

KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM04 – Fuzzy množiny a fuzzy relace

Jan Konečný

18. října 2026

Minule

- Dodatečné podmínky a třídy: BL, MV, Gödelovy, součinnové algebry.
- Residuované svazy na $[0, 1]$ = zleva spojitě t-normy; spojitě = BL.
- Mostert–Shields: tři základní t-normy jako stavební kameny.

Dnes

Struktury stupňů máme – dnes konečně fuzzy množiny:

- definice a příklady,
- operace s L-množinami,
- inkluze a rovnost ve stupních,
- řezy a reprezentace klasickými množinami,
- binární L-relace, skládání, L-ekvivalence.

V celé přednášce je L pevný úplný residuovaný svaz.

Definice 1 (L-množina)

L-množina (fuzzy množina) na universu X je zobrazení

$$A: X \rightarrow L.$$

Hodnota $A(x)$ je **stupeň příslušnosti** prvku x do A . Množinu všech L-množin na X značíme L^X .

- Zadeh (1965) pro $L = [0, 1]$; obecné L-množiny Goguen (1967).

- Podmnožiny X ztotožňujeme s $\{0, 1\}$ -hodnotovými L-množinami – klasické množiny jsou speciální případ.
- Zápis výčtem:

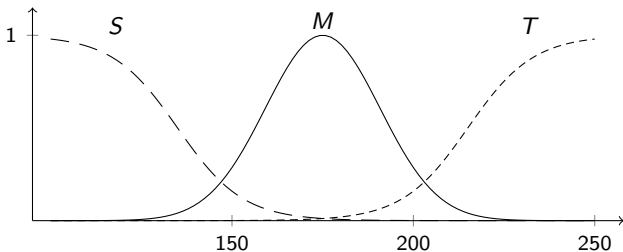
$$A = \{^{0.8}/x_1, ^{0.5}/x_2\}$$

(prvky se stupněm 0 vynecháváme).

- Prázdná množina $\emptyset$: všude 0; plná množina X : všude 1.

Příklad: malý, střední, vysoký

$X = [100, 250]$ (výška v cm), $L = [0, 1]$:



S = malý, M = střední, T = vysoký.

- Přesné tvary funkcí příslušnosti jsou modelovací volba; podstatné jsou plynulé přechody.
- Otázka „kolik přesně je $T(178)$?“ nás nemusí trápit: v FM07 ukážeme, že na přesných hodnotách záleží „jen spojitě“ – malá změna má malé následky.

Definice 2 (operace s L-množinami)

Po prvcích, pomocí operací L:

$$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= A(x) \wedge B(x), & (A \cup B)(x) &= A(x) \vee B(x), \\ (A \otimes B)(x) &= A(x) \otimes B(x), & (A \rightarrow B)(x) &= A(x) \rightarrow B(x),\end{aligned}$$

obdobně $\bigcap_i A_i$, $\bigcup_i A_i$ a pro $a \in L$ posuny

$$(a \otimes A)(x) = a \otimes A(x), \quad (a \rightarrow A)(x) = a \rightarrow A(x).$$

- $A \subseteq B$ znamená: $A(x) \leq B(x)$ pro všechna x .
- Dvě „konjunkce“ ($\cap$ a $\otimes$) a k nim $\rightarrow$: bohatší algebra než u klasických množin.
- Vlastnosti se dědí z L , například

$$A \otimes \bigcup_i B_i = \bigcup_i (A \otimes B_i), \quad A \otimes B \subseteq A \cap B.$$

- Pozor: $A \cup \neg A = X$ obecně **neplatí** ($\neg A = A \rightarrow \emptyset$).

Dědění: L^X je zase residuovaný svaz

Věta 3

Pro úplný residuovaný svaz L a $X \neq \emptyset$ je

$$L^X = \langle L^X, \cap, \cup, \otimes, \rightarrow, \emptyset, X \rangle$$

úplný residuovaný svaz: svazové uspořádání je $\subseteq$, infima a suprema jsou $\cap$ a $\cup$.

- L^X je přímý součin $|X|$ kopií L a všechny operace jsou po složkách – každý axiom se tedy ověří bodově, třeba adjunkce:
 $A \otimes B \subseteq C \iff A \subseteq (B \rightarrow C).$
- Každá rovnost a nerovnost platná v L proto platí i v L^X . Nic z FM02 se nedokazuje znovu.

Inkluze ve stupních – klíčová idea kurzu

Otázka „je A podmnožinou B ?“ si u fuzzy množin zaslouží fuzzy odpověď.

Slovně: „*pro každé x : pokud x patří do A , pak patří do B* “.

Stupňované čtení:

- „pro každé“ $\rightsquigarrow$ infimum $\bigwedge$,
- „pokud–pak“ $\rightsquigarrow$ residuum $\rightarrow$.

