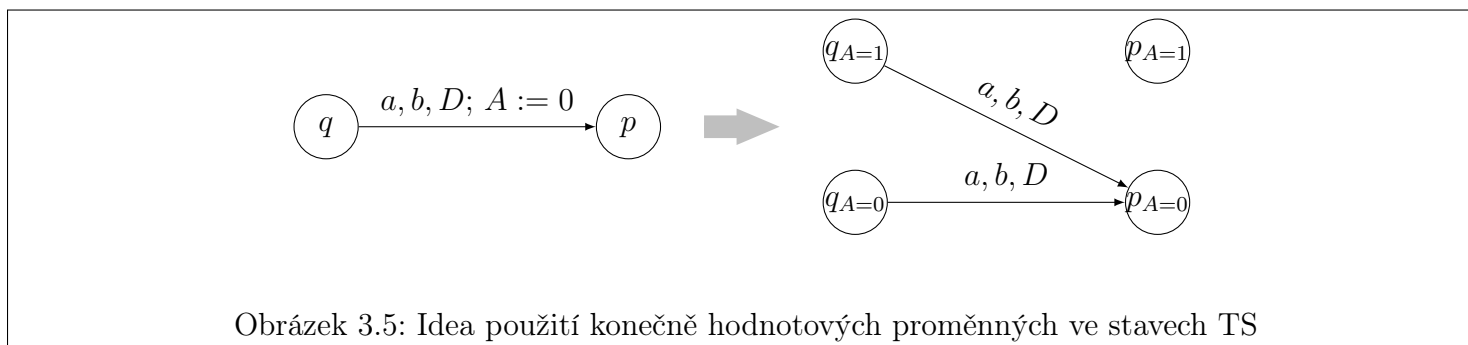
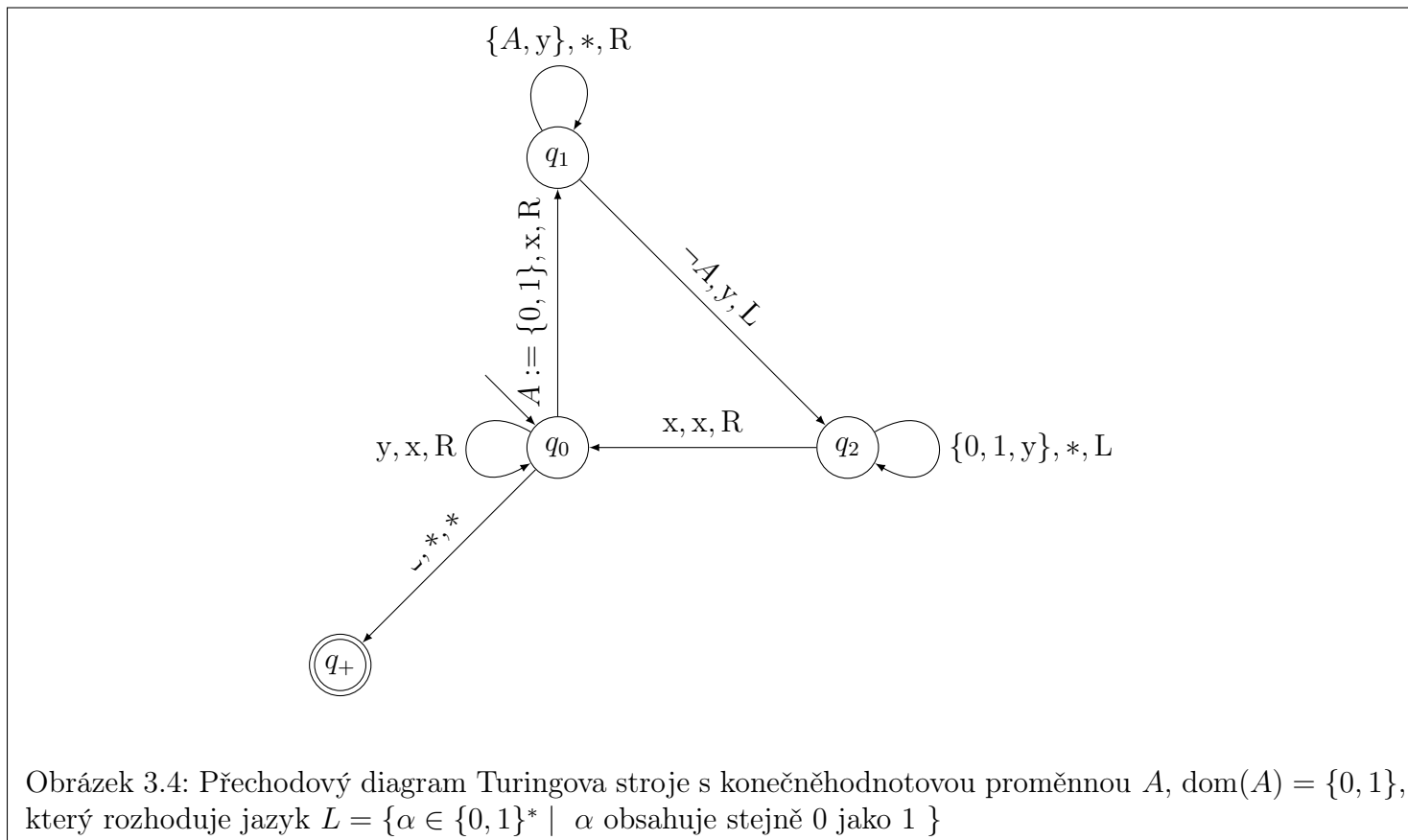
Takto můžeme uvažovat Turingův stroj s n konečně-hodnotovými proměnnými ve stavech (obr. 3.3).



V dalším textu se běžně bude dít to, že část TS v popisu prostě nahradíme subrutinou.

