

KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM03 – T-normy a významné třídy
residuovaných svazů

Jan Konečný

12. října 2026

Minule

- Úplné residuované svazy: úplný svaz + komutativní monoid + adjunkce.
- Tři standardní struktury na $[0, 1]$; adjunkce jako motor důkazů.
- $\otimes$ distribuuje přes suprema; $\rightarrow$ obrací suprema na infima.
- Negace $\neg a = a \rightarrow 0$, biresiduum $\leftrightarrow$.

Obecný residuovaný svaz je velmi volný pojem. Dnes:

- dodatečné podmínky a jejich význam,
- významné třídy residuovaných svazů,
- residuované svazy na $[0, 1]$: **t-normy**,
- tři základní spojitě t-normy a Mostertova–Shieldsova věta.

Definice 1 (dodatečné podmínky)

Residuovaný svaz může navíc splňovat

$$(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$$

(prelinearita),

$$a \wedge b = a \otimes (a \rightarrow b)$$

(dělitelnost),

$$\neg\neg a = a$$

(zákon dvojí negace),

$$a \otimes a = a$$

(idempotence).

Probereme je jednu po druhé.

Prelinearita

$$(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$$

- Každé dva stupně jsou „implikačně srovnatelné“.
- Algebraický význam: struktura je složitelná z řetězců.

Proposition 1

Na řetězci (např. na $[0, 1]$) prelinearita platí vždy.

Důkaz.

Prvky řetězce jsou srovnatelné: $a \leq b$, nebo $b \leq a$. V prvním případě $a \rightarrow b = 1$, ve druhém $b \rightarrow a = 1$; v obou je supremum 1. □

Prelinearita je tedy na $[0, 1]$ „zadarmo“ – zajímavá je pro obecné svazy.

Prelinearita: ekvivalentní tvary

Prelinearita je nenápadně silná – je ekvivalentní například zákonům

$$\begin{aligned}a \rightarrow (b_1 \vee b_2) &= (a \rightarrow b_1) \vee (a \rightarrow b_2), \\(a_1 \wedge a_2) \rightarrow b &= (a_1 \rightarrow b) \vee (a_2 \rightarrow b).\end{aligned}$$

- Bez prelinearity platí jen „ $\geq$ “.
- Důkazy: pěkné cvičení na adjunkci (viz skriptu).

Dělitelnost

$$a \wedge b = a \otimes (a \rightarrow b)$$

- Vždy platí „ $\geq$ “: $a \otimes (a \rightarrow b) \leq a$ (monotonie) a $a \leq b$ (MP).
- Dělitelnost žádá *rovnost*: infimum lze „vyrobit“ násobením.
- Čtení: mezi a a $a \wedge b$ není „díra“ – na $[0, 1]$ odpovídá **spojitosti** t-normy.

Ověření dělitelnosti: Gödel

Pro $\otimes = \min$ a $a > b$:

$$a \otimes (a \rightarrow b) = \min(a, b) = b = a \wedge b. \checkmark$$

Pro $a \leq b$:

$$a \otimes (a \rightarrow b) = \min(a, 1) = a = a \wedge b. \checkmark$$

Sami: ověřte dělitelnost pro Łukasiewicze ($a > b$: $a \otimes (1 - a + b) = ?$).

Ověření dělitelnosti: Łukasiewicz

Pro $a > b$ je $a \rightarrow b = 1 - a + b$, takže

$$a \otimes (a \rightarrow b) = \max(0, a + (1 - a + b) - 1) = \max(0, b) = b = a \wedge b. \checkmark$$

Pro $a \leq b$: $a \otimes 1 = a = a \wedge b. \checkmark$

Obě „spojité“ struktury dělitelnost mají – to není náhoda (viz dále).

Dvojitá negace

$$\neg\neg a = a$$

- Negace je involuce: umožňuje „klasické“ zacházení – plně De Morganovy zákony, kontrapozice.
- ✓ Łukasiewicz ($\neg a = 1 - a$).
- ✗ Gödel i součin (drastická negace: $\neg\neg 0.4 = 1 \neq 0.4$).

Idempotence

$$a \otimes a = a$$

- Konjunkce se „neopotřebovává“: opakování premisy nic nestojí.
- Cena: žádná kumulace evidence – dvě polovičaté indicie dají zase jen polovičatou.

Proposition 2

Jediná idempotentní t-norma je minimum.

Důkaz.

