

KMI/FUZ Fuzzy logika

L10 – Fuzzy systémy

Jan Konečný

24. listopadu 2025

Obeční fuzzy regulátor se skládá ze čtyř modulů: báze fuzzy pravidel, fuzzy inferenční engine a moduly fuzzifikace/defuzzifikace:

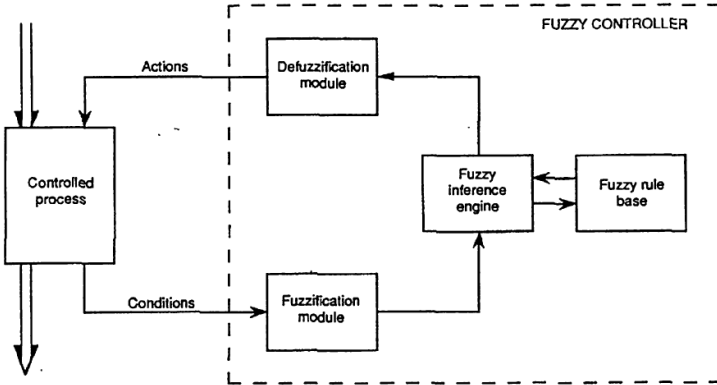


Figure 12.2 A general scheme of a fuzzy controller.

Fuzzy regulátor funguje opakováním cyklu následujících čtyř kroků:

- Nejprve se provedou měření všech proměnných, které představují relevantní podmínky řízeného procesu.
- Fuzzifikace: Tato měření převedena do vhodných L-množin pro vyjádření nejistot měření.
- Inference: Fuzzifikovaná měření jsou pak použita inferenčním modulem k vyhodnocení řídicích pravidel uložených v bázi fuzzy pravidel.
- Výsledkem je fuzzy množina (nebo několik fuzzy množin) definovaná na univerzu možných akcí.

Uvažujme velmi jednoduchý problém řízení:

- problém udržení požadované hodnoty jedné proměnné navzdory rušivým vlivům prostředí.

V tomto případě jsou regulátorem obvykle sledovány dvě podmínky:

- chyba e definovaná jako rozdíl mezi skutečnou hodnotou regulované veličiny a její požadovanou hodnotou
- derivace chyby \dot{e} která vyjadřuje rychlost změny chyby.

Pomocí hodnot e a \dot{e} vytváří fuzzy regulátor hodnoty řídicí proměnné v , která představuje relevantní regulační akce.

Krok 1: poté, co jsme identifikovali relevantní vstupní a výstupní proměnné regulatoru a jejich obory hodnot:

- vybereme pro každou z nich **lingvistické stavy**.
- a ty vyjádříme vhodnými L-množinami

Obvykle tyto fuzzy množiny budou fuzzy čísla, které představují lingvistická označení, jako: *zhruba nula*, *malé kladné číslo*, *střední kladné číslo*, atd.

Pro ilustraci:
uvažujme, že

- obory hodnot vstupních proměnných e a e jsou $[-a, a]$ a $[-b, b]$
- obor hodnot výstupní proměnné v je $[-c, c]$
- následujících 7 lingvistických stavů je použito pro všechny 3 proměnné:

NL –velké negativní	PL –velké pozitivní
NM–střední negativní	PM–střední pozitivní
NS –malé negativní	PS –malé pozitivní
AZ –zhruba nula	

NL –velké negativní

PL –velké pozitivní

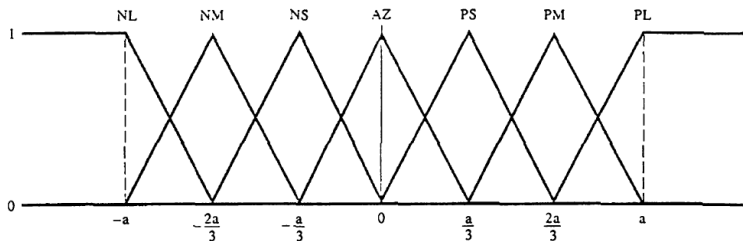
NM–střední negativní

PM–střední pozitivní

NS –malé negativní

PS –malé pozitivní

AZ –zruba nula



Možná fuzzy kvantizace oboru hodnot $[-a, a]$ triangulárními fuzzy čísly.