Definice 11. O Turingových strojích T_1, T_2 řekneme, že jsou ekvivalentní, právě když přijímají stejná slova a zamítají stejná slova.

Definice 12. Dvě třídy strojů nazveme výpočetně stejně silné, právě když ke každému stroji z první třídy existuje ekvivalentní stroj z druhé třídy a naopak.



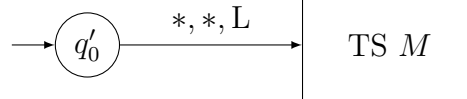
Začneme jednoduchou větou, která říká, že ke každému TS existuje ekvivalentní TS, který splňuje určité podmínky. Tento výsledek budeme často potřebovat v důkazech ve zbytku textu.

Věta 1. *Pro každý TS M*

- existuje ekvivalentní TS M' , který se během výpočtu nevrátí do svého počátečního stavu.*
- existuje ekvivalentní TS M'' , který se během výpočtu nepokusí o pohyb hlavou přes levý okraj pásky.*
- existuje ekvivalentní TS M''' , který nikdy nezapiše na pásku \sqcup .*
- existuje ekvivalentní TS M'''' , který má unikátní dosažitelnou přijímající konfiguraci.*

Důkaz. Důkaz všech bodů věty má konstruktivní charakter:

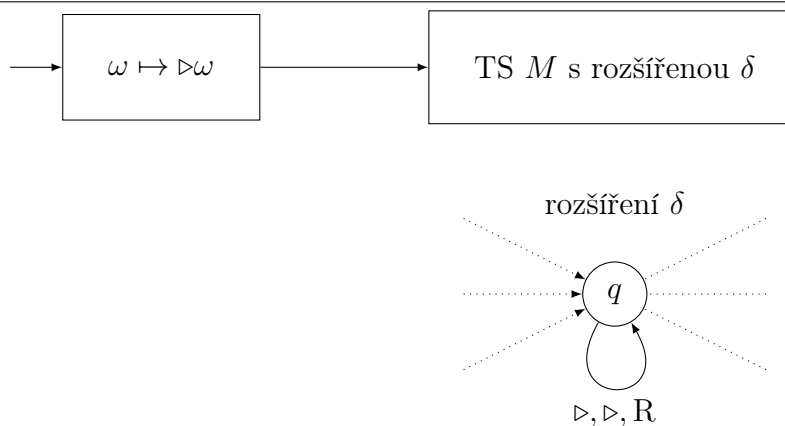
(a) TS M' vytvoříme z M přidáním nového počátečního stavu q'_0 a doplněním přechodové funkce δ o přechody $\delta(q'_0, a) = (q_0, a, L)$ pro všechna $a \in \Gamma$ (q_0 je původní počáteční stav). TS M' se pro jakékoli vstupní slovo $w \in \Sigma^*$ po prvním kroku výpočtu dostane z iniciální konfigurace $(q'_0, w, 0)$ do konfigurace $(q_0, w, 0)$, což je iniciální konfigurace TS M' , protože q'_0 se nevyskytuje v žádném přechodu na pravé straně, TS M' už se do q'_0 nikdy nedostane. TS M' zjevně přijímá/rozhoduje stejný jazyk jako TS M .



Obrázek 3.6: Idea důkazu věty 1 (a)

(b) TS M'' vytvoříme takto: Páskovou abecedu M obohatíme o nový symbol \triangleright . Tento symbol bude Turingovým strojem M' zapsán na první políčko pásky a celý vstup bude posunut o jedno políčko doprava. Toto lze provést subrutinou, která odpovídá TS z úkolu 2 ke kapitole 3, potřebně upraveného pro vstupní abecedu stroje M . Všimněte si, že řešení na straně ?? se nikdy nepokusí přejet levý okraj pásky.

Dále obohatíme přechodovou funkci o přechody $\delta(q, \triangleright) = (q, \triangleright, R)$; tyto přechody budou zajišťovat, že se TS M'' při čtení tohoto symbolu nikdy nepokusí pohnout hlavou doleva. Protože tento symbol bude na prvním políčku pásky, TS M'' se nikdy nepokusí pohnout hlavou přes levý okraj pásky.



Obrázek 3.7: Idea důkazu věty 1 (b)

(c) K TS M sestavíme ekvivalentní TS M''' tak, že obohatíme jeho páskovou abecedu o nový symbol \sqcup . Všechny přechody,

