

KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM01 – Úvod, motivace,
struktury pravdivostních stupňů

Jan Konečný

22. srpna 2026

Fuzzy množiny

Centrálním pojmem tohoto kurzu je fuzzy množina.

- Fuzzy množiny slouží k modelování souborů objektů, u nichž je nejlepší odpovědí na otázku, zda objekt do souboru patří, určitý **pravdivostní stupeň** z vhodné uspořádané škály.
- Škála může obsahovat víc než dva stupně 0 a 1 („ne“ a „ano“) – jsou tam i mezistupně.

Fuzzy množina je určena

- universem objektů, kterých se otázka příslušnosti týká,
- škálou pravdivostních stupňů,
- pravidlem, které stupně přiřazuje.

Dnes se budeme věnovat hlavně druhému bodu: jak má škála vypadat a jak se na ní počítá.

Proč vlastně?

- Protože člověk používá **vágní pojmy** – a ty se klasickou dvouhodnotovou logikou modelují špatně.

Příklady vágních pojmů:

vysoký teplý mladý rychlý asi pět skoro plný

Hranice není ostrá: mezi „určitě ano“ a „určitě ne“ je plynulý přechod.
Ostré rozseknutí je násilné – a vede k paradoxům.

Paradox hromady

Paradox hromady (sorites paradox) je označení pro skupinu paradoxů vycházejících z vágnosti termínů.

Hromada skládající se pouze z jednoho zrnka písku je malá. Pokud přidáte jedno zrnko na malou hromadu, zůstane malá. Každá hromada je proto malá.

Eubúlídés z Milétu (4. století př. n. l.)

Formálně: $S(x)$ znamená „hromada o x zrnkách písku je malá“.

Předpoklady:

- $S(1)$,
- $S(x) \Rightarrow S(x + 1)$.

Modus ponens (MP):

$$\frac{\varphi \ \& \ (\varphi \Rightarrow \psi)}{\psi}$$

Ukážeme, že $S(n)$ platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$:

z $S(1)$ a $S(1) \Rightarrow S(2)$ dostaneme $S(2)$;

z $S(2)$ a $S(2) \Rightarrow S(3)$ dostaneme $S(3)$;

z $S(3)$ a $S(3) \Rightarrow S(4)$ dostaneme $S(4)$;

...

Tedy i hromada o milionu zrněk je malá?!

Kde je chyba?

- Druhá premisa $S(x) \Rightarrow S(x + 1)$ není *úplně* pravdivá – jen *skoro*.
- Dvouhodnotová logika umí jen 0 a 1: „skoro pravdivé“ musí zaokrouhlit na pravdivé.
- Nepatrná chyba se pak miliónkrát nasčítá.

Nápad: připustíme **stupně pravdivosti** a sledujme, jak se pravdivost řetězem odvození *přenáší*.

Rozřešení paradoxu ve stupních

Stupně ze škály $[0, 1]$:

$$\|S(1)\| = 1, \quad \|S(x) \Rightarrow S(x + 1)\| = 0.9999.$$

Druhou premisu už nezaokrouhlujeme – přiznáváme jí „skoro-pravdivost“.

Zobecněný modus ponens

Z φ ve stupni a a $\varphi \Rightarrow \psi$ ve stupni c odvod' ψ ve stupni alespoň

$$a \otimes c,$$

kde $\otimes$ je vhodná „konjunkce stupňů“; zde

$$a \otimes c = \max(0, a + c - 1).$$

Opakováním:

$$\|S(n)\| \geq \max(0, 1 - (n - 1) \cdot 0.0001).$$

Co odhady říkají

n	dolní odhad $\ S(n)\ $
2	0.9999
101	0.99
5 001	0.5
9 001	0.1
$\geq 10\,001$	0

- Malé hromady: skoro jistota. Střední: nevíme nic moc. Velké: řetěz *nic* netvrdí.
- Paradox zmizel: pravdivost se přenáší **po kapkách**, ne skokem.

Varianta: holohlavý muž

$N(x)$: „muž s x vlasy není plešatý“. Vyjděme z plné hlavy (100 000 vlasů):

$$\|N(100\,000)\| = 1, \quad \|N(x+1) \Rightarrow N(x)\| = 0.999.$$

Po k ztracených vlasech:

$$\|N(100\,000 - k)\| \geq \max(0, 1 - 0.001 k).$$

- Od $k = 1000$ je odhad jen triviální ≥ 0 .
- Závěr „muž bez vlasů není plešatý“ odvodit nelze – řetěz dá jen dolní odhad 0. ✓

Druhý příklad: nerozlišitelné barvy

Řada barevných vzorků $A_1, A_2, \dots, A_k$:

- sousední vzorky lidské oko nerozliší,
- krajní vzorky jsou zjevně různé.

Klasicky: „stejná barva“ = nerozlišitelnost.