- Někdy mohou být vhodnější jiné tvary funkcí příslušnosti než trojúhelníky;
tvary nemusí být symetrické a nemusí být rovnoměrně rozloženy v daných rozsazích.
- Kromě toho mohou být pro různé proměnné definovány různé kvantizace.
- Některé intuitivně rozumné definice funkcí příslušnosti jsou obvykle vybírány pouze jako předběžní kandidáti. Později jsou modifikovány vhodnými metodami učení, často realizovanými neuronovými sítěmi.

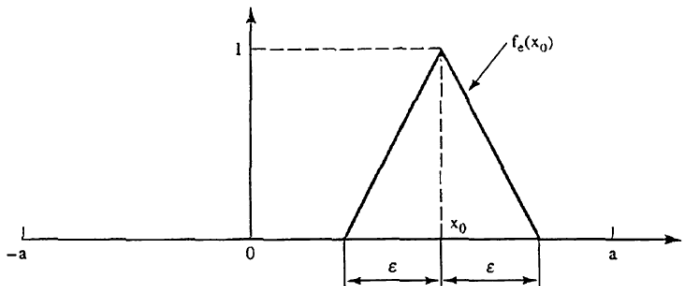
Krok 2: Fuzzifikace

- Pro každou vstupní proměnnou je zavedena fuzzifikační funkce pro vyjádření související nejistoty měření.
- Účelem fuzzifikační funkce je interpretovat měření vstupních proměnných, každou vyjádřenou reálným číslem, jako realističtější fuzzy aproximace příslušných reálných čísel.

Uvažujme jako příklad fuzzifikační funkci f_e aplikovanou na proměnnou e . Pak fuzzifikační funkce má tvar

$$f_e : [-a, a] \rightarrow \mathcal{R}$$

kde \mathcal{R} je množina všech fuzzy čísel a $f_e(x_0)$ je fuzzy číslo vybrané funkcí f_e jako fuzzy aproximace měření $e = x_0$.



Příklad fuzzifikační funkce pro proměnnou e .

Krok 3: Aplikace inferenčních pravidel

Formulovány znalosti týkající se daného řídicího problému – pomocí sady fuzzy inferenčních pravidel.

Existují dva hlavní způsoby, jak lze určit relevantní pravidla pro odvození:

- lidský expert
- z empirických dat vhodnými metodami učení, obvykle pomocí neuronových sítí.

V našem příkladě s proměnnými e , \dot{e} a v budou mít pravidla kanonický tvar

$$\text{IF } e = A \text{ AND } \dot{e} = B \text{ THEN } v = C,$$

kde A , B a C jsou fuzzy čísla z \mathcal{R} , které reprezentují lingvistické stavy NL, NM, NS, AZ, PS, PM a PL.

$$7^2 = 49.$$

Lze je pohodlně reprezentovat v maticové formě:

		e						
	v	NL	NM	NS	AZ	PS	PM	PL
e	NL	PL				PM	AZ	
	NM							
	NS	PM	PM	PS	AZ	NM		
	AZ		PS	AZ	NS			
	PS		AZ	NS	NM			
	PM	AZ	NM	NL				
	PL							

- Ta matice a definice lingvistických stavů tvoří základ fuzzy pravidel našeho fuzzy regulátoru.
- V praxi často stačí malá podmnožina všech možných fuzzy inferenčních pravidel k získání přijatelného výkonu fuzzy regulátoru.
- Vhodné ořezávání báze fuzzy pravidel může být vedeno např. statistickými údaji týkajícími se užitečnosti jednotlivých pravidel fuzzy inference za specifikovaných okolností.

Abychom experimentálně určili správná pravidla fuzzy inference, potřebujeme sadu I/O dat

$$\{\langle x_k, y_k, z_k \rangle \mid k \in K\},$$

kde z_k je požadovaná hodnota výstupní proměnné v pro dané hodnoty x_k a y_k vstupních proměnných e resp. e a K je vhodná množina indexů.