$$\delta(q, a) = (p, \sqcup, D),$$

nahradíme přechody

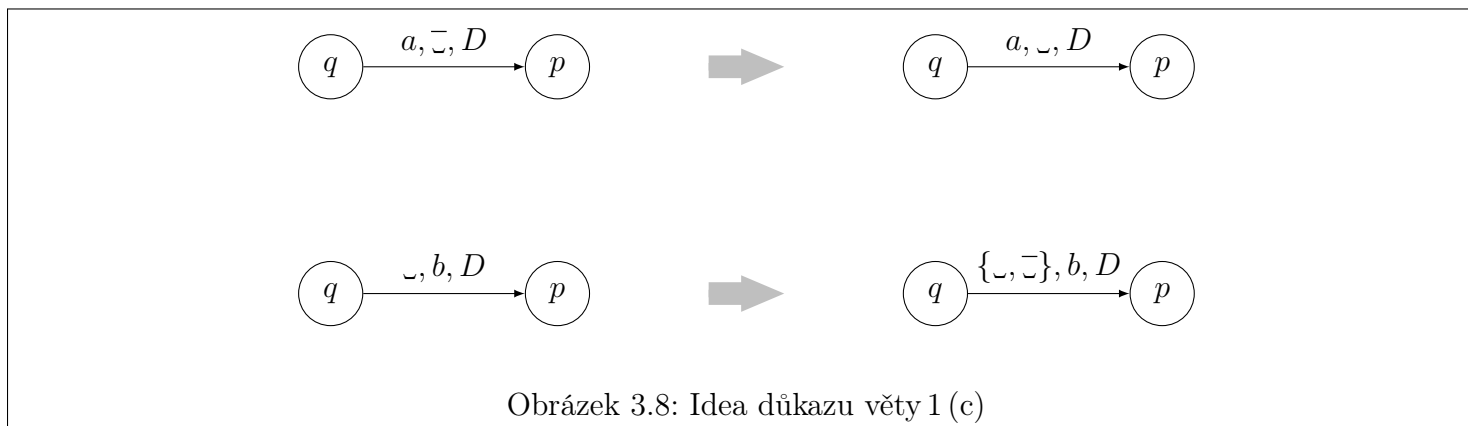
$$\delta(q, a) = (p, \bar{_}, D).$$

Tj. pokud původní stroj M zapisoval na pásku $_$, TS M'' bude na pásku zapisovat $\bar{_}$. Aby měl tento symbol stejný význam jako prázdný symbol a byla tak zajištěna ekvivalence strojů, přidáme pro každý přechod

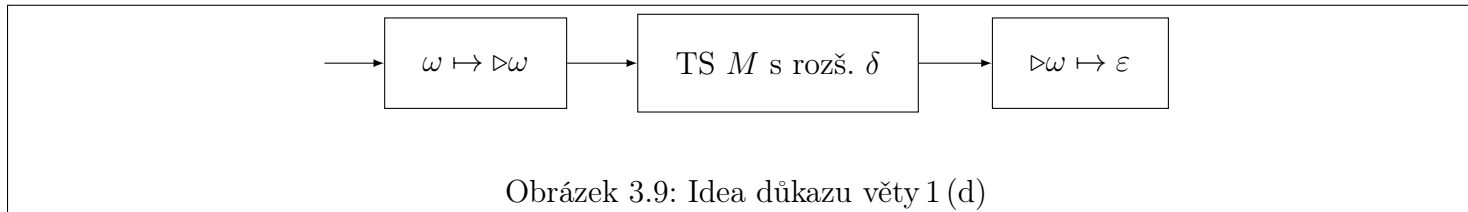
$$\delta(q, _) = (p, b, D)$$

nový přechod

$$\delta(q, \bar{_}) = (p, b, D).$$



(d) K TS M sestavíme nejdříve ekvivalentní TS M'' tak, jak je to v bodě (b). Z něj sestavíme TS M''' následovně:



□

3.2 Turingův stroj s k páskami

TS s k páskami má k pásek a k čtecích/zapisovacích hlav, kterými může pohybovat nezávisle (ve smyslu např. v jednom kroku jednou hlavou doleva druhou doprava). Formálně tedy:

Definice 13. *Turingův stroj s k páskami* je dán stejnými složkami jako v definici 1 až bod

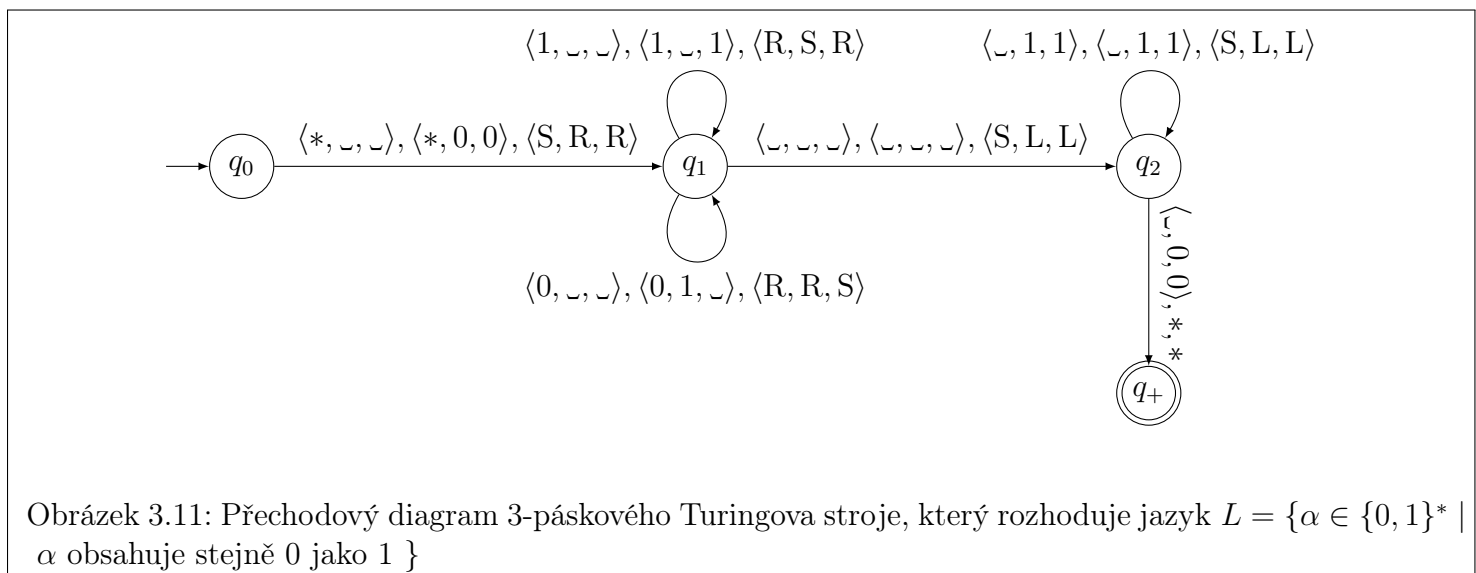
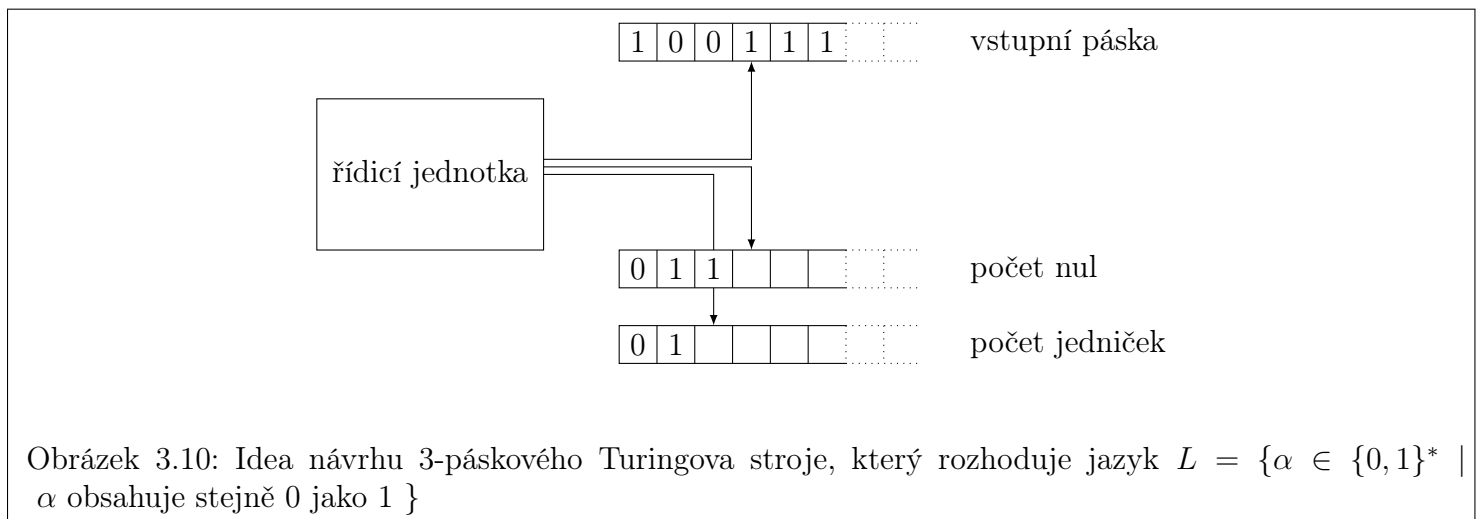
4. přechodová funkce $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$.

