KMI/ALS1 Algoritmy a složitost 1

L2: Catalanova čísla, optimální stromy

Jan Konecny

26. září 2017

Catalanova čísla

Počet stromů o 0 uzlech: 1

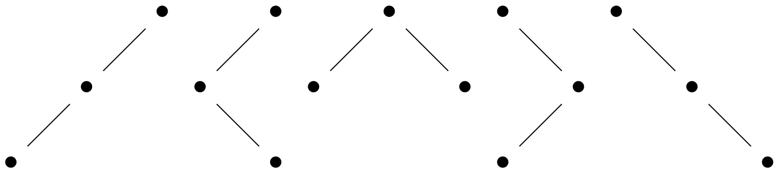
$$\emptyset$$

Počet stromů o 1 uzlu: 1

$$\bullet$$

Počet stromů o 2 uzlech: 2

Počet stromů o 3 uzlech: 5



Počet stromů o 4 uzlech: (minicviko)

Kolik je binárních vyhledávacích stromů?

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 C_0 \\
C_2 &= C_1 C_0 + C_0 C_1 \\
C_3 &= C_2 C_0 + C_1 C_1 + C_0 C_2 \\
C_4 &= C_3 C_0 + C_2 C_1 + C_1 C_2 + C_0 C_3 \\
&\vdots \\
C_n &= C_{n-1} C_0 + C_{n-2} C_1 + \cdots + C_1 C_{n-2} + C_0 C_{n-1}
\end{aligned}$$

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, ...

tzv. Catalanova čísla

Explicitní vzorec pro Catalanova čísla

Definujeme *generující polynom*

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i$$

obsahující všechna Catalanova čísla jako koeficienty.
uvažujme druhou mocninu $f(z)$:

$$\begin{aligned}
[f(z)]^2 = \;& C_0 C_0 && (= C_1) \\
& + (C_1 C_0 + C_0 C_1) z && (= C_2 z) \\
& + (C_2 C_0 + C_1 C_1 + C_0 C_2) z^2 && (= C_3 z^2) \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

Tedy

$$[f(z)]^2 = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + \cdots$$

$$[f(z)]^2 = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + \cdots$$

Když předchozí rovnici vynásobíme z a přičteme C_0:

$$[f(z)]^2 = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + \cdots$$

Když předchozí rovnici vynásobíme z a přičteme C_0:

$$f(z) = C_0 + z[f(z)]^2$$

To je pouze kvadratická rovnice v $f(z)$, můžeme ji řešit známým způsobem:

$$zf^2 - f + C_0 = 0.$$

$$zf^2 - f + C_0 = 0.$$

Dostaneme

$$f(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{1}$$

Použijeme jenom $-$ namísto $\pm$, protože víme, že $f(0) = C_0 = 1$ (kdybychom použili $+$, pak pro $z \to 0$ je $f(z) \to \infty$). Pro vyjádření $f(z)$ použijeme (zobecněný) binomický rozklad na

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2}$$

Zobecněný binomický rozklad

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2} b^2 + \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Pro $\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2}$ dostáváme

$$\begin{aligned}(1-4z)^{1/2} &= 1\\ &- \frac{\frac{1}{2}}{1}4z\\ &+ \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\cdot 1}(4z)^2\\ &- \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\cdot 2\cdot 1}(4z)^3\\ &+ \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(4z)^4\\ &- \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(4z)^5\\ &- \cdots\end{aligned}$$

Což je

$$(1-4z)^{1/2} = 1 - \frac{1}{1!}2z - \frac{1}{2!}4z^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}8z^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}16z^4 - \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}32z^5 - \cdots$$

Dosadíme do (1) a dostaneme

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2!}2z + \frac{3\cdot 1}{3!}4z^2 + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}8z^3 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}16z^4 + \cdots$$

Nepohodlných součinů typu $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ se zbavíme následovně.
Všimněme si, že:

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2! &= 4 \cdot 2 \\ 2^3 \cdot 3! &= 6 \cdot 4 \cdot 2 \\ 2^4 \cdot 4! &= 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2. \end{aligned}$$

atd.
Tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{1!1!}\right) z + \frac{1}{3}\left(\frac{4!}{2!2!}\right) z^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{6!}{3!3!}\right) z^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{8!}{4!4!}\right) z^4 \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i} z^i. \end{aligned}$$

Z tohoto

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} z^i$$

tedy dostáváme explicitní vzorec pro Catalanova čísla:

$$C_i = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$$

Binárních vyhledávacích stromů o i uzlech je tedy $\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$.