Definice 4 (stupeň inkluze)

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \rightarrow B(x))$$

- Tento recept – infimum z residuí – uvidíme v kurzu ještě mnohokrát.
- První kontrola: $S(A, B) = 1$ právě když $A(x) \rightarrow B(x) = 1$ pro všechna x , tj. právě když $A \subseteq B$. ✓

Kontrola na klasických množinách

Pro ostré A, B ($\{0, 1\}$ -hodnotové):

- $S(A, B) = 1$, je-li $A \subseteq B$;
- $S(A, B) = 0$, existuje-li $x \in A \setminus B$ ($1 \rightarrow 0 = 0$ v infimu).

Na klasických množinách tedy S dává klasickou odpověď – nová informace přibývá jen u skutečně fuzzy vstupů. (Tenhle test dělejte u každého pojmu ve stupních!)

Věta 5 (vlastnosti podmnožinovitosti ve stupních)

$$S(A, A) = 1,$$

$$S(A, B) \otimes S(B, C) \leq S(A, C),$$

$$S\left(A, \bigcap_i B_i\right) = \bigwedge_i S(A, B_i),$$

$$S\left(\bigcup_i A_i, B\right) = \bigwedge_i S(A_i, B).$$

Důkaz tranzitivity.

Pro každé x dává tranzitivita residua

$$(A(x) \rightarrow B(x)) \otimes (B(x) \rightarrow C(x)) \leq A(x) \rightarrow C(x).$$

Levou stranu zdola odhadneme:

$S(A, B) \otimes S(B, C) \leq (A(x) \rightarrow B(x)) \otimes (B(x) \rightarrow C(x))$ pro každé x
(monotonie $\otimes$), tedy

$$S(A, B) \otimes S(B, C) \leq \bigwedge_x (A(x) \rightarrow C(x)) = S(A, C). \quad \square$$

Definice 6 (stupeň rovnosti)

$$(A \approx B) = S(A, B) \wedge S(B, A)$$

- Obdoba ve stupních: množiny jsou si rovny, právě když je každá podmnožinou druhé.
- Po prvcích: $(A \approx B) = \bigwedge_x (A(x) \leftrightarrow B(x))$.
- $(A \approx B) = 1$ právě když $A = B$.

Malý výpočet (Łukasiewicz)

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$A = \{^{0.8}/x_1, ^{0.5}/x_2\}, \quad B = \{^{0.6}/x_1, ^{0.9}/x_2, ^{0.3}/x_3\}.$$

$$\begin{aligned} S(A, B) &= (0.8 \rightarrow 0.6) \wedge (0.5 \rightarrow 0.9) \wedge (0 \rightarrow 0.3) \\ &= 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8. \end{aligned}$$

Opačný směr:

$$\begin{aligned} S(B, A) &= (0.6 \rightarrow 0.8) \wedge (0.9 \rightarrow 0.5) \wedge (0.3 \rightarrow 0) \\ &= 1 \wedge 0.6 \wedge 0.7 = 0.6, \end{aligned}$$

$$(A \approx B) = 0.8 \wedge 0.6 = 0.6.$$

- A je „docela dobrou“ podmnožinou B (stupeň 0.8), obráceně už méně.
- Ostrá odpověď by byla dvakrát „ne“ – a zahodila by celý rozdíl.

Proposition 1

$S(A, B) = 1$ právě když $A(x) \leq B(x)$ pro všechna x , tj. právě když $A \subseteq B$ klasicky (po stupních).

Důkaz.

Infimum je 1 p.k. každý člen je 1; a $a \rightarrow b = 1$ p.k. $a \leq b$ (z adjunkce). $\square$

Plný stupeň inkluze = stará dobrá inkluze.

Stupně < 1 jemně odstupňují, „jak moc“ inkluze selhává.

Proč infimum, a ne třeba průměr?

- $S(A, B)$ čte formuli „*pro všechna* $x: x \in A$ implikuje $x \in B$ “ – a obecný kvantifikátor je infimum.
- Průměr by jeden totální protipříklad „rozpustil“ mezi ostatní prvky.
- Infimum je pesimista: inkluze je tak dobrá, jak dobrý je *nejhorší* prvek.

Minicviko: stupně inkluze

$X = \{x, y\}$, Łukasiewicz:

$$A = \{^{0.5}/x, ^1/y\}, \quad B = \{^{0.7}/x, ^{0.6}/y\}.$$

Spočtěte $S(A, B)$, $S(B, A)$ a $(A \approx B)$.

Minicviko: řešení

$$S(A, B) = (0.5 \rightarrow 0.7) \wedge (1 \rightarrow 0.6) = 1 \wedge 0.6 = 0.6,$$

$$S(B, A) = (0.7 \rightarrow 0.5) \wedge (0.6 \rightarrow 1) = 0.8 \wedge 1 = 0.8,$$

$$(A \approx B) = 0.6 \wedge 0.8 = 0.6.$$

Slabé místo směru $A \rightarrow B$: prvek y (1 vs. 0.6); směru $B \rightarrow A$: prvek x (0.7 vs. 0.5).