Vždy $a \otimes b \leq \min(a, b)$. Pro $a \leq b$: $a = a \otimes a \leq a \otimes b$ z monotonie, tedy $a \otimes b = a = \min(a, b)$. □

Dvojitá negace: kontrola výpočtem

$\neg\neg 0.4$:

	$\neg 0.4$	$\neg\neg 0.4$
Łukasiewiczova	0.6	0.4 ✓
Gödelova	0	1 ✗
součinová	0	1 ✗

- Drastická negace „zapomene“ vše kromě nuly – dvojitá aplikací se informace ztratí.
- Łukasiewiczova $1 - a$ je involuce.

Kdo splňuje co

	Łuk.	Gödel	součin
prelinearita	✓	✓	✓
dělitelnost	✓	✓	✓
dvojitá negace	✓	✗	✗
idempotence	✗	✓	✗

Sami si ověřte: $\neg\neg 0.4$ a $0.4 \otimes 0.4$ ve všech třech.

Definice 2 (významné třídy)

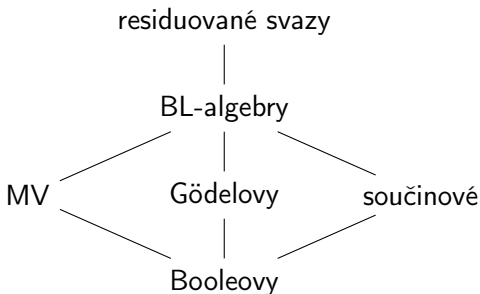
Residuovaný svaz je

- **BL-algebra**: prelinearita + dělitelnost,
- **MV-algebra**: BL + dvojí negace,
- **Gödelova algebra**: BL + idempotence,
- **součinná algebra**: BL + podmínky součinného typu,
- **Booleova algebra**: všechno najednou.

Tři jména, tři logiky

- **MV-algebry** (Chang, konec 50. let): algebraický protějšek Łukasiewiczovy logiky; MV = *many-valued*.
- **Gödelovy algebry**: podle Gödelovy poznámky (1932) o logikách mezi intuicionistickou a klasickou.
- **Součínové algebry**: nejmladší z trojice (90. léta); protějšek logiky se součínovou konjunkcí.

Hasseův diagram tříd



- Dolů přibývají podmínky; Booleovy algebry = klasický průnik.
- Názvy podle logik (Łukasiewiczova, Gödelova, součinná), jejichž algebraickými protějšky tyto třídy jsou.

Definice 3 (t-norma)

T-norma je binární operace $\otimes$ na $[0, 1]$: komutativní, asociativní, neklesající v obou argumentech, s neutrálním prvkem 1.

- Přesně požadavky na fuzzy konjunkci z FM01, specializované na $[0, 1]$.
- Otázka: kdy lze k t-normě doplnit residuum?

Levá spojitost

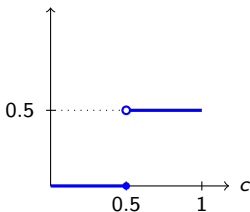
T-norma $\otimes$ je **zleva spojitá**, pokud pro každé a a každou neklesající posloupnost (obecně supremum)

$$a \otimes \bigvee_i c_i = \bigvee_i (a \otimes c_i).$$

- Přesně distributivita $\otimes$ přes suprema z FM02 – omezená na $[0, 1]$.
- Graficky: řezy $c \mapsto a \otimes c$ nemají skoky „zleva“ – viz další snímek.

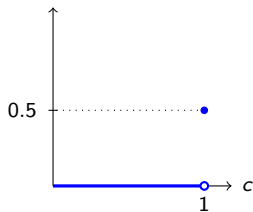
Levá spojitost graficky

Řez $c \mapsto a \otimes c$ při pevném $a = 0.5$ u dvou t-norem, které probereme za chvíli:



nilpotentní minimum

✓ zleva spojitá



drastická

✗ není zleva spojitá

Obě mají skok. Rozhoduje, kam patří hodnota v *bodě skoku*: vlevo je plný bod dole, takže levá limita souhlasí s funkční hodnotou. Vpravo je

$\bigvee_{c < 1} (0.5 \otimes_D c) = 0$, ale $0.5 \otimes_D 1 = 0.5$.

Věta 4

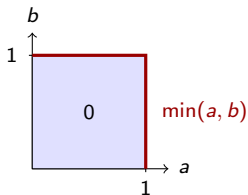
*T-norma má residuum (splňuje s nějakým $\rightarrow$ adjunkci), právě když je **zleva spojitá** v každém argumentu. Residuum je pak*

$$a \rightarrow b = \bigvee \{ c \mid a \otimes c \leq b \}.$$

- Idea: adjunkce žádá, aby se supremum v definici residua *nabývalo* – a to je přesně $a \otimes \bigvee_i c_i = \bigvee_i (a \otimes c_i)$, tedy levá spojitost.