V tomto smyslu je také potřeba rozšířit definici konfigurace a kroku výpočtu. To je ale jednoduchá záležitost, proto tato rozšíření definic nebudu uvádět.

Příklad 6. Vrátime se k jazyku slov nad abecedou $\{0, 1\}$, která obsahují stejný počet nul a jedniček.

$$L = \{\alpha \in \{0, 1\}^* \mid \alpha \text{ obsahuje stejně } 0 \text{ jako } 1\}$$

Sestrojíme 3-páskový TS, který jej bude rozhodovat. Základní myšlenka toho stroje bude uchovávat na dvou dodatečných páskách počet nul a počet jedniček (každý na jedné pásce). Počet n bude reprezentován



slovem 01^n . Na začátku jsou oba počty nastaveny na nulu (reprezentovanou jako 0). Vstupní slovo se jednou projde zleva doprava a podle čteného symbolu se inkrementuje příslušný počet. Poté budou srovnány počty na dodatečných páskách.

Přejchodový diagram tohoto TS je na obrázku 3.11.

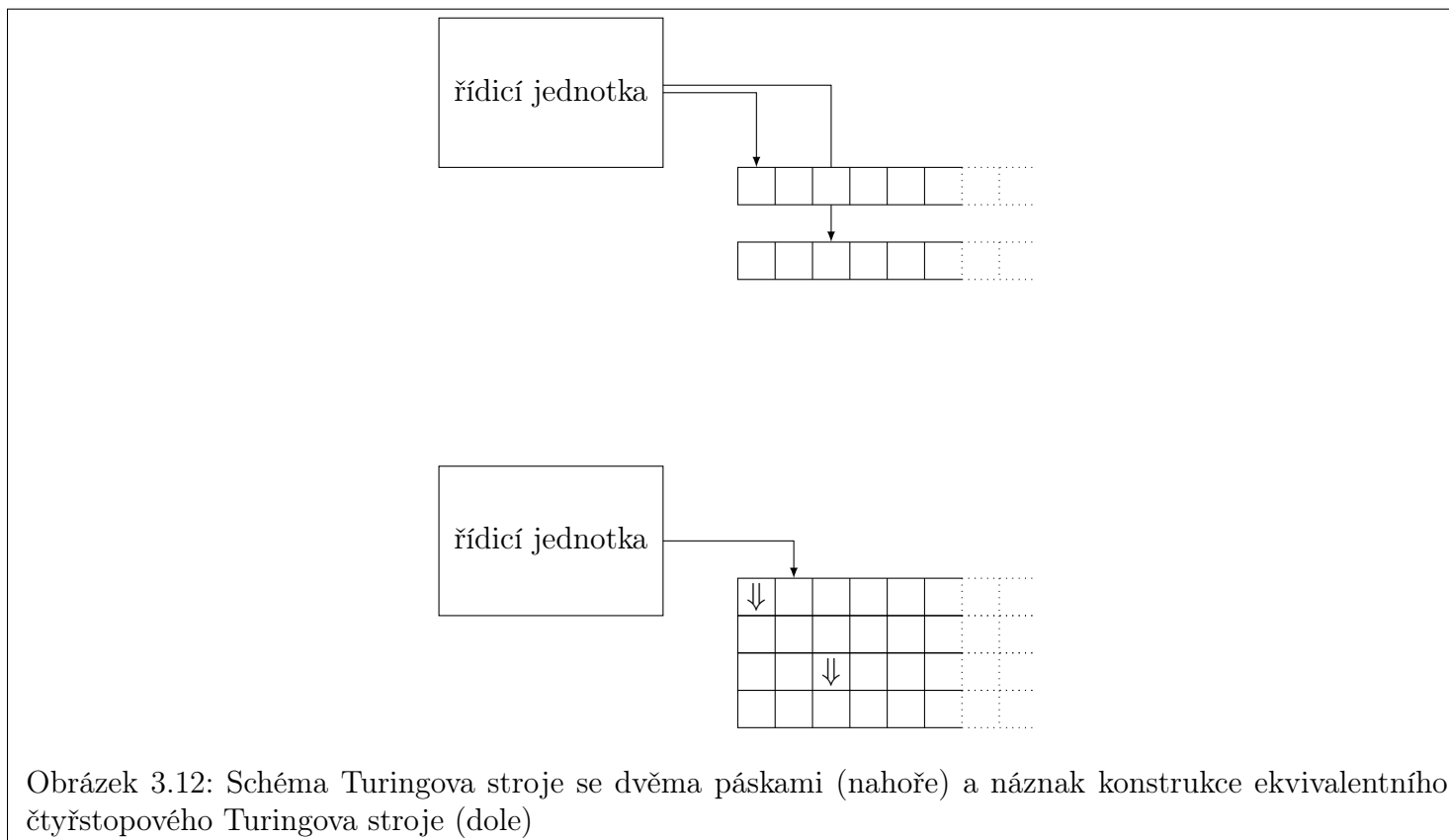
Následuje věta, která říká, že třída TS s k páskami je výpočetně stejně silná jako třída (klasických) TS.