Označme: $A(x_k)$, $B(y_k)$, $C(z_k)$ – stupně příslušnosti ve fuzzy množinách reprezentujících lingvistické stavy proměnných e , e , v .

Pak je rozumné definovat **stupeň relevance** pravidla

$$\text{IF } e = A \text{ AND } \dot{e} = B \text{ THEN } v = C,$$

vzorcem

$$(A(x_k) \otimes_1 B(y_k)) \otimes_2 C(z_k),$$

kde \otimes_1, \otimes_2 jsou t-normy.

Tento stupeň, když je vypočítán pro všechna pravidla aktivovaná I/O daty, nám umožňuje vyhnout se konfliktním pravidlům v bázi pravidel.

Z pravidel, která jsou vzájemně konfliktní, vybere to s největší relevancí.

Krok 4:

Měření vstupních proměnných musí být vhodně kombinováno s příslušnými pravidly fuzzy, aby bylo možné odvodit výstupní proměnné.

To je úloha **inferenčního enginu**.

V našem příkladu s proměnnými e , \dot{e} , v můžeme postupovat následovně.

Nejprve převedeme daná fuzzy inferenční pravidla tvaru

$$\text{IF } e = A \text{ AND } \dot{e} = B \text{ THEN } v = C,$$

do ekvivalentního tvaru

$$\text{IF } \langle e, \dot{e} \rangle = A \otimes B \text{ THEN } v = C,$$

kde $[A \otimes B](x, y) = A(x) \otimes B(y)$ pro všechna $x \in [-a, a]$ a $y \in [-b, b]$.

Podobně vyjadřujeme fuzzifikovaná vstupní měření $f_e(x_0)$ a $f_e(y_0)$ jako jedno společné měření,

$$\langle e_0, \dot{e}_0 \rangle = f_e(x_0) \times f_{\dot{e}}(y_0).$$

Pak se problém inference ohledně výstupní proměnné v stává problémem následujícího přibližného uvažování:

Pravidlo 1: IF $\langle e, \dot{e} \rangle = A_1 \otimes B_1$ THEN $v = C_1$

Pravidlo 2: IF $\langle e, \dot{e} \rangle = A_2 \otimes B_2$ THEN $v = C_2$

...

Pravidlo n : IF $\langle e, \dot{e} \rangle = A_n \otimes B_n$ THEN $v = C_n$

Fakt: $\langle e, \dot{e} \rangle = f_e(x_0) \otimes f_{\dot{e}}(y_0)$

Závěr: $v = C$

Symboły A_j, B_j, C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) označují fuzzy množiny, které reprezentují lingvistické stavy proměnných e, \dot{e} a v .

Každé pravidlo považujeme za fuzzy množinu:

$$P_1 = (A_1 \otimes B_1) \otimes C_1$$

$$P_2 = (A_2 \otimes B_2) \otimes C_1$$

...

$$P_n = (A_n \otimes B_n) \otimes C_n$$

P_1, P_2, \dots, P_n jsou fuzzy relace mezi $[-a, a] \times [-b, b]$ a $[-c, c]$.

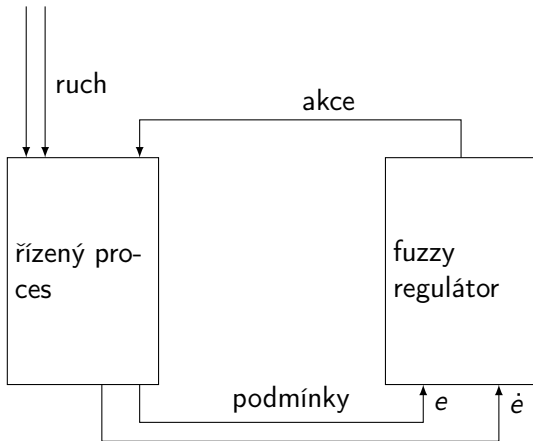
Celá báze je pak jejich sjednocení

$$\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n.$$

Inference je pak složení relací $\langle e, \dot{e} \rangle \circ \mathcal{P}$.

