

L11 – L-uspořádání, svazové L-uspořádání skládání L-relací

4. 12. 2023

Definice 1

L-uspořádání na $\langle X, \approx \rangle$ je binární L-relace \preceq na $\langle X, \approx \rangle$ splňující

$$x \preceq x = 1 \quad (\text{reflexivita})$$

$$(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) \leq x \approx y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$(x \preceq y) \otimes (y \preceq z) \leq x \preceq z \quad (\text{transitivita})$$

Dvojici $X = \langle \langle X, \approx \rangle, \preceq \rangle$ nazýváme **L-uspořádaná množina**.

Poznámka

- Zjevně, pro $L = 2$ to se z toho stane klasické uspořádání.
- Uvažujme jazyk \mathcal{J}_{\preceq} se symboly $\preceq, \approx \in R$.

Mějme L-strukturu M pro \mathcal{J}_{\preceq} .

Pak $\langle \langle M, \approx^M \rangle, \preceq^M \rangle$ je L-uspořádaná množina p.k. formule Ref, Ans, Tra jsou pravdivé v M .

Lemma 2

V L-uspořádané množině $\langle\langle X, \approx \rangle, \preceq\rangle$ platí

$$(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) = (x \approx y).$$

Důkaz.

„ \leq “ přímo z antisymetrie \preceq .

„ \geq “ z kompatibility \preceq :

$$(x \approx y) = (x \preceq x) \otimes (x \approx y) \leq (x \preceq y)$$

a podobně $(x \approx y) \leq (y \preceq x)$.



Příklad 3

Mějme libovolnou množinu $X \neq \emptyset$ a $\emptyset \neq M \subseteq L^X$.

Pak $\langle \langle M, \approx \rangle, S \rangle$ je L-uspořádaná množina.

- Toto plyne z vlastností, které jsme tu už uvedli v L03:

Připomínka: Vlastnosti podmnožinovitosti ve stupních

$$S(A, A) = 1$$

$$S(A, B) \otimes S(B, C) \leq S(A, C)$$

...

Připomínka: Vlastnosti rovnosti množin ve stupních

Nechť $A, B, C, D \in L^X$. Pak platí

$$(A \approx B) \otimes S(B, C) \otimes (C \approx D) \leq S(A, D)$$

$$A \approx B = S(A, B) \wedge S(B, A)$$

Definice 4

Mějme L-uspořádanou množinu $\langle\langle X, \approx \rangle, \preceq\rangle$ a $A \in L^X$.

L-množiny $\mathcal{U}(A), \mathcal{L}(A) \in L^X$ definujeme jako

$$\mathcal{U}(A)(x) = \bigwedge_{y \in X} A(y) \rightarrow (y \preceq x),$$

$$\mathcal{L}(A)(x) = \bigwedge_{y \in X} A(y) \rightarrow (x \preceq y).$$

- $\mathcal{U}(A)$ nazýváme **horní kužel** L-množiny A ;
- $\mathcal{L}(A)$ nazýváme **dolní kužel** L-množiny A .

Poznámka

Všimněme si, že $\mathcal{U}(A)(x)$ je pravdivost formule $(\forall y)(r_A(y) \Rightarrow (y \preceq x))$ v odpovídajícím jazyku \mathcal{J}_{\preceq} (z předch. poznámky).

Definice 5

Mějme L -uspořádanou množinu $\langle\langle X, \approx \rangle, \preceq\rangle$ a $A \in L^X$.

L -množiny $\inf(A), \sup(A) \in L^X$ definujeme jako

$$\begin{aligned}(\inf(A))(x) &= (\mathcal{L}(A))(x) \wedge (\mathcal{U}\mathcal{L}(A))(x), \\(\sup(A))(x) &= (\mathcal{U}(A))(x) \wedge (\mathcal{L}\mathcal{U}(A))(x).\end{aligned}$$

- $\inf(A)$ nazýváme **infimum** L -množiny A ;
- $\sup(A)$ nazýváme **supremum** L -množiny A .

Poznámka

\inf a \sup se opět stanou klasické infimum a supremum pro $L = 2$.