Věta 2. *Třída Turingových strojů s více páskami je ekvivalentní s třídou Turingových strojů s jednou páskou.*

Důkaz. „ \Rightarrow “: Důkaz má konstruktivní charakter. Ukážeme, že pro každý TS s n páskami lze vytvořit ekvivalentní TS s jednou ($2n$ -stopu) páskou. Z každé pásky vytvoříme dvě stopy, jako je to znázorněno na obrázku 3.12.

Pro každý stav q je množina přechodů, které z něj vycházejí, nahrazena subrutinou, která provádí následující činnost:

1. Pro $i = 1, \dots, k$ projde celou páskou (až po poslední neprázdný symbol) a najde na $2i$ -té (tedy stopě reprezentující pozici i -té hlavy) značku hlavy \Downarrow , uloží ve stavové proměnné A_i symbol na odpovídající pozici $(2i - 1)$ -té stopy (tedy stopě reprezentující obsah i -té pásky).



2. Nechť $\delta(q, \langle A_1, \dots, A_k \rangle) = (p, \langle b_1, \dots, b_k \rangle, \langle d_1, \dots, d_k \rangle)$. Pro $i = 1, \dots, k$ projde celou pásku (až po poslední neprázdný symbol) a najde na $2i$ -té značku hlavy \Downarrow , zapíše na odpovídající pozici $(2i - 1)$ -té stopy symbol b_i a posune značku \Downarrow směrem d_i .
3. Přejde do stavu p .

Viz obr. 3.13.

„ \Leftarrow “: triviální, protože TS s jednou páskou je speciální případ TS s k páskami. □

3.3 Turingův stroj s oboustranně nekonečnou páskou

Formální definice TS s oboustranně nekonečnou páskou je stejná jako definice 1.

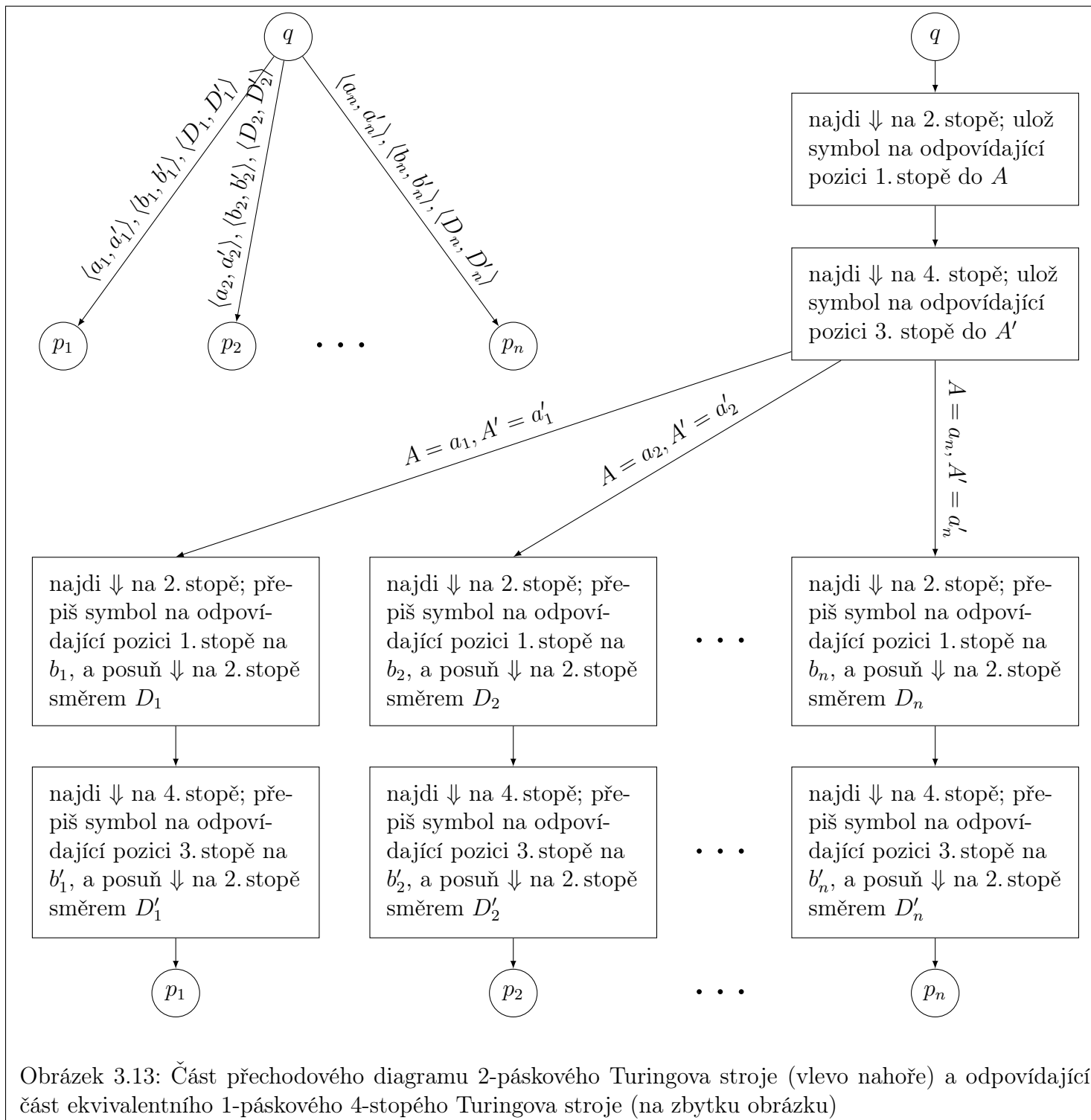
Rozdíl je jen v definici konfigurace – stroj se může nacházet i na záporných indexech. Vhodnější pro nás bude použit alternativní zápis konfigurace z poznámky 1 s doplněním, že také konfigurace $_ \alpha q \beta$ a $\alpha q \beta$ považujeme za stejné. Patříčně se také změní definice kroku výpočtu, protože zde nenastávají pokusy o přejetí levého okraje pásky.