Catalanův trojúhleník

1						
1	1					
1	2	2				
1	3	5	5			
1	4	9	14	14		
1	5	14	28	42	42	
1	6	20	48	90	132	132

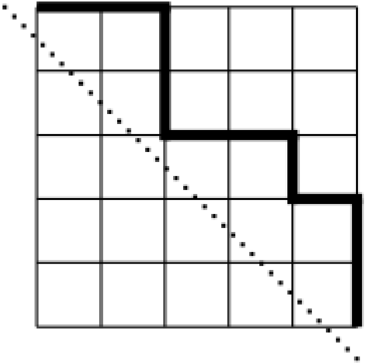
Sémantika Catalanových čísel – uzávorkované výrazy

$n = 0$:	*
$n = 1$:	()
$n = 2$:	()(), (())
$n = 3$:	()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))
$n = 4$:	()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((())))
$n = 5$:	()()()()(), ()()()(()), ()()(())(), ()()(()()), ()()((())), ()(())()(), ()(())(()), ()(()())(), ()((()))(), ()(()()()), ()(()(())), ()((())()), ()((()())), ()(((()))), (())()()(), (())()(()), (())(())(), (())(()()), (())((())), (()())()(), (()())(()), ((()))()(), ((()))(()), (()()())(), (()(()))(), ((())())(), ((()()))(), (((())))(), (()()()()), (()()(())), (()(())()), (()(()())), (()((()))), ((())()()), ((())(())), ((()())()), (((()))()), ((()()())), ((()(()))), (((())())), (((()()))), ((((()))))

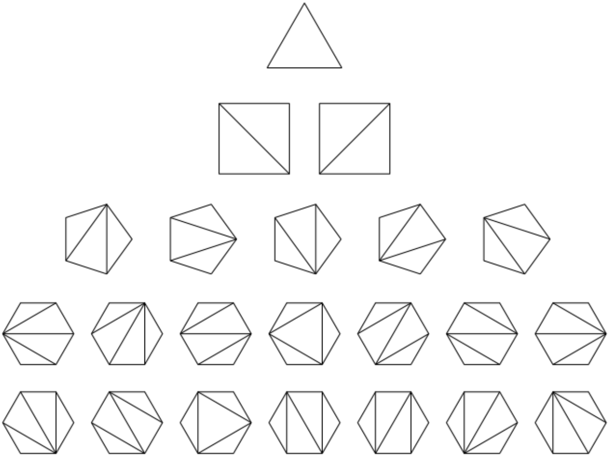
Sémantika Catalanových čísel – pohoří

```
n = 0: | *
-------+----------------------------------------------
n = 1: | /\
-------+----------------------------------------------
n = 2: |          /\
       | /\/\,  /  \
-------+----------------------------------------------
n = 3: |                                          /\
       |            /\      /\        /\/\      /  \
       | /\/\/\,  /\/  \,  /  \/\,  /    \,  /    \
```

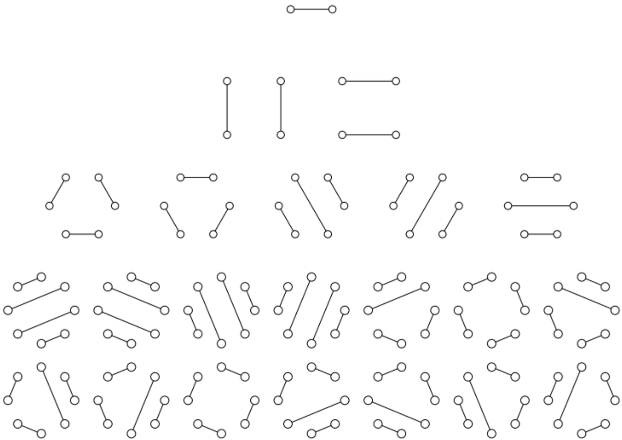
Sémantika Catalanových čísel – cesty nad diagonálou



Sémantika Catalanových čísel – triangulace polygonu



Sémantika Catalanových čísel – handshakes



Optimální stromy

Pokud je každý klíč vyhledáván stejně často je samozřejmě nejlepší vyvážený strom.

