

KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM02 – Residuované svazy

Jan Konečný

4. října 2026

Minule

- Vágní pojmy $\Rightarrow$ stupně pravdivosti; paradoxy mizí, když se pravdivost přenáší po kapkách.
- Fuzzy konjunkce $\otimes$: komutativní, asociativní, monotonní, neutrální 1.
- Implikace $\rightarrow$: největší doplněk – [adjunkce](#).
- Kvantifikátory = infima a suprema $\Rightarrow$ úplný svaz.

Dnes požadavky shrneme do formální definice a odvodíme, co z ní plyne.

Plán:

- definice úplného residuovaného svazu,
- příklady,
- vlastnosti plynoucí z adjunkce,
- chování $\otimes$ a $\rightarrow$ vzhledem k infimům a supremům,
- odvozené operace: negace, biresiduum.

Definice 1 (úplný residuovaný svaz)

Úplný residuovaný svaz je algebra $L = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$, kde

- $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je úplný svaz s nejmenším prvkem 0 a největším 1,
- $\langle L, \otimes, 1 \rangle$ je komutativní monoid,
- $\otimes$ a $\rightarrow$ splňují adjunkci:

$$a \otimes b \leq c \quad \text{právě když} \quad a \leq b \rightarrow c.$$

Terminologie a čtení

- $\otimes$ se nazývá **multiplikace**, $\rightarrow$ **residuum** – odtud *residuovaný* svaz.
- Prvky L = stupně pravdivosti; 0 nepravda, 1 pravda.
- $\wedge, \vee$: infima a suprema – kvantifikátory a „slabé“ spojky.
- $\otimes$: (silná) konjunkce; $\rightarrow$: implikace.

Residuum je určeno násobením

Z adjunkce plyne

$$b \rightarrow c = \bigvee \{ a \mid a \otimes b \leq c \}$$

– a tedy:

- residuum nelze volit nezávisle: ke každému (vhodnému) $\otimes$ patří *právě jedno* $\rightarrow$,
- $b \rightarrow c$ je *největší* stupeň, který spolu s b nepřesáhne c .

Příklad 2 (standardní Łukasiewiczova algebra)

$$L = [0, 1],$$

$$a \otimes b = \max(0, a + b - 1), \quad a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b).$$

- Násobení „sčítá nedostatky“: $0.8 \otimes 0.8 = 0.6$, $0.5 \otimes 0.5 = 0$.
- Ověření adjunkce: $a + b - 1 \leq c$ p.k. $a \leq 1 - b + c$. ✓

Příklad 3 (standardní Gödelova algebra)

$$L = [0, 1],$$

$$a \otimes b = \min(a, b), \quad a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b, \\ b & a > b. \end{cases}$$

Residuum jsme odvodili minule přímo z definice.

Příklad 4 (standardní součinná algebra)

$$L = [0, 1],$$

$$a \otimes b = a \cdot b, \quad a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b, \\ b/a & a > b. \end{cases}$$

Sami: ověřte, že b/a je opravdu největší c s $a \cdot c \leq b$.

Odvození Łukasiewiczova residua

Hledáme největší c s $\max(0, a + c - 1) \leq b$:

- podmínka je $a + c - 1 \leq b$, tj. $c \leq 1 - a + b$;
- největší vyhovující c je tedy $\min(1, 1 - a + b)$.

$$a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b)$$

Pro $a \leq b$ vyjde 1; pro $a > b$ vyjde $1 - a + b$ – „jedna minus schodek“.

Odvození součinnového residua

Hledáme největší c s $a \cdot c \leq b$ (pro $a > 0$):

$$c \leq b/a \implies a \rightarrow b = \min(1, b/a).$$

- Pro $a \leq b$: podíl ≥ 1 , tedy $a \rightarrow b = 1$.
- Pro $a = 0$: podmínka platí vždy, $0 \rightarrow b = 1$.

Dvouprvková Booleova algebra

$L = \{0, 1\}$:

- všechny tři standardní struktury na ní splnou,
- $\otimes$ je klasická konjunkce, $\rightarrow$ klasická implikace.

Klasická logika je **speciální případ** – vše, co v kurzu dokážeme, platí i klasicky.

První důsledky adjunkce: modus ponens

Věta 5

$$a \otimes (a \rightarrow b) \leq b.$$

Důkaz.

Z $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$ dá adjunkce (čtená zprava doleva)

$$(a \rightarrow b) \otimes a \leq b. \quad \square$$

Zobecněný modus ponens z L01 tedy *funguje*: odhad $a \otimes c$ je korektní.

První důsledky adjunkce: porovnávání

Věta 6

$a \leq b$ právě když $a \rightarrow b = 1$.

Důkaz.