Lemma 6

*Nechť $\langle\langle X, \approx \rangle, \preceq\rangle$ je L-uspořádaná množina, $A \in L^X$.
Pokud $(\inf(A))(x) = 1$ a $(\inf(A))(y) = 1$, tak $x = y$.
(Podobně pro $\sup(A)$.)*

Důkaz.

$(\inf(A))(x) = 1$ a $(\inf(A))(y) = 1$ implikuje:

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{L}(A))(x) = 1 & (\mathcal{UL}(A))(x) = 1 \\ (\mathcal{L}(A))(y) = 1 & (\mathcal{UL}(A))(y) = 1 \end{array}$$

Dle definice \mathcal{L} a \mathcal{U} to znamená, že $x \preceq y = 1$ a $y \preceq x = 1$.

Dle antisymetrie $1 = (x \preceq y) \wedge (y \preceq x) \leq x \approx y$.

A protože \approx je L-rovnost, dostáváme $x = y$.

Definice 7

L-uspořádaná množina $\langle \langle X, \approx \rangle, \preceq \rangle$ se nazývá **úplně svazově L-uspořádaná**, pokud pro lib. $A \in L^X$ jsou $\sup(A)$ a $\inf(A)$ \approx -singletony.

Připomínka definice singletonu (z L04)

L-množina A v X se nazývá **\approx -singleton** (\approx je L-ekvivalence na X), pokud existuje $x_0 \in X$ t.ž.

$$A(x) = (x_0 \approx x)$$

pro každé $x \in X$.

Poznámka

Z předchozího lemmatu a definice dostáváme, že v úplně svazově L-uspořádané množině je $\sup(A)$ unikátně dáno prvkem x , pro který je¹ $\sup(A) = \{x\}$.

Lemma 8

\forall L-uspořádané množině X platí:

- *$\inf(A)$ je \approx -singleton p.k. existuje x t.ž. $(\inf(A))(x) = 1$;*
- *totéž pro $\sup(A)$.*

Důkaz.

Musíme ukázat, že pokud $(\inf(A))(x) = 1$ pro nějaké $x \in X$,
tak $\inf(A)$ je \approx -singleton.

Nejdříve ukážeme $(\inf(A))(x') \geq (x \approx x')$, tedy že

$$(x \approx x') \leq (\mathcal{L}(A))(x') \quad \text{a} \quad (x \approx x') \leq (\mathcal{UL}(A))(x').$$

Ukážeme pouze první nerovnost (druhá je duální):

Z definice \mathcal{L} ta nerovnost platí p.k.

$$(x \approx x') \leq A(y) \rightarrow (x' \preceq y) \quad \text{pro všechna } y \in X.$$

Důkaz.

$$(x \approx x') \leq A(y) \rightarrow (x' \preceq y) \quad \text{pro všechna } y \in X.$$

Dle ajdunkce to platí p.k.

$$(x \approx x') \otimes A(y) \leq (x' \preceq y) \quad \text{pro všechna } y \in X.$$

Protože $\mathcal{L}(A)(x) = 1$, dostáváme

$$\begin{aligned} (x \approx x') \otimes A(y) &= (x \approx x') \otimes A(y) \otimes (\mathcal{L}(A))(x) \\ &\leq (x \approx x') \otimes A(y) \otimes (A(y) \rightarrow (x \preceq y)) \\ &\leq (x \approx x') \otimes (x \preceq y) \\ &\leq (x' \preceq y). \end{aligned}$$

Důkaz.

Nyní ukážeme $(\inf(A))(x') \leq (x \approx x')$:

$$\begin{aligned}(\inf(A))(x') &= (\mathcal{L}(A))(x') \wedge (\mathcal{UL}(A))(x') \\&= (\mathcal{LU}\mathcal{L}(A))(x') \wedge (\mathcal{UL}(A))(x') \\&= \bigwedge_{y \in X} ((\mathcal{UL}(A))(y) \rightarrow (x' \preceq y)) \wedge \bigwedge_{y \in X} ((\mathcal{L}(A))(y) \rightarrow (y \preceq x')) \\&\leq ((\mathcal{UL}(A))(x) \rightarrow (x' \preceq x)) \wedge ((\mathcal{L}(A))(x) \rightarrow (x \preceq x')) \\&= (1 \rightarrow (x' \preceq x)) \wedge (1 \rightarrow (x \preceq x')) \\&= (x' \preceq x) \wedge (x \preceq x') = (x \approx x')\end{aligned}$$