Jak je to, pokud jsou frekvence vyhledávání klíčů různé?

Uvažujme pravděpodobnosti $p_1, \ldots, p_n$ pravděpodobnosti $q_0, q_1, \ldots p_n$, kde

- p_i je pravděpodobnost hledání i-tého vloženého klíče K_i,
- q_i je pravděpodobnost hledání klíče, který leží mezi klíči K_i a K_{i+1},
  q_0 je pravděpodobnost hledání klíče, který leží před klíčem K_1,
  q_n je pravděpodobnost hledání klíče, který leží za klíčem K_n,

t.ž. $p_1 + p_2 + \ldots p_n + q_0 + q_1 \cdots + q_n = 1$.
(toto vlastně nebudeme potřebovat; pravděpodobnostem budeme říkat váhy)

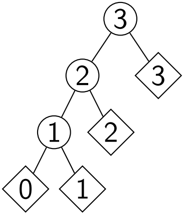
Chceme najít binární vyhledávací strom (optimální strom), který minimalizuje počet porovnání během hledaní:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(\text{level}(j) + 1) + \sum_{k=0}^{n} q_k(\text{level}(k)), \tag{5}$$

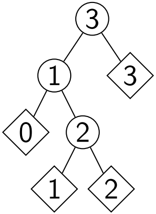
kde j je j-tý vnitřní uzel v symetrickém uspořádání a k je $(k+1)$-tý externí uzel a kde kořen má level 0.

Example

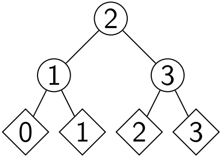
Mějme klíče 1,2,3, s vahami p_1, p_2, p_3 a q_0, q_1, q_2, q_3.
Je 5 možných stromů:



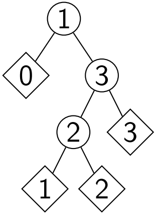
$2p_1 + p_2 + 3q_0 +$
$3q_1 + 2q_2 + q_3$



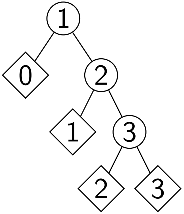
$p_1 + 2p_2 + 2q_0 +$
$3q_1 + 3q_2 + q_3$



$p_1 + p_3 + 2q_0 +$
$2q_1 + 2q_2 + 2q_3$



$2p_2 + p_2 + q_0 + 3q_1 + 3q_2 + 2q_3$



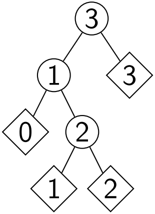
$p_2 + 2p_3 + q_0 + 2q_1 + 3q_2 + 3q_3$

Pozorování

Všechny podstromy optimálního stromu jsou optimální.

Example

Pokud je tento strom optimální pro váhy $(p_1, p_2, p_3; q_0, q_1, q_2, q_3)$, pak jeho levý podstrom musí být optimální pro $(p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$. Jakékoli zlepšení v podstromu vede ke zlepšení celého stromu.



Tento princip využijeme a budeme konstruovat větší a větší podstromy.

pozn.: obecně se tomuto principu říká „dynamické programování.“

Pozorování

Všechny podstromy optimálního stromu jsou optimální.

Označme (pro $0 \leq i \leq j \leq n$):

- $c(i,j)$ - cena optimálního podstromu s vahami $(p_{i+1}, \ldots, p_j; q_i, \ldots, q_j)$,
- $w(i,j)$ - součet těchto vah, tj. $p_{i+1} + \cdots + p_j + q_i + \cdots + q_j$.