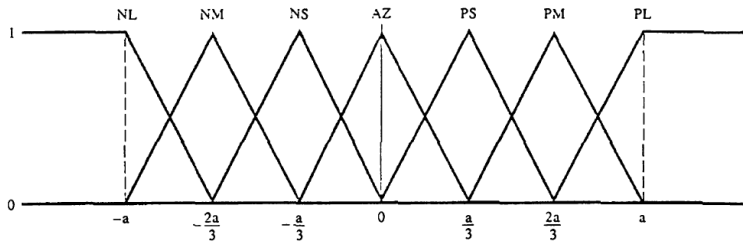
S tím, že z $\langle e, \dot{e} \rangle$ jednoduše uděláme fuzzy relaci mezi $\{1\}$ a $[-a, a] \times [-b, b]$.

$$[\langle e, \dot{e} \rangle \circ \mathcal{P}](z) = \bigvee_{\substack{x \in [-a, a] \\ y \in [-b, b]}} (f_e(x) \otimes f_{\dot{e}}(y)) \otimes (\mathcal{P}(\langle x, y \rangle, z))$$



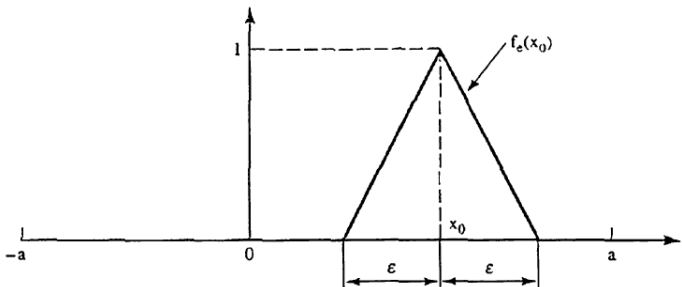
Příklad

$\otimes = \min,$
 $a = 3, b = 3$



$$x_0 = 1.25$$

$$y_0 = -0.25$$



Řekněme, že f_e i $f_{\bar{e}}$ budou používat $\epsilon = 0$ (triviální fuzzifikace, .. berem rovnou ostrou hodnotu)

Střed obsahu (též těžiště, též centroid)

:

- defuzzifikovaná hodnota $d_{CA}(C)$, je def. jako hodnota, ve které je obsah grafu příslušnosti do C rozdělený do dvou stejných částí.

Formálně:

$$d_{CA}(C) = \frac{\int_{-c}^c C(z)zdz}{\int_{-c}^c C(z)dz}$$

Pro diskrétní případ (C je def. v universu $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$):

$$d_{CA}(C) = \frac{\sum_{k=1}^n C(z_k)z_k}{\sum_{k=1}^n C(z_k)}$$

Pokud $d_{CA}(C)$ není roven žádné hodnotě v universu, vezmeme hodnotu, která je k ní nejbližší.

Také to můžeme interpretovat jako střední hodnotu (očekávanou hodnotu) proměnné v .

Střed maxima

:

- defuzzifikovaná hodnota $d_{\text{CM}}(C)$, je def. jako průměr největší a nejmenší hodnoty v , pro které $C(z)$ je výška $h(C)$.

Formálně:

$$d_{\text{CM}}(C) = \frac{\inf M + \sup M}{2},$$

kde

$$M = \{z \in [-c, c] \mid C(z) = h(C)\}.$$

A pro diskrétní případ:

$$d_{\text{CM}}(C) = \frac{\min\{z_k \mid z_k \in M\} + \max\{z_k \mid z_k \in M\}}{2},$$

kde

$$M = \{z_k \mid C(z_k) = h(C)\}.$$

Průměr maxima

:

- obvykle definovaná jen pro diskrétní případ
- defuzzifikovaná hodnota $d_{MM}(C)$, je průměr všech hodnot v množině

$$M = \{z_k \mid C(z_k) = h(C)\}$$

tj.

$$d_{MM}(C) = \frac{\sum_{z_k \in M} z_k}{|M|}$$

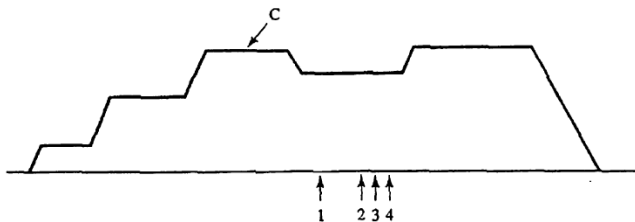
- Ve spojitém případě, když M je dáno

$$M = \{z \in [-c, c] \mid C(z) = h(C)\},$$

může být definováno jako aritmetický průměr středních hodnot všech intervalů obsažených v M , včetně intervalů délky 0.