Lemma 9

Pro L-uspořádanou množinu $\langle\langle X, \approx \rangle, \preceq\rangle$, $A, B \in L^X$ a $x, y \in X$ platí

$$\begin{aligned} S(A, B) \otimes (\inf(A))(x) \otimes (\inf(B))(y) &\leq (y \preceq x), \\ S(A, B) \otimes (\sup(A))(x) \otimes (\sup(B))(y) &\leq (x \preceq y). \end{aligned}$$

Toto je zobecnění tvrzení, že pokud $A \subseteq B$, tak

- $\inf(A) \geq \inf(B)$,
- $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Důkaz.

Dokážeme jednu nerovnost (druhá je duální)

$$\begin{aligned} & S(A, B) \otimes (\inf(A))(x) \otimes (\inf(B))(y) \\ & \leq S(\mathcal{L}(B), \mathcal{L}(A)) \otimes (\inf(A))(x) \otimes (\inf(B))(y) \\ & \leq ((\mathcal{L}(B))(y) \rightarrow (\mathcal{L}(A))(y)) \otimes (\inf(A))(x) \otimes (\inf(B))(y) \\ & \leq (\mathcal{L}(A))(y) \otimes (\inf(A))(x) \\ & \leq (\mathcal{L}(A))(y) \otimes (\mathcal{UL}(A))(x) \\ & \leq (\mathcal{L}(A))(y) \otimes \bigwedge_{x' \in X} ((\mathcal{L}(A))(x') \rightarrow (x' \preceq x)) \\ & \leq (\mathcal{L}(A))(y) \otimes ((\mathcal{L}(A))(y) \rightarrow (y \preceq x)) \\ & \leq (y \preceq x) \end{aligned}$$



Skládání L-relací

Základní situace je tato:

- Jsou dány L-relace $R \in L^{X \times Y}$ a $S \in L^{Y \times Z}$.
- Chceme z nich získat L-relaci $R * S \in L^{X \times Y}$.

Zajímají nás případy, kde $*$

- může být přirozeně popsáno slovně,
- je definováno logickými formullemi.

Příklad 10

X – množina pacientů

Y – množina symptomů nemocí

Z – množina nemocí

$R \in L^{X \times Y}$ – kdo má jaké symptomy (výsledky lékařské prohlídky)

$S \in L^{Y \times Z}$ – které symptomy souvisí s kterou nemocí (znalost)

Přirozeně chceme zjistit, kteří pacienti mají které nemoci.

Uvažujeme např.: „pacient x má nemoc z právě když platí: x má symptom y p.k. y je symptom nemoci z “

To nám dává L-relaci $R * S$ mezi X a Z , která je složením R a S , které je slovně popsáno větou v uvozovkách.

Můžeme se na to dívat takto:

- $\mathcal{J}_{\text{comp}}$ je více-druhový jazyk s druhy \mathcal{X} , \mathcal{Y} a \mathcal{Z} typu $\langle R, F, \sigma \rangle$, kde $r, s \in R$ a $\sigma(r) = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ a $\sigma(s) = \mathcal{Y}\mathcal{Z}$.
- x , y a z jsou proměnné druhů \mathcal{X} , \mathcal{Y} a \mathcal{Z} .
- $\varphi(x, z)$ je formule, která reprezentuje slovní popis složené relace (a zahrnuje r a s)

Složení L-relací definované φ je def následovně:

Pro L-relace $R \in L^{\langle X, \approx^X \rangle \times \langle Y, \approx^Y \rangle}$ a $S \in L^{\langle Y, \approx^Y \rangle \times \langle Z, \approx^Z \rangle}$ uvažujme

L-strukturu M danou takto:

- $r^M = R$, s^M je S ,
- $\approx_{\mathcal{X}}^M$ je \approx^X ,
- $\approx_{\mathcal{Y}}^M$ je \approx^Y ,
- $\approx_{\mathcal{Z}}^M$ je \approx^Z .