Jenže nerozlišitelnost **není tranzitivní!**

Fuzzy řešení: podobnost ve stupních $\|A \approx B\| \in [0, 1]$ a **stupňovaná tranzitivita**

$$\|A \approx B\| \otimes \|B \approx C\| \leq \|A \approx C\|.$$

Například z $\|A_1 \approx A_2\| = 0.9$ a $\|A_2 \approx A_3\| = 0.9$:

$$\|A_1 \approx A_3\| \geq 0.9 \otimes 0.9 = 0.8.$$

Podobnost po řetězci *slábne* – přesně jak má.

Co potřebujeme od škály stupňů

Chceme počítat se stupni složených tvrzení z jednodušších: **pravdivostní funkčnost**

$$\|\varphi \& \psi\| = \|\varphi\| \otimes \|\psi\|.$$

Jaké vlastnosti má mít operace $\otimes$ na škále L ?

Požadavek 1 a 2: komutativita, asociativita

- $\varphi \& \psi$ a $\psi \& \varphi$ mají mít týž stupeň:

$$a \otimes b = b \otimes a.$$

- Na uzávorkování nemá záležet:

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$$

Požadavek 3: neutralita jedničky

- Konjunkce s úplnou pravdou nemá nic změnit:

$$a \otimes 1 = a.$$

Důsledek (spolu s monotonií, viz dále):

$$a \otimes b \leq a \otimes 1 = a,$$

tedy $a \otimes b \leq a \wedge b$ – konjunkce nikdy nepřeroste své argumenty.

Požadavek 4: monotonie

- Pravdivější argumenty nemají dát méně pravdivý závěr:

$$a \leq b \implies a \otimes c \leq b \otimes c.$$

Důsledek: $a \otimes 0 \leq 1 \otimes 0 = 0$, tedy

$$a \otimes 0 = 0.$$

Konjunkce s úplnou nepravdou je nepravda. ✓

Kvíz: co je dobrá fuzzy konjunkce?

Které operace na $[0, 1]$ splňují všechny čtyři požadavky?

$\min(a, b)$	?
$a \cdot b$	?
$\max(0, a + b - 1)$	?
$\max(a, b)$	?
$(a + b)/2$	?

Kvíz: řešení

$\min(a, b)$	✓	neutrální prvek je 0 – „disjunkce“ není asociativní ani neutrální
$a \cdot b$	✓	
$\max(0, a + b - 1)$	✓	
$\max(a, b)$	✗	
$(a + b)/2$	✗	

Průměr se nám bude hodit později (FM11) – ale konjunkce to není.

A implikace?

Implikaci potřebujeme kvůli modu ponens: z $\|\varphi\| = a$ a $\|\varphi \Rightarrow \psi\| = c$ chceme zaručit

$$\|\psi\| \geq a \otimes c.$$

Jaká hodnota $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$ je ta „správná“?

Aby zaručený odhad byl co nejužitečnější, má být $a \rightarrow b$ **největší** stupeň c , pro který $a \otimes c \leq b$:

$$a \rightarrow b = \bigvee \{ c \mid a \otimes c \leq b \}.$$

Implikace = „kolik nejvýš smím přiznat podmíněnému tvrzení, aby mě modus ponens nepodvedl“.

Adjunkce

Ekvivalentně (a elegantněji):

$$a \otimes c \leq b \quad \text{právě když} \quad c \leq a \rightarrow b.$$

- Této vazbě mezi $\otimes$ a $\rightarrow$ říkáme **adjunkce**.
- Stane se motorem celého kurzu – většina důkazů je jejím obratným použitím.

Příklad: residuum minima

Zvolme $\otimes = \min$ na $[0, 1]$. Jaké je $a \rightarrow b$?

Hledáme největší c s

$$\min(a, c) \leq b.$$

Rozlišíme dva případy podle vztahu a a b .

Případ $a \leq b$:

$$\min(a, c) \leq a \leq b \quad \text{pro každé } c,$$

takže největší vyhovující c je 1:

$$a \rightarrow b = 1.$$

Dává smysl: je-li závěr aspoň tak pravdivý jako předpoklad, implikace platí naplno.

Případ $a > b$:

- pro $c \leq b$ je $\min(a, c) = c \leq b$ ✓
- pro $c > b$ je $\min(a, c) > b$ ✗

Největší vyhovující c je tedy b .

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b, \\ b & a > b \end{cases} \quad (\text{Gödelovo residuum})$$

Tři základní volby na $[0, 1]$

	$a \otimes b$	$a \rightarrow b$ pro $a > b$
Łukasiewiczova	$\max(0, a+b-1)$	$1 - a + b$
Gödelova	$\min(a, b)$	b
součinnová	$a \cdot b$	b/a

(pro $a \leq b$ je vždy $a \rightarrow b = 1$)

- Každá z trojice splňuje všechny naše požadavky – volba je **modelovací rozhodnutí**.
- Liší se chováním: Łukasiewicz „sčítá nedostatky“, Gödel „rozhoduje nejslabším článkem“, součin „násobí rezervy“.
- Vrátime se k nim mnohokrát – příklady v kurzu počítáme zpravidla nad Łukasiewiczem a Gödelem.