Protipříklad: drastická t-norma

$$a \otimes_D b = \begin{cases} \min(a, b) & \text{je-li } a = 1 \text{ nebo } b = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



- Je to t-norma (ověřte!), ale má skok: pro $a < 1$ je $a \otimes_D c = 0$ pro všechna $c < 1$, a $a \otimes_D 1 = a$.
- Není zleva spojitá $\Rightarrow$ **nemá residuum**: $\sup \{c \mid a \otimes_D c \leq b\}$ se nenabývá.

Proposition 3 (minimum je největší t-norma)

Pro každou t-normu $\otimes$ a všechna $a, b \in [0, 1]$ platí $a \otimes b \leq \min(a, b)$.

Důkaz.

Z monotonie a neutrality jedničky:

$$a \otimes b \leq a \otimes 1 = a, \quad a \otimes b \leq 1 \otimes b = b. \quad \square$$

Proposition 4 (drastická t-norma je nejmenší)

Pro každou t-normu $\otimes$ platí $T_D(a, b) \leq a \otimes b$.

Důkaz.

Je-li $a = 1$ nebo $b = 1$, obě strany dávají druhý argument. Jinak
 $T_D(a, b) = 0 \leq a \otimes b$. □

Všechny t-normy tedy žijí v pásu mezi T_D a min.

Proposition 5 (idempotence charakterizuje minimum)

Je-li $a \otimes a = a$ pro všechna a , pak $\otimes = \min$.

Důkaz.

Nechť $a \leq b$. Pak z monotonie

$$a = a \otimes a \leq a \otimes b \leq \min(a, b) = a,$$

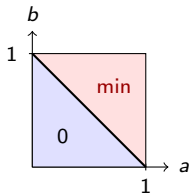
tedy $a \otimes b = \min(a, b)$.



Proto žádná jiná t-norma nemůže být idempotentní – minimum je v tomto smyslu výjimečné.

Na hraně: nilpotentní minimum

$$a \otimes_0 b = \begin{cases} \min(a, b) & a + b > 1, \\ 0 & a + b \leq 1. \end{cases}$$



- Zleva spojitá t-norma $\Rightarrow$ residuum existuje.
- Není spojitá (skok na přímce $a + b = 1$).

Nilpotentní minimum nesplňuje dělitelnost

$$0.5 \otimes_0 (0.5 \rightarrow_0 0.3) = 0.5 \otimes_0 0.5 = 0 \neq 0.3 = 0.5 \wedge 0.3.$$

(residuum: $0.5 \rightarrow_0 0.3 = \max(1 - 0.5, 0.3) = 0.5$)

- Zleva spojité t-normy jsou tedy *opravdu* širší třída než spojité.
- Dělitelnost $\iff$ spojitost – viz další slajd.

Věta 5

Zleva spojitá t-norma splňuje dělitelnost, právě když je spojitá. Spojité t-normy (s residui) jsou tedy přesně BL-algebry na $[0, 1]$.

- Prelinearita je na řetězci automatická; dělitelnost = spojitost.
- „Logika spojitých t-norem“ = logika BL-algeber (tzv. Hájková teze).

Tři základní spojité t-normy

	$a \otimes b$	třída
Łukasiewiczova	$\max(0, a+b-1)$	MV
Gödelova (minimum)	$\min(a, b)$	Gödelova
součinnová	$a \cdot b$	součinnová

- Łukasiewiczova: **nilpotentní** – dost dlouhý řetězec libovolného $a < 1$ spadne na 0.
- Gödelova: **idempotentní** – řetězce beze ztrát.
- Součinnová: **striktní** – klesá, ale nuly nedosáhne.

Nilpotence

T-norma je **nilpotentní**, pokud pro každé $a < 1$ existuje n s $a^n = 0$ (kde $a^n = a \otimes \cdots \otimes a$).

- Łukasiewicz: indukcí

$$a^n = \max(0, n a - (n - 1)),$$

takže např. $0.9^{10} = \max(0, 9 - 9) = 0$. ✓

- Gödel a součin nilpotentní nejsou: minimum stagnuje ($a^n = a$), součin klesá k nule jen limitně.