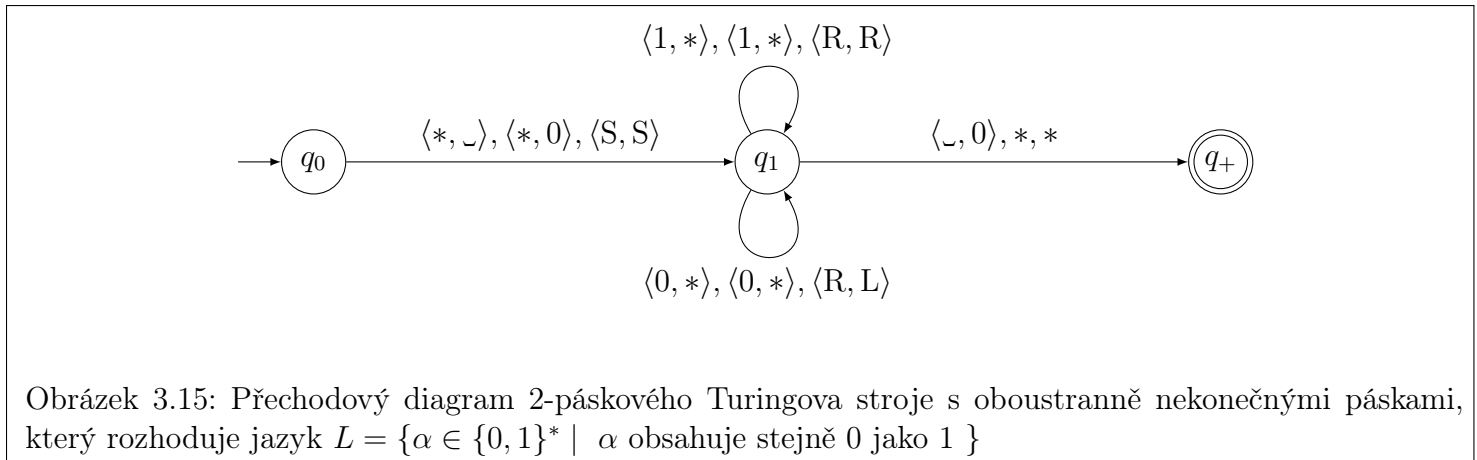
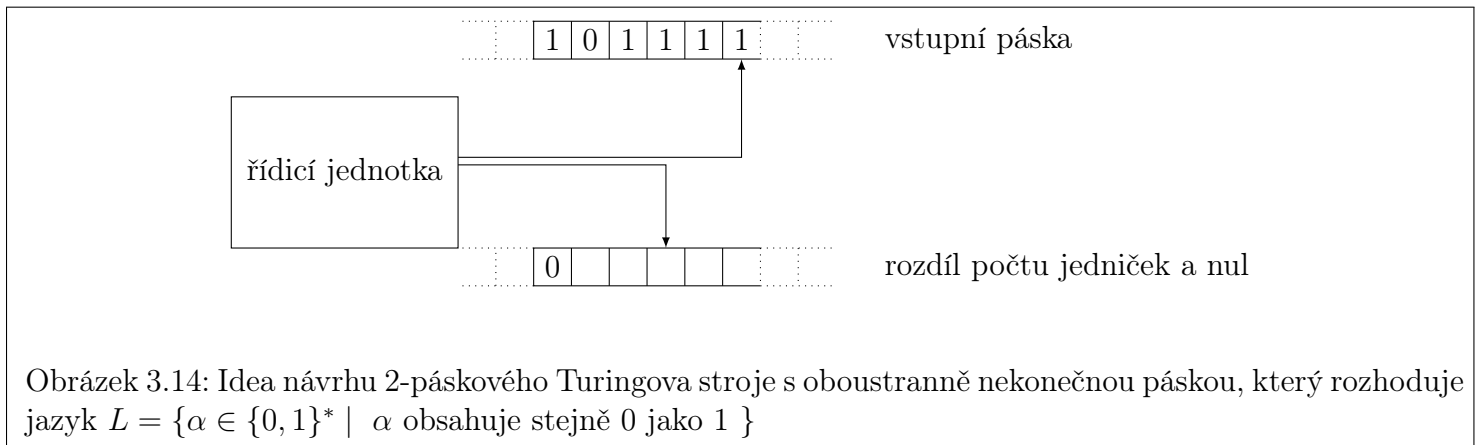
Příklad 7. Vrátime se k jazyku slov nad abecedou $\{0, 1\}$, která obsahují stejný počet nul a jedniček.