Formule φ indukuje binární L-relaci φ^M mezi X a Z .
 φ^M je definováno:

$$\varphi^M(x, z) = \|\varphi\|_{M, v}$$

kde $x \in X$, $z \in Z$ a v je ohodnocení t.ž. $v(x) = x$ a $v(z) = z$.

Definice 11

Binární L-relace φ^M definovaná výše se nazývá φ -složení L-relací R a S .

Termín φ -složení budu používat ve dvou smyslech:

- operace, která ze dvou L-relací R a S vytvoří novou L-relaci $R * S$.
- ta L-relace $R * S$

Lemma 12

φ -složení R a S je $(|\varphi|_{\mathbb{X}}, |\varphi|_{\mathbb{Z}})$ -kompatibilní L-relace mezi $\langle X, \approx^X \rangle$ a $\langle Z, \approx^Z \rangle$.

- to vyplývá z výsledků o podobnosti z L05.

Definice 13 (Připomínka?)

Nechť $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ a \approx_1, \approx_2 jsou L-ekvivalence na X_1, X_2 .

Binární relace $R \in L^{X_1 \times X_2}$ se nazývá (k_1, k_2) -kompatibilní s \approx_1 a \approx_2 , pokud je kompatibilní s $\approx_1^{k_1}$ a $\approx_2^{k_2}$.

Definice 14

- \circ -složení, pokud

$$\varphi = (\exists y)(r(x, y) \otimes s(y, z))$$

- \triangleleft -složení, pokud

$$\varphi = (\forall y)(r(x, y) \Rightarrow s(y, z))$$

- \triangleright -složení, pokud

$$\varphi = (\forall y)(s(y, z) \Rightarrow r(x, y))$$

- \square -složení, pokud

$$\varphi = (\forall y)(r(x, y) \Leftrightarrow s(y, z))$$

Pro $* \in \{\circ, \triangleleft, \triangleright, \square\}$ budeme $*$ -složení R a S značit $R * S$:

Takže píšeme $R \circ S$, $R \triangleleft S$, $R \triangleright S$ a $R \square S$.

Poznámka

Přímé vzorce pro $R \circ S$, $R \triangleleft S$, $R \triangleright S$ a $R \Box S$:

$$(R \circ S)(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \otimes S(y, z))$$

$$(R \triangleleft S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} (R(x, y) \rightarrow S(y, z))$$

$$(R \triangleright S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} (S(y, z) \rightarrow R(x, y))$$

$$(R \Box S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} (R(x, y) \leftrightarrow S(y, z))$$

Příklad 15 (pokračování předchozího příkladu)

Slovní popis složení:

- $(R \circ S)(x, z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém existuje symptom y , t.ž. pacient x má symptom y a y je symptom nemoci z .
- $(R \triangleleft S)(x, z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém je pravda, že pokud pacient x má symptom y , pak y je symptomem nemoci z .
- $(R \triangleright S)(x, z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém je pravda, že pacient x má všechny symptomy nemoci z .
- $(R \square S)(x, z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém je pravda, že pacient x má jen a pouze symptomy nemoci z .

Věta 16 (skládání L-relací a kompatibilita)

Mějme

- $R \in L\langle X, \approx^X \rangle \times \langle Y, \approx^Y \rangle$
- $S \in L\langle Y, \approx^Y \rangle \times \langle Z, \approx^Z \rangle$

pak $R \circ S, R \triangleleft S, R \triangleright S, R \square S \in L\langle X, \approx^X \rangle \times \langle Z, \approx^Z \rangle$.

Důkaz.

Jasný důsledek Lemmatu 12 a pozorování, že $|\varphi|_x = 1$ a $|\varphi|_z = 1$. □

Věta 17 (skládání a podobnost)

Máme

$$(R_1 \approx R_2) \otimes (S_1 \approx S_2) \leq (R_1 * S_1) \approx (R_2 * S_2)$$

pro $* \in \{\circ, \triangleleft, \triangleright, \square\}$.

- Důsledek výsledků o podobnosti z L05.

Věta 18 (skládání a inverzní relace)

Máme

$$(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$$

pro $*$ $\in \{\circ, \triangleleft, \triangleright, \square\}$.