Klasická logika jako speciální případ

Na dvouprvkové škále $L = \{0, 1\}$:

- všechny tři volby $\otimes$ splynou s klasickou konjunkcí,
- všechna tři residua s klasickou implikací.

Fuzzy svět klasický svět *obsahuje* – nic z klasické matematiky nezahazujeme.

Kvantifikátory

Chceme také „pro všechna“ a „existuje“:

$$\|(\forall x) \varphi\| = \bigwedge_x \|\varphi(x)\|, \quad \|(\exists x) \varphi\| = \bigvee_x \|\varphi(x)\|.$$

- „Pro všechna“ = infimum: tvrzení je tak pravdivé jako v nejhorším případě.
- „Existuje“ = supremum: tak pravdivé jako v nejlepším případě.

Úplnost škály

- Infima a suprema musí existovat pro *libovolné* podmnožiny škály.
- Škála má tedy být **úplný svaz**.
- $[0, 1]$ s přirozeným uspořádáním vyhovuje; konečné řetězce také.

Struktury pravdivostních stupňů

Shrnutí požadavků – úplný residuovaný svaz:

$$L = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$$

- $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ úplný svaz,
- $\langle L, \otimes, 1 \rangle$ komutativní monoid,
- $\otimes$ a $\rightarrow$ svázané adjunkcí.

Přesná definice a vlastnosti: příští přednáška.

Kdo to vymyslel

- Speciální případy residuovaných svazů: Ward a Dilworth (1939) – čistá algebra, o fuzzy ještě ani zdání.
- Jako struktury pravdivostních hodnot fuzzy logiky je identifikoval Goguen (1969) v článku *The logic of inexact concepts*.

Lotfi A. Zadeh (1921–2017)

- Narozen v Baku, studia v Teheránu, MIT a Columbia; profesor v Berkeley.
- Před „fuzzy obdobím“ klasik teorie systémů (z-transformace, stavový popis).
- Článek *Fuzzy sets* napsal ve 44 letech (1965) – přes sto tisíc citací.
- Navázal lingvistickými proměnnými, přibližným usuzováním (1973–75) a teorií možnosti (1978) – vše potkáme.

Trocha historie: těžké začátky

- Slovo *fuzzy* („rozmazaný, chlupatý“) znělo v 70. letech nevědecky.
- R. Kálmán (1972): „fuzzifikace je druh vědecké permisivity“.
- Senátor W. Proxmire zvažoval pro fuzzy výzkum svou „cenu“ Golden Fleece za plýtvání penězi daňových poplatníků.

... a šťastný konec

- Japonsko předsudky nemělo: fuzzy řízení metra v Sendai (1987), pračky, fotoaparáty, rýžovary.
- *Fuzzy* = japonské slovo roku 1990.
- 2017: fuzzy logika obdržela [Golden Goose Award](#) – cenu pro výzkum, který se zprvu zdál podivný a nakonec se mnohonásobně vyplatil.

Plán kurzu

1. Struktury stupňů: residuované svazy, t-normy (FM02–FM03).
2. Fuzzy množiny a relace (FM04).
3. Relační teorie: vlastnosti, uzávěry, uspořádání, podobnost (FM05–FM07).
4. Fuzzy čísla a aritmetika (FM08).
5. Relační rovnice; Galoisovy konexe a pojmy z dat (FM09–FM10).
6. Agregace, přibližné usuzování, výhled (FM11–FM13).

Kontrolní otázky

1. Kde přesně selhává klasické odvození v paradoxu hromady?
2. Spočtěte dolní odhad $\|S(3)\|$ a $\|S(5002)\|$.
3. Proč požadujeme, aby 1 byla neutrálním prvkem konjunkce?
4. Odvoďte z adjunkce, že $a \rightarrow b$ je největší c s $a \otimes c \leq b$.
5. Je $\max(a, b)$ dobrá fuzzy konjunkce? Proč ne?
6. Odvoďte residuum Łukasiewiczovy t-normy (návod: řešte $a + c - 1 \leq b$).

Shrnutí

- Vágní pojmy vyžadují **stupně pravdivosti** – ano/ne rozsekání vede k paradoxům (sorites, plešatost, barvy).
- Konjunkce $\otimes$: komutativní, asociativní, monotonní, neutrální 1.
- Implikace $\rightarrow$: nejlepší odhad pro modus ponens – **adjunkce**.
- Kvantifikátory = infima a suprema $\Rightarrow$ **úplný svaz**.
- Dohromady: **úplný residuovaný svaz**.

Příště: residuované svazy pořádně.

Ke čtení: skripta, kapitola 1.