Vyplývá, že

$$c(i,i) = 0$$
$$c(i,j) = w(i,j) + \min_{i<k\leq j} \left(c(i,k-1) + c(k,j) \right), \quad \text{pro } i < j, \qquad (6)$$

protože minimální možná cena stromu s kořenem k je

$$w(i,j) + c(i,k-1) + c(k,j).$$

Pro $i < j$, nechť $R(i,j)$ je množina všech k, pro které je v (6) dosaženo minimum (tj. množina možných kořenů optimálních stromů).
Rovnice (6) umožňuje vyhodnotit $c(i,j)$ pro $j - i = 1, 2, \ldots, n$.
Je asi $\frac{1}{2}n^2$ takových hodnot. Minimalizace je prováděna pro $\frac{1}{6}n^3$ hodnot k.
To znamená, že můžeme určit optimální strom v čase $\mathcal{O}(n^3)$ a paměti $\mathcal{O}(n^2)$.

Ve skutečnosti jsme na tom ještě lépe...

My totiž nepotřebujeme počítat celou $R(i,j)$ stačí nám jeden reprezentant $r(i,j)$.

Pokud vypočítáme $r(i,j-1)$ a $r(i+1,j)$, můžeme automaticky předpokládat, že

$$r(i,j-1) \leq r(i,j) \leq r(i+1,j).$$

To omezí hledání minima: místo $j-i$ hodnot k stačí prozkoumat $r(i+1,j)-r(i,j-1)+1$ hodnot.
Celkové množství práce (když $j-i=d$) je omezeno teleskopickými posloupnostmi

$$\sum_{\substack{d\leq j\leq n\\ i=j-d}} r(i{+}1,j){-}r(i,j{-}1){+}1 = r(n{-}d{+}1,n){-}r(0,d{-}1){+}n{-}d{+}1 < 2n$$

Časová složitost je tedy $\mathcal{O}(n^2)$.

Algoritmus hledání optimálního stromu

Vstup: $2N+1$ nezáporných vah $(p_1, \dots, p_N; q_0, \dots, q_N)$.
Výstup: binární vyhledávací stromy $t(i,j)$, které mají minimální cenu vyhledávání pro váhy $(p_{i+1}, \dots, p_j; q_i, \dots, q_j)$.

Budeme počítat 3 pole:

$c[i,j]$,	pro $0 \leq i \leq j \leq n$,	cena stromu $t(i,j)$
$r[i,j]$,	pro $0 \leq i < j \leq n$,	kořen stromu $t(i,j)$
$w[i,j]$,	pro $0 \leq i \leq j \leq n$,	celková váha stromu $t(i,j)$

Jak potom číst výsledek:

- pokud $i = j$, pak $t(i,j)$ je null.
- jinak jeho levý podstrom je $t(i, r[i,j]-1)$ a pravý podstrom je $t(r[i,j], j)$.

Hledání optimálního stromu

Vstup : $2N+1$ nezáporných vah $(p_1, \ldots, p_N; q_0, \ldots, q_N)$

Výstup: binární vyhledávací stromy $t(i,j)$, které mají minimální cenu vyhledávání pro váhy $(p_{i+1}, \ldots, p_j; q_i, \ldots, q_j)$

Inicializace;

Pro $0 \leq i \leq N$: $c[i,i] \leftarrow 0$;
$w[i,i] \leftarrow q_i$
$w[i,j] \leftarrow w[i,j-1] + p_j + q_j$ pro $j = i+1, \ldots, N$;

Pro $1 \leq j \leq N$: $c[j-1,j] \leftarrow w[j-1,j]$;
$r[j-1,j] \leftarrow j$;

for $d \leftarrow 2$ **to** N **do**
  for $j \leftarrow d$ **to** N **do**
    $i \leftarrow j - d$;
    $c[i,j] \leftarrow w[i,j] + \min\limits_{r[i,j-1] \leq k \leq r[i+1,j]} (c[i,k-1] + c[k,j])$;
    $r[i,j] \leftarrow k$ pro které nastává to minimum;

Vstup: $p_i = (4, 1, 2, 2, 6); q_i = (1, 1, 1, 3, 2, 1)$.
Inicializace:

$$\begin{array}{ccc} W & C & R \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & 6 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$i = 2 - 2 = 0$