Poznámka

Zjevně:

- $R \square S = (R \triangleleft S) \cap (R \triangleright S)$,
- $R \triangleright S = (S^{-1} \triangleleft R^{-1})^{-1}$ dle předchozí věty.

Takže můžeme uvažovat jen dvojici \circ a \triangleleft nebo dvojici \circ a \triangleright jako základní skládání L-relací.

Věta 19 (skládání a podmnožinovitost)

$$S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \leq S(R_1 \circ S_1, R_2 \circ S_2),$$

$$S(R_2, R_1) \otimes S(S_1, S_2) \leq S(R_1 \triangleleft S_1, R_2 \triangleleft S_2),$$

$$S(R_1, R_2) \otimes S(S_2, S_1) \leq S(R_1 \triangleright S_1, R_2 \triangleright S_2).$$

Důkaz: pouze první nerovnost.

Ta nerovnost je ekvivalentní

$$(R_1 \circ S_1)(x, z) \otimes S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \leq (R_2 \circ S_2)(x, z).$$

Důkaz.

A máme

$$\begin{aligned} & (R_1 \circ S_1)(x, z) \otimes S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \\ = & \left(\bigvee_{y \in Y} R_1(x, y) \otimes S_1(y, z) \right) \otimes S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \\ = & \bigvee_{y \in Y} (R_1(x, y) \otimes S_1(y, z) \otimes S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2)) \\ \leq & \bigvee_{y \in Y} (R_1(x, y) \otimes (R_1(x, y) \rightarrow R_2(x, y)) \otimes S_1(y, z) \otimes (S_1(y, z) \rightarrow S_2(y, z))) \\ \leq & \bigvee_{y \in Y} R_2(x, y) \otimes S_2(x, y) = (R_2 \circ S_2)(x, z) \end{aligned}$$

Další nerovnosti jsou podobné (dejme si to jako cvičení)

Věta 20 (skládání a distributivita)

$$(\bigcup_i R_i) \circ S = \bigcup_i (R_i \circ S)$$

$$R \circ (\bigcup_i S_i) = \bigcup_i (R \circ S_i)$$

$$(\bigcup_i R_i) \triangleleft S = \bigcap_i (R_i \triangleleft S)$$

$$R \triangleleft (\bigcap_i S_i) = \bigcap_i (R \triangleleft S_i)$$

$$(\bigcap_i R_i) \triangleright S = \bigcap_i (R_i \triangleright S)$$

$$R \triangleright (\bigcup_i S_i) = \bigcap_i (R \triangleright S_i)$$

- Důkazy jsou snadné.

Věta 21 (skládání a distributivita II)

$$(\bigcap_i R_i) \circ S \subseteq \bigcap_i (R_i \circ S)$$

$$R \circ (\bigcap_i S_i) \subseteq \bigcap_i (R \circ S_i)$$

$$(\bigcap_i R_i) \triangleleft S \supseteq \bigcup_i (R \triangleleft S_i)$$

$$R \triangleleft (\bigcup_i S_i) \supseteq \bigcap_i (R \triangleleft S_i)$$

$$(\bigcup_i R_i) \triangleright S \supseteq \bigcap_i (R_i \triangleright S)$$

$$R \triangleright (\bigcap_i S_i) \supseteq \bigcup_i (R \triangleright S_i)$$

- Důkazy jsou snadné.

Věta 22

Následující je pravdivé pro každou indexovou množinu I .

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i)$$

$$a \rightarrow \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \rightarrow b_i)$$

$$\bigvee_{i \in I} a_i \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b)$$

$$a \otimes \bigwedge_{i \in I} b_i \leq \bigwedge_{i \in I} (a \otimes b_i)$$

$$\bigvee_{i \in I} (a \rightarrow b_i) \leq a \rightarrow \bigvee_{i \in I} b_i$$

$$\bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow b) \leq \bigwedge_{i \in I} a_i \rightarrow b$$

Věta 23 (skládání a asociativita)

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

$$R \triangleleft (S \triangleright T) = (R \triangleleft S) \triangleright T$$

$$R \triangleleft (S \triangleleft T) = (R \circ S) \triangleleft T$$

$$R \triangleright (S \circ T) = (R \triangleright S) \triangleright T$$

Důkaz.

Domácí úkol