$$L = \{ \alpha \in \{0, 1\}^* \mid \alpha \text{ obsahuje stejně } 0 \text{ jako } 1 \}$$

Sestrojíme 2-páskový TS s oboustranně nekonečnými páskami, který jej bude rozhodovat. Základní myšlenka bude používat dodatečnou pásku k reprezentaci rozdílu počtu jedniček a počtu nul. Na začátku na této pásce označíme výchozí pozici, pak čteme vstupní slovo – při každé jedničce posuneme hlavu na dodatečné pásce doprava, při každé nule doleva. Po přečtení vstupního slova ověříme, jestli je hlava na dodatečné pásce na výchozí (označené) pozici (viz obr. 3.15).

Věta 3. *Třída Turingových strojů s oboustrannou páskou je ekvivalentní s třídou Turingových strojů se zleva omezenou páskou.*





Důkaz. Tvrzení dokážeme konstruktivně:

K TS s oboustranně nekonečnou páskou sestavíme ekvivalentní TS se zleva omezenou páskou: Mějme TS $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_+, q_- \rangle$ s oboustranně nekonečnou páskou. Sestavíme $M' = \langle Q, \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, q'_+, q'_- \rangle$, takto:

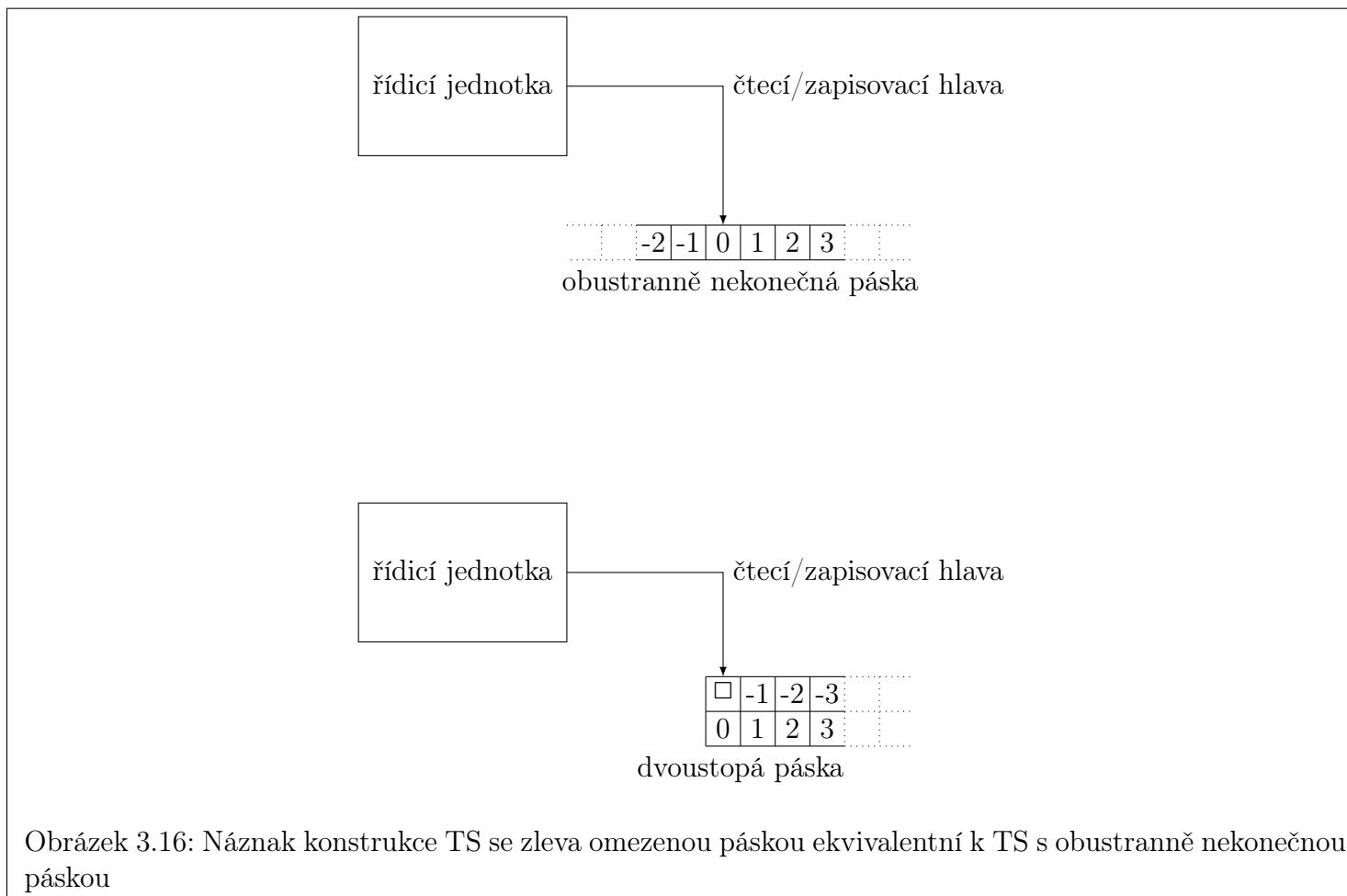
Pásku TS „zlomíme“ a uděláme z ní dvě stopy jedné pásky (Obr. 3.16). To, jestli je pro nás relevantní první nebo druhá stopa, si budeme pamatovat ve stavech (viz Sekci 3.1.2), potřebujeme tedy zdvojit stavy. Dále je potřeba zařídit, „přestup“ z horní stopy na dolní stopu a naopak.