$r[i, j-1] = r[0, 1] = 1$

$r[i+1, j] = r[1, 2] = 2$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[0, 0] + c[1, 2] = 3$$

$$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[0, 1] + c[2, 2] = 6$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$c[i, j] = c[0, 2] \leftarrow w[0, 2] + 3 = 11$

$r[i, j] = r[0, 2] \leftarrow 1$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 3 - 2 = 1$$

$$r[i, j-1] = r[1,2] = 2$$

$$r[i+1, j] = r[2,3] = 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[1,1] + c[2,3] = 6$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[1,2] + c[3,3] = 3$$

$$c[i,j] = c[1,3] \leftarrow w[1,3] + 3 = 11$$

$$r[i,j] = r[1,3] \leftarrow 3$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$i = 4 - 2 = 2$

$r[i, j-1] = r[2,3] = 3$

$r[i+1, j] = r[3,4] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[2,2] + c[3,4] = 7$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[2,3] + c[4,4] = 6$$

$c[i,j] = c[2,4] \leftarrow w[2,4] + 6 = 16$

$r[i,j] = r[2,4] \leftarrow 4$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad {\color{blue}2} \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad {\color{blue}5}$

$i = 5 - 2 = 3$

$r[i, j-1] = r[3,4] = 4$

$r[i+1, j] = r[4,5] = 5$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[3,3] + c[4,5] = 9$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 11 & & & \\ & 3 & 11 & & \\ & & 6 & 16 & \\ & & & 7 & {\color{red}21} \\ & & & & 9 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$k = 5 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[3,4] + c[5,5] = 7$

$c[i,j] = c[3,5] \leftarrow w[3,5] + 7 = 21$

$r[i,j] = r[3,5] \leftarrow 5$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 3 & & \\ & & 3 & 4 & \\ & & & 4 & {\color{red}5} \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad {\color{blue}3} \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad {\color{blue}3} \quad 4 \quad 5$$

$$i = 3 - 3 = 0$$

$$r[i, j-1] = r[0, 2] = 1$$

$$r[i+1, j] = r[1, 3] = 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 : c[i, k-1] + c[k, j] = \\ = c[0, 0] + c[1, 3] = 11$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & {\color{red}24} & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] = \\ = c[0, 1] + c[2, 3] = 12$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] = \\ = c[0, 2] + c[3, 3] = 11$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & {\color{red}1} & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad {\color{blue}3} \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 3 \quad {\color{blue}4} \quad 5$

$i = 4 - 3 = 1$

$r[i, j-1] = r[1,3] = 3$

$r[i+1, j] = r[2,4] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$\qquad = c[1,2] + c[3,4] = 10$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & & \\ & & 3 & 11 & {\color{red}22} & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$\qquad = c[1,3] + c[4,4] = 11$

$c[i, j] = c[1,4] \leftarrow$

$w[1,4] + 10 = 22$

$r[i, j] = r[1,4] \leftarrow 3$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & {\color{red}3} & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad {\color{blue}3} \quad 4 \quad 5$$
$$j = \quad 3 \quad 4 \quad {\color{blue}5}$$
$$i = 5 - 3 = 2$$
$$r[i, j-1] = r[2,4] = 4$$
$$r[i+1, j] = r[3,5] = 5$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[2,3] + c[4,5] = 15$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & & \\ & & 3 & 11 & 22 & \\ & & & 6 & 16 & {\color{red}32} \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 5 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[2,4] + c[5,5] = 16$$

$$c[i,j] = c[2,5] \leftarrow$$
$$w[2,5] + 15 = 32$$
$$r[i,j] = r[2,5] \leftarrow 4$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & 3 & \\ & & & 3 & 4 & {\color{red}4} \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 4 \quad 5$

$i = 4 - 4 = 0$

$r[i, j-1] = r[0,3] = 1$

$r[i+1, j] = r[1,4] = 3$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 1 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,0] + c[1,4] = 22$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & 35 & \\ & & 3 & 11 & 22 & \\ & & & 6 & 16 & 32 \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,1] + c[2,4] = 22$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,2] + c[3,4] = 18$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 3 & \\ & & 2 & 3 & 3 & \\ & & & 3 & 4 & 4 \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 4 \quad 5$