Alternativně:

- může být def. jako vážený průměr středních hodnot intervalů; váhy jsou relativní délky intervalů.



1 – d_{CA} , 2 – d_{MM} , 3 – d_{CM} , 4 – d_{MM} s váhami

Fuzzy automaty

- konečný automat je dynamický systém pracující v diskrétním čase, který transformuje sekvence vstupních stavů (stimulů) přijatých na vstupu systému na sekvence výstupních stavů (odpovědí) produkovaných na výstupu systému.
- Sekvence mohou být konečné nebo spočetně nekonečné.
- Transformace je realizována konceptem dynamicky se měnícího vnitřního stavu.
- V každém diskrétním čase se na základě přijatého podnětu a vnitřního stavu systému určí odezva systému.
- Zároveň je určen nový vnitřní stav, který nahrazuje svého předchůdce.
- Nový vnitřní stav se uloží do systému a použije se příště.
- Automat se nazývá fuzzy automat, když jsou jeho stavy charakterizovány fuzzy množinami a produkci odpovědí a dalších stavů usnadňují vhodné fuzzy vztahy.

Definice 1

Konečný fuzzy automat je pětice

$$\mathcal{A} = \langle X, Y, Z, R, S \rangle$$

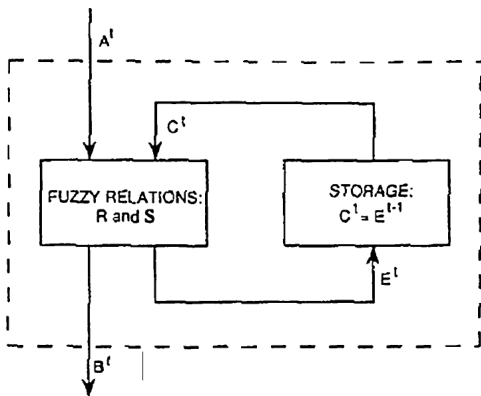
kde

- X je neprázdná konečná množina vstupních stavů (stimulů)
- Y je neprázdná konečná množina výstupních stavů (odpovědí)
- Z je neprázdná konečná množina vnitřních stavů,
- R je fuzzy relace na $Z \times Y$,
- S je fuzzy relace na $X \times Z \times Z$.

Uvažujeme, že $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$,
 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_q\}$.

Nechť A^t, B^t, C^t, E^t oznažují fuzzy množiny, které charakterizují stimul, odpověď, současný interní stav a následující interní stav automatu v čase t .

Myšlenka fuzzy automatu.



Pro lib. daný vstupní stav A' je z ternární přechodová relace S vytvořena binární relace S_{A^t} na $Z \times Z$:

$$S_{A^t} = \max_{k \in \mathbb{N}} (\min[A^t(x_k), (x_k, z_i, z_j)]) \quad \text{pro všechna } z_i, z_j \in Z.$$

Pak, je-li dán současný fuzzy stav C^t , následující stav E^t a fuzzy výstupní stav B^t jsou určeny:

$$E^t = C^t \circ S_{A^t}$$

$$B^t = C^t \circ R$$

Tyto rovnice jsou dostatečné pro zpracování sekvencí fuzzy stavů.

Příklad 2

Uvažujme posloupnost A^1, A^2, \dots, A^r fuzzy vstupních stavů aplikovaných na daný iniciační fuzzy stav C^1 .