- $Q' = (Q \times \{-1, 1\}) \cup \{q'_0\}$ – zdvojíme stavy a přidáme nový počáteční stav.
- $\Sigma' = \Sigma \times \{_ \}$; $\Gamma' = \{\Gamma \times (\Gamma \cup \{\square\})\}$ – budeme používat dvoustopovou pásku, v druhé stopě budeme navíc používat značku \square .
- q'_0 je nový počáteční stav; $q'_+ = \langle q_+, 1 \rangle$; $q'_- = \langle q_-, 1 \rangle$
- δ' : pro každý přechod $\delta(q, a) = (p, b, D)$ sestrojíme přechody:
 - $\delta(\langle q, 1 \rangle, \langle a, * \rangle) = (\langle p, 1 \rangle, \langle b, * \rangle, D)$,
 - $\delta(\langle q, -1 \rangle, \langle *, a \rangle) = (\langle p, -1 \rangle, \langle *, b \rangle, \overline{D})$, kde \overline{D} je směr opačný k D ,
 - a pro $D = L$ sestrojíme $\delta(\langle q, 1 \rangle, \langle a, \square \rangle) = (\langle p, -1 \rangle, \langle b, \square \rangle, R)$

Viz obr. ??

Dále

$$- \delta(q'_0, \langle *, _ \rangle) = (\langle q_+, 1 \rangle, \langle *, \square \rangle, L)$$



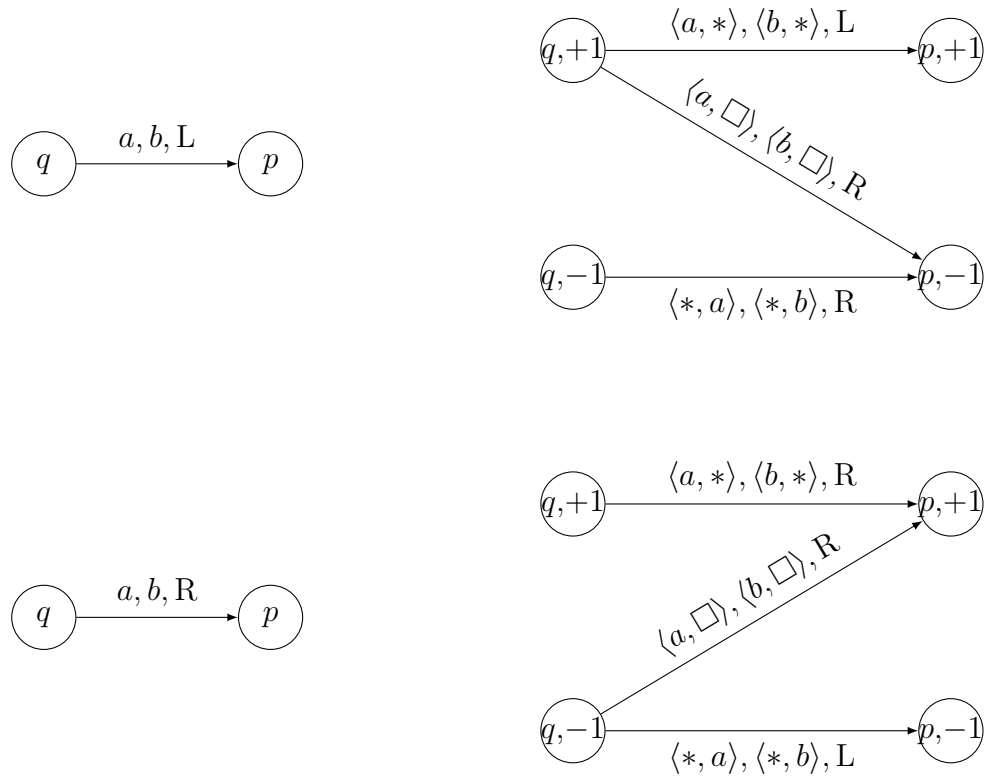
- $\delta(\langle q_+, -1 \rangle, *) = (\langle q_+, 1 \rangle, *, R)$
- všechny ostatní přechody vedou do q'_-

K TS se zleva omezenou páskou sestavíme ekvivalentní TS s oboustranně nekonečnou páskou: Potřebujeme zajistit, aby se TS s oboustranně nekonečnou páskou nepokoušel pracovat s levým úsekem pásky, a nahrazovat „zarážení se“ o levý okraj pásky. Zajistíme to tak, že na první políčko před vstupem zapíšeme speciální symbol \triangleright , který bude sloužit jako zarážka a doplníme přechody $\delta(q, \triangleright) = (q, \triangleright, R)$, které říkají: „Pokud čteš zarážku \triangleright , zůstaň ve stejném stavu a posuň hlavu doprava.“ \square

3.4 Úkoly k textu

- 1) TS s instrukcí stop
- 2) TS s instrukcí reset

3.5 Řešení úkolů k textu



Obrázek 3.17: Části přechodového diagramu Turingova stroje s oboustranně nekonečnou páskou (vlevo) a odpovídající části ekvivalentního klasického Turingova stroje (vpravo)