$i = 5 - 4 = 1$

$r[i, j-1] = r[1,4] = 3$

$r[i+1, j] = r[2,5] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[1,2] + c[3,5] = 24$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 24 & 35 & \\ & 3 & 11 & 22 & 39 \\ & & 6 & 16 & 32 \\ & & & 7 & 21 \\ & & & & 9 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[1,3] + c[4,5] = 20$$

$c[i,j] = c[1,5] \leftarrow$

$w[1,5] + 20 = 39$

$r[i,j] = r[1,5] \leftarrow 4$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & \\ & 2 & 3 & 3 & 4 \\ & & 3 & 4 & 4 \\ & & & 4 & 5 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 5$

$i = 5 - 5 = 0$

$r[i, j-1] = r[0,4] = 3$

$r[i+1, j] = r[1,5] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,2] + c[3,5] = 32$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & 35 & 56 \\ & & 3 & 11 & 22 & 39 \\ & & & 6 & 16 & 32 \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,3] + c[4,5] = 33$

$c[i, j] = c[0,5] \leftarrow$

$w[0,5] + 32 = 56$

$r[i, j] = r[0,5] \leftarrow 3$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ & 2 & 3 & 3 & 4 \\ & & 3 & 4 & 4 \\ & & & 4 & 5 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$p = (1, 5, 2, 2, 1)$; $q = (3, 1, 3, 1, 2, 1)$
Inicializace:

$$\begin{array}{ccc}
W & C & R \\
\begin{bmatrix}
3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\
 & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\
 & & 3 & 6 & 10 & 12 \\
 & & & 1 & 5 & 7 \\
 & & & & 2 & 4 \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
 & 5 & & & & \\
 & & 9 & & & \\
 & & & 6 & & \\
 & & & & 5 & \\
 & & & & & 4 \\
 & & & & &
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & & \\
 & & 2 & & & \\
 & & & 3 & & \\
 & & & & 4 & \\
 & & & & & 5 \\
 & & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$
$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$
$i = 2 - 2 = 0$
$r[i, j-1] = r[0,1] = 1$
$r[i+1, j] = r[1,2] = 2$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[0,0] + c[1,2] = 9$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & & & \\ & & 9 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 4 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[0,1] + c[2,2] = 5$$

$c[i,j] = c[0,2] \leftarrow w[0,2] + 5 =$
18
$r[i,j] = r[0,2] \leftarrow 2$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$i = 3 - 2 = 1$

$r[i, j-1] = r[1, 2] = 2$

$r[i+1, j] = r[2, 3] = 3$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[1, 1] + c[2, 3] = 6$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 18 & & & \\ & 9 & \color{red}{18} & & \\ & & 6 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[1, 2] + c[3, 3] = 9$

$c[i, j] = c[1, 3] \leftarrow w[1, 3] + 6 =$
18

$r[i, j] = r[1, 3] \leftarrow 2$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 2 & \color{red}{2} & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$i = 4 - 2 = 2$

$r[i, j-1] = r[2,3] = 3$

$r[i+1, j] = r[3,4] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[2,2] + c[3,4] = 5$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 18 & & & \\ & 9 & 18 & & \\ & & 6 & 15 & \\ & & & 5 & \\ & & & & 4 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[2,3] + c[4,4] = 6$

$c[i,j] = c[2,4] \leftarrow w[2,4] + 5 =$
15

$r[i,j] = r[2,4] \leftarrow 3$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 2 & 2 & & \\ & & 3 & 3 & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$i = 5 - 2 = 3$

$r[i, j-1] = r[3, 4] = 4$

$r[i+1, j] = r[4, 5] = 5$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[3, 3] + c[4, 5] = 4$

$k = 5 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[3, 4] + c[5, 5] = 5$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & & & \\ & & 9 & 18 & & \\ & & & 6 & 15 & \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$c[i, j] = c[3, 5] \leftarrow w[3, 5] + 4 = 11$

$r[i, j] = r[3, 5] \leftarrow 4$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & & & \\ & & 2 & 2 & & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$i = 3 - 3 = 0$