Archimedova vlastnost

Definice 6

T-norma $\otimes$ je **archimedovská**, pokud pro všechna $a, b \in (0, 1)$ existuje n s $a^n < b$.

- Łukasiewicz: $a^n = \max(0, na - (n - 1))$ klesne až na 0. ✓
- Součin: $a^n = a^n$ klesá k 0. ✓
- Minimum: $a^n = a$ se nehne. ✗

Opakované násobení „umoří“ každý stupeň – ozvěna paradoxu hromady.

Proč „archimedovská“?

T-normy Archimedes nestudoval.

Jméno nese podmínka, kterou formuloval pro velikosti:

pro každá $x, y > 0$ existuje n takové, že $nx > y$,

tedy „žádná velikost není vůči jiné nekonečně malá“.

V uspořádaných grupách se jí říká archimedovská.

- U Łukasiewicze je $1 - a$ vzdálenost a od jedničky a $\otimes$ tyto vzdálenosti sčítá, neboť $a^n = \max(0, 1 - n(1 - a))$. Proto

$$a^n < b \iff n(1 - a) > 1 - b,$$

což je Archimedova podmínka pro $x = 1 - a$ a $y = 1 - b$.

- U součinu totéž s $-\ln a$ místo $1 - a$: $a^n < b \iff n(-\ln a) > -\ln b$.

Klasifikace spojitých archimedovských t-norem

Věta 7 (Mostert–Shields, 1957)

*Každá spojitá archimedovská t-norma je izomorfní buď se součinnou t-normou (**striktní** případ), nebo s Łukasiewiczovou (**nilpotentní** případ).*

Izomorfní = liší se jen přeskálováním intervalu $[0, 1]$. Tři základní t-normy tedy nejsou náhodný výběr – pokrývají všechny hlavní typy chování.

Chování řetězců

$a^n = a \otimes \cdots \otimes a$ pro $a = 0.9$:

n	1	2	5	10	20
Łuk.	0.9	0.8	0.5	0	0
Gödel	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
součin	0.9	0.81	0.59	0.35	0.12

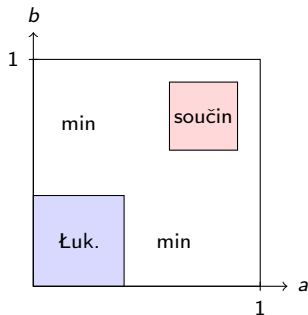
- Dlouhé odvozovací řetězce (sorites!) dopadnou podle volby t-normy zcela různě.

Věta 8 (Mostertova–Shieldsova reprezentace)

*Každá spojitá t-norma je **ordinálním součtem** kopií tří základních: $[0, 1]$ se rozpadne na systém podintervalů, na každém se $\otimes$ chová (po přeskálování) jako Łukasiewiczova nebo součinnová t-norma, mimo ně jako minimum.*

- Tři základní t-normy = *stavební kameny* všech spojitých.
- Důkaz: delší analytické dobrodružství – ve skriptech v dodatku.

Ordinální součet – obrázek



Čtverce na diagonále: přeškalované kopie; všude jinde minimum.

Jak vybrat t-normu?

- Má se evidence **kumulovat**? (dvě polovičaté indicie = skoro nic) $\Rightarrow$ Łukasiewicz.
- Rozhoduje **nejslabší článek**? $\Rightarrow$ Gödel.
- Jsou stupně **nezávislé pravděpodobnostní povahy**? $\Rightarrow$ součin.

Zásada

Struktura pravdivostních stupňů je součástí modelu – volí se podle povahy vágnosti, ne podle pohodlí výpočtu.

Kvíz: poznej t-normu

Která z trojice (Łuk., Gödel, součin) má danou vlastnost?

$a \otimes a = a$	?
$\neg\neg a = a$	?
$a \otimes b = 0$ jen pro $a = 0$ či $b = 0$	?
$a^n = 0$ pro nějaké n (při $a < 1$)	?
$a \otimes b$ spojitá, ale ne striktní ani idempotentní	?

Shrnutí

- Dodatečné podmínky: **prelinearita**, **dělitelnost**, **dvojitá negace**, **idempotence**.
- Třídy: $BL \supseteq MV$, Gödelovy, součinnové; průnik = Booleovy.
- Residuované svazy na $[0, 1] =$ **zleva spojitá t-norma**; spojitá = BL.
- **Mostert–Shields**: spojitá t-norma jsou ordinální součty tří základních.

Příště: konečně fuzzy množiny!

Ke čtení: skript, kapitola 3.