Pak, fuzzy automat produkuje sekvenci vnitřních stavů a odpovídající posloupnost výstupních stavů:

$$E^1 = C^1 \circ S_{A^1}$$

$$B^1 = C^1 \circ R$$

$$E^2 = E^1 \circ S_{A^2}$$

$$B^2 = E^1 \circ R$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$E^r = E^{r-1} \circ S_{A^r}$$

$$B^r = E^{r-1} \circ R.$$

Pokud nás zajímá pouze finální vnitřní stav a finální výstupní stav, můžeme použít:

$$E^r = C^1 \circ S_{A^1} \circ S_{A^2} \circ \dots \circ S_{A^r}$$

$$B^r = C^1 \circ S_{A^1} \circ S_{A^2} \circ \dots \circ S_{A^{r-1}} \circ R$$

Příklad 3

Uvažujme automat s

- $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$,
- výstupní relací R a přechodovou relací S :

R	y_1	y_2	y_3
z_1	1	0	0
z_2	0	1	0
z_3	0	0	1
z_4	0.5	1	.3

$S(x_1, \cdot, \cdot)$	z_1	z_2	z_3	z_4	$S(x_2, \cdot, \cdot)$	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	0	0.4	0.2	1	z_1	0	0	1	0
z_2	0.3	1	0	0.2	z_2	0.2	0	0	1
z_3	0.5	0	0	1	z_3	0	0	0	1
z_4	0	0	0	1	z_4	1	0.3	0	0.6

Příklad 4

Abychom popsali, jak tento fuzzy automat funguje, budeme značit vstupy, výstupy a interní stavy v čase t vektory:

$$A^t = [A^t(x_1), A^t(x_2)]$$

$$B^t = [B^t(y_1), B^t(y_2), B^t(y_3)]$$

$$C^t = [C^t(z_1), C^t(z_2), C^t(z_3), C^t(z_4)].$$

Uvažme iniciální stav automatu $C^1 = [1, 0.8, 0.6, 0.4]$ a vstupní stav $A^1 = [1, 0.4]$.

Např.

$$\begin{aligned} S_{A^1}(z_1, z_3) &= A^1(x_1) \otimes S(x_1, z_1, z_3) \vee A^1(x_2) \otimes S(x_2, z_1, z_3) \\ &= \max(\min[1, 0.2], \min[0.4, 1]) \\ &= \max(0.2, 0.4) = 0.4. \end{aligned}$$

Příklad 5

Vypočítáme další stav E^1

$$E^1 = [1 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.4] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 & 1 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0.5 \quad 0.8 \quad 0.4 \quad 1]$$

a výstupní stav B^1 :

$$B^1 = [1 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.4] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \end{bmatrix} = [1 \quad 0.8 \quad 0.6]$$

Příklad 6

Když další vstupní stav bude $A^2 = [0, 1]$ dostaneme

$$E^2 = E^1 \circ S_{A^2} [0.5 \quad 0.8 \quad 0.4 \quad 0.1] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} = [1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.8]$$

a výstupní stav B^1 :

$$B^2 = E^1 \circ R = [0.5 \quad 0.8 \quad 0.4 \quad 1] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \end{bmatrix} = [5 \quad 1 \quad 0.3]$$

Podobně generujeme delší sekvence fuzzy interních a výstupních stavů pro libovolnou sekvenci vstupů.

- Abychom mohli definovat smysluplný fuzzy automat, relace R a S nemohou být libovolné.
- Například nějaký další interní stav a nějaký výstupní stav musí být zajištěn pro jakýkoli daný vstupní stav a současný vnitřní stav. Tj.
- pro každý pár $\langle x_k, z_i \rangle \in X \times Z$ musíme vyžadovat, aby $S(x_k, z_i, z_j) > 0$ pro aspoň jedno $z_j \in Z$;
- pro každé $z_i \in Z$ musíme vyžadovat, aby $R(z_i, y_l) > 0$ pro aspoň jedno $y_l \in Y$.

Ty požadavky můžeme ještě zesílit:

- pro každý pár $\langle x_k, z_i \rangle \in X \times Z$ musíme vyžadovat, aby $S(x_k, z_i, z_j) = 1$ pro právě jedno $z_j \in Z$;
- pro každé $z_i \in Z$ musíme vyžadovat, aby $R(z_i, y_l) = 1$ pro právě jedno $y_l \in Y$.

Automat, který splňuje ty přísnější požadavky se nazývá **deterministický**.