$a \rightarrow b = 1$ p.k. $1 \leq a \rightarrow b$ p.k. (adjunkce) $1 \otimes a \leq b$ p.k. $a \leq b$. $\square$

Implikace „měří“, zda platí nerovnost – plný stupeň právě při $a \leq b$.

Krajní hodnoty

Věta 7

$$1 \rightarrow a = a, \quad a \rightarrow a = 1, \quad a \rightarrow 1 = 1, \quad 0 \rightarrow a = 1.$$

Důkaz.

$a \rightarrow a = 1$, $a \rightarrow 1 = 1$, $0 \rightarrow a = 1$ přímo z předchozí věty. $1 \rightarrow a$: „ $\leq a$ “ z modu ponens ($1 \otimes (1 \rightarrow a) \leq a$); „ $\geq a$ “ z adjunkce na $a \otimes 1 \leq a$. $\square$

Ex falso quodlibet ($0 \rightarrow a = 1$) platí i fuzzy.

Monotonie násobení

Věta 8

$a \leq b$ implikuje $a \otimes c \leq b \otimes c$.

Důkaz.

Z $b \otimes c \leq b \otimes c$ dá adjunkce $b \leq c \rightarrow (b \otimes c)$. Tedy i $a \leq c \rightarrow (b \otimes c)$, a adjunkce zpět: $a \otimes c \leq b \otimes c$. $\square$

Monotonie residua

Věta 9

Nechť $a \leq b$. Pak

$$b \rightarrow c \leq a \rightarrow c \quad a \quad c \rightarrow a \leq c \rightarrow b.$$

Důkaz.

První: $(b \rightarrow c) \otimes a \leq (b \rightarrow c) \otimes b \leq c$ (monotonie + MP); adjunkce.

Druhá obdobně. □

→ je **antitonní** v prvním a **izotonní** ve druhém argumentu – zapamatovat!

Proč $a \otimes b \leq a \wedge b$

Proposition 1

$a \otimes b \leq a \wedge b$; speciálně $a \otimes b \leq a$.

Důkaz.

$$a \otimes b \leq a \otimes 1 = a \quad a \otimes b = b \otimes a \leq b.$$



- Silná konjunkce je vždy pod infimem – „tvrdí víc, platí méně“.
- Rovnost $\otimes = \wedge$ jen pro idempotentní $\otimes$ (Gödel).

Currying

Věta 10

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \otimes b) \rightarrow c.$$

Důkaz.

Pro každé x :

$$x \leq a \rightarrow (b \rightarrow c) \text{ p.k. } x \otimes a \leq b \rightarrow c \text{ p.k. } x \otimes a \otimes b \leq c \text{ p.k. } x \leq (a \otimes b) \rightarrow c,$$

tříkrát adjunkce. Obě strany mají tytéž dolní odhady, tedy se rovnají. $\square$

Vnořené implikace = implikace z konjunkce – budeme používat neustále.

Tranzitivita implikace

Věta 11

$$(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c.$$

Důkaz.

$$(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \otimes a \leq (b \rightarrow c) \otimes b \leq c$$

(dvakrát modus ponens); adjunkce.



„Řetězení implikací“ – základ tranzitivity všech podobností a inkluzí v kurzu.

Ještě jeden důsledek adjunkce

Proposition 2

$$a \leq b \rightarrow (a \otimes b).$$

Důkaz.

Z $a \otimes b \leq a \otimes b$ dá adjunkce přímo $a \leq b \rightarrow (a \otimes b)$. □

Čtení: „ a stačí na to, aby z b vyrobilo $a \otimes b$ “.

Spolu s modus ponens je to „obousměrný“ vztah mezi $\otimes$ a $\rightarrow$.

Přehled monotonie

operace	1. argument	2. argument
$\otimes$	izotonní	izotonní
$\wedge, \vee$	izotonní	izotonní
$\rightarrow$	antitonní	izotonní
$\leftrightarrow$	ani jedno („tvar V“)	
$\neg$	antitonní	–

Tuhle tabulku budete potřebovat snad v každém důkazu kurzu.

Pozor: co obecně neplatí

- **Idempotence** $a \otimes a = a$: jen Gödel. V Łukasiewiczově algebře $0.5 \otimes 0.5 = 0$.
- **Vyloučený třetí** $a \vee \neg a = 1$: neplatí (pro $a = 0.5$ v žádné standardní struktuře).
- **Zákon dvojí negace** $\neg\neg a = a$: jen ???

Intuici z klasické logiky je třeba vždy *ověřit*.

$\otimes$ a suprema

Věta 12

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i).$$

Důkaz.

„ $\geq$ “: monotonie a přechod k supremu.