$r[i, j-1] = r[0, 2] = 2$

$r[i+1, j] = r[1, 3] = 2$

$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0, 1] + c[2, 3] = 11$

$c[i, j] = c[0, 3] \leftarrow$

$w[0, 3] + 11 = 27$

$r[i, j] = r[0, 3] \leftarrow 2$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & & \\ & & 9 & 18 & & \\ & & & 6 & 15 & \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & & \\ & & 2 & 2 & & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad {\color{blue}3} \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 3 \quad {\color{blue}4} \quad 5$

$i = 4 - 3 = 1$

$r[i, j-1] = r[1,3] = 2$

$r[i+1, j] = r[2,4] = 3$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[1,1] + c[2,4] = 15$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 27 & & \\ & 9 & 18 & {\color{red}30} & \\ & & 6 & 15 & \\ & & & 5 & 11 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[1,2] + c[3,4] = 14$

$c[i, j] = c[1,4] \leftarrow$

$w[1,4] + 14 = 30$

$r[i, j] = r[1,4] \leftarrow 3$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & & \\ & 2 & 2 & {\color{red}3} & \\ & & 3 & 3 & \\ & & & 4 & 4 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$
$j = \quad 3 \quad 4 \quad 5$
$i = 5 - 3 = 2$
$r[i, j-1] = r[2,4] = 3$
$r[i+1, j] = r[3,5] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[2,2] + c[3,5] = 11$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 27 & & \\ & 9 & 18 & 30 & \\ & & 6 & 15 & 22 \\ & & & 5 & 11 \\ & & & & 4 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[2,3] + c[4,5] = 10$$

$c[i,j] = c[2,5] \leftarrow$
$w[2,5] + 10 = 22$
$r[i,j] = r[2,5] \leftarrow 4$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & & \\ & 2 & 2 & 3 & \\ & & 3 & 3 & 4 \\ & & & 4 & 4 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad {\color{blue}4} \quad 5$

$j = \quad {\color{blue}4} \quad 5$

$i = 4 - 4 = 0$

$r[i, j-1] = r[0,3] = 2$

$r[i+1, j] = r[1,4] = 3$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,1] + c[2,4] = 20$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & {\color{red}40} & \\ & & 9 & 18 & 30 & \\ & & & 6 & 15 & 22 \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$

$= c[0,2] + c[3,4] = 23$

$c[i,j] = c[0,4] \leftarrow$

$w[0,4] + 20 = 40$

$r[i,j] = r[0,4] \leftarrow 2$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & {\color{red}2} & \\ & & 2 & 2 & 3 & \\ & & & 3 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad {\color{blue}4} \quad 5$

$j = \quad 4 \quad {\color{blue}5}$

$i = 5 - 4 = 1$

$r[i, j-1] = r[1, 4] = 3$

$r[i+1, j] = r[2, 5] = 4$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[1, 2] + c[3, 5] = 20$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 27 & 40 & \\ & 9 & 18 & 30 & {\color{red}38} \\ & & 6 & 15 & 22 \\ & & & 5 & 11 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$k = 4 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$
$$= c[1, 3] + c[4, 5] = 22$$

$c[i, j] = c[1, 5] \leftarrow$

$w[1, 5] + 20 = 38$

$r[i, j] = r[1, 5] \leftarrow 3$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \\ & 2 & 2 & 3 & {\color{red}3} \\ & & 3 & 3 & 4 \\ & & & 4 & 4 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$j = \quad 5$

$i = 5 - 5 = 0$

$r[i, j-1] = r[0,4] = 2$

$r[i+1, j] = r[1,5] = 3$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$

$$= c[0,1] + c[2,5] = 27$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & 40 & 49 \\ & & 9 & 18 & 30 & 38 \\ & & & 6 & 15 & 22 \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$k = 3 : c[i, k-1] + c[k, j] =$$

$$= c[0,2] + c[3,5] = 29$$

$c[i,j] = c[0,5] \leftarrow$

$w[0,5] + 27 = 49$

$r[i,j] = r[0,5] \leftarrow 2$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 3 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$