„ $\leq$ “: stačí $\bigvee_i b_i \leq a \rightarrow \bigvee_j (a \otimes b_j)$. Pro každé i je $a \otimes b_i \leq \bigvee_j (a \otimes b_j)$, adjunkcí $b_i \leq a \rightarrow \bigvee_j (a \otimes b_j)$; supremum přes i . □

$\rightarrow$ a suprema/infima

Věta 13

$$\left(\bigvee_i a_i\right) \rightarrow b = \bigwedge_i (a_i \rightarrow b), \quad a \rightarrow \bigwedge_i b_i = \bigwedge_i (a \rightarrow b_i).$$

- Residuum mění suprema v prvním argumentu na **infima** a infima ve druhém zachovává.
- Důkazy stejným stylem jako u $\otimes$ – rozmyslete si je (cvičení).
- Tyto tři zákony ponesou skládání relací, šipkové operátory i relační rovnice.

Příklad: Łukasiewicz

$a = 0.5$, $\{b_1, b_2\} = \{0.2, 0.6\}$:

$$a \otimes (b_1 \vee b_2) = 0.5 \otimes 0.6 = 0.1,$$

$$(a \otimes b_1) \vee (a \otimes b_2) = 0 \vee 0.1 = 0.1.$$

$$(b_1 \vee b_2) \rightarrow a = 0.6 \rightarrow 0.5 = 0.9,$$

$$(b_1 \rightarrow a) \wedge (b_2 \rightarrow a) = 1 \wedge 0.9 = 0.9.$$

Co platí jen napůl

$$a \otimes \bigwedge_i b_i \leq \bigwedge_i (a \otimes b_i),$$

$$\bigvee_i (a \rightarrow b_i) \leq a \rightarrow \bigvee_i b_i,$$

$$\bigvee_i (a_i \rightarrow b) \leq \left(\bigwedge_i a_i \right) \rightarrow b.$$

- Rovnosti obecně **neplatí**.
- Zapamatujte si *směry* – ušetří to trápení v důkazech.

Negace

Definice 14

$$\neg a = a \rightarrow 0.$$

- „ a implikuje spor.“
- Łukasiewicz: $\neg a = 1 - a$.
- Gödel i součin: $\neg a = 0$ pro $a > 0$, $\neg 0 = 1$ – „drastická“ negace.

Vlastnosti negace

Proposition 3

$$a \leq \neg\neg a, \quad \neg a = \neg\neg\neg a, \quad a \otimes \neg a = 0.$$

Důkaz.

Třetí: modus ponens s $b = 0$. První: z $a \otimes \neg a \leq 0$ dá adjunkce $a \leq \neg\neg a$.

Druhá: „ $\leq$ “ je první vlastnost pro $\neg a$; „ $\geq$ “ z antitonie $\neg$ na $a \leq \neg\neg a$. $\square$

Dvojitá negace nikdy „nezmenšuje“; rovnost je zvláštnost (Łukasiewicz).

Biresiduum

Definice 15

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a).$$

- Biresiduum měří **shodu** dvou stupňů.
- Łukasiewicz: $a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$ – „jedna minus vzdálenost“.
- Gödel: $a \leftrightarrow b = 1$ pro $a = b$, jinak $\min(a, b)$.

Vlastnosti biresidua

Věta 16

$$a \leftrightarrow a = 1,$$

$$a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a,$$

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq a \leftrightarrow c,$$

$$a \leftrightarrow b = 1 \quad \text{právě když} \quad a = b.$$

Reflexivita, symetrie, (stupňovaná) tranzitivita a „oddělování“ – biresiduum je vzor všech *podobností* v kurzu.

Důkaz tranzitivity biresidua.

Stačí obě nerovnosti

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq a \rightarrow c \quad a \cdots \leq c \rightarrow a.$$

První: $a \leftrightarrow b \leq a \rightarrow b$ a $b \leftrightarrow c \leq b \rightarrow c$, takže

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$$

podle tranzitivity residua. Druhá symetricky; infimum obou dá
 $\leq a \leftrightarrow c$.



Biresiduum v jednotlivých strukturách

struktura	$a \leftrightarrow b$ (pro $a \neq b$)
Łukasiewiczova	$1 - a - b $
Gödelova	$\min(a, b)$
součinná	$\min(a, b) / \max(a, b)$

- Łukasiewicz měří *vzdálenost*, Gödel *menší z hodnot*, součin *poměr*.
- Tři různé představy o „shodě stupňů“ – vyberte podle aplikace.

Dvě konjunkce

V kurzu budeme soustavně používat *obě* konjunkce:

- $\otimes$ tam, kde se stupně **řetězí** (tranzitivita, skládání relací, modus ponens),
- $\wedge$ tam, kde se bere **společné minimum** (průniky, infima, slabá konjunkce).

Nezaměňovat! Klasicky splývají, fuzzy nikoli.