Totéž nad Gödelem

$$S(A, B) = (0.5 \rightarrow 0.7) \wedge (1 \rightarrow 0.6) = 1 \wedge 0.6 = 0.6,$$

$$S(B, A) = (0.7 \rightarrow 0.5) \wedge (0.6 \rightarrow 1) = 0.5 \wedge 1 = 0.5,$$

$$(A \approx B) = 0.6 \wedge 0.5 = 0.5.$$

- $S(A, B)$ vyšlo stejně, $S(B, A)$ ne: Gödel u přesahu vrací rovnou cílový stupeň.
- Volba struktury je součástí modelování – výsledky se liší, vlastnosti (věty) platí v obou.

Definice 7 (a -řez)

Pro $a \in L$ je a -řez L -množiny A klasická množina

$$^aA = \{ x \in X \mid A(x) \geq a \}.$$

- ^1A = jádro (kde A platí naplno).
- **Vnořenost**: $a \leq b$ implikuje $^bA \subseteq ^aA$ – řezy tvoří „cibuli“.

Příklad řezů

Pro „vysoký“ T z obrázku:

- $0.9 T \approx$ výšky nad ~ 235 cm (nesporně vysocí),
- $0.5 T \approx$ výšky nad 215 cm,
- $0.1 T \approx$ výšky nad ~ 195 cm (aspoň trochu vysocí).

Fuzzy množina = celá tato „cibule“ ostrých množin najednou.

Definice 8 (L-vnořený systém)

L -indexovaný systém $\mathcal{S} = \{ A_a \subseteq X \mid a \in L \}$ je **L-vnořený**, pokud

- (1) $a \leq b$ implikuje $A_b \subseteq A_a$,
- (2) pro každé $x \in X$ má množina $\{ a \mid x \in A_a \}$ největší prvek.

- (1) je ta cibule: výš položený řez je menší.
- (2) říká, že každé x má *poslední* množinu, do níž ještě patří – a ten největší index je přesně jeho stupeň příslušnosti. Odtud mimo jiné $A_0 = X$.
- Řezy L -množiny obojí splňují: největším prvkem $\{ a \mid x \in {}^a A \}$ je $A(x)$.

Věta 9 (o reprezentaci řezy)

L-množina je svými řezy jednoznačně určena:

$$A(x) = \bigvee \{ a \in L \mid x \in {}^a A \}.$$

Naopak každý L-vnořený systém klasických množin je systémem řezů právě jedné L-množiny.

- Fuzzy množiny $\equiv$ vnořené systémy klasických množin: most mezi oběma světy.
- Zásadně využijeme u fuzzy čísel (FM08).

Řezy a operace

$${}^a(A \cap B) = {}^aA \cap {}^aB \quad \checkmark$$

$${}^a(A \cup B) \supseteq {}^aA \cup {}^aB$$

$${}^a(A \otimes B) \neq {}^aA \otimes {}^aB \quad \times$$

$$a \leq b \Rightarrow {}^bA \subseteq {}^aA \quad \checkmark$$

- Na řetězci platí $u \cup i$ rovnost.
- $\otimes$ -operace se po řezech **nepočítají** – proto se u fuzzy čísel bude pracovat s $\wedge$.

Definice 10 (binární L-relace, inverze)

Binární L-relace mezi X a Y je L-množina $R \in L^{X \times Y}$; $R(x, y)$ je stupeň, v němž x souvisí s y .

Inverzní relace: $R^{-1}(y, x) = R(x, y)$.

- Vše, co umíme s L-množinami (operace, S , $\approx$, řezy), umíme i s relacemi.
- Inverze komutuje s $\cap$, $\cup$, $\otimes$, $\rightarrow$ a zachovává S i $\approx$.

Definice 11 (skládání L-relací)

Pro $R \in L^{X \times Y}$ a $S \in L^{Y \times Z}$:

$$(R \circ S)(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \otimes S(y, z)),$$

$$(R \triangleleft S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} (R(x, y) \rightarrow S(y, z)),$$

$$(R \triangleright S)(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} (S(y, z) \rightarrow R(x, y)).$$

Slovní čtení skládání

- $\circ$: „*existuje* prostředník y , přes kterého to jde“ – supremum + $\otimes$.
- $\triangleleft$: „*pro každé* y : souvisí-li x s y , souvisí y se z “ – infimum + residuum.
- $\triangleright$: „*pro každé* y : souvisí-li y se z , souvisí x s y “.

Stejný vzor jako u $S(A, B)$: suprema čtou „existuje“, infima s residuem „pro všechna“.

Diagnostické čtení

X pacienti, Y symptomy, Z nemoci; R = kdo má jaké symptomy, S = které symptomy provázejí kterou nemoc.

- $(R \circ S)(x, z)$: existuje symptom, který x má a který ukazuje na z .
- $(R \triangleleft S)(x, z)$: *každý* symptom pacienta x ukazuje na z .
- $(R \triangleright S)(x, z)$: pacient x má *všechny* symptomy nemoci z .

Poučení

Volba skládání = volba otázky, kterou datům klademe.

Numerický příklad (Łukasiewicz)

Dva pacienti, dva symptomy, jedna nemoc:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$(R \circ S)(p_1) = \max(1 \otimes 0.8, 0.9 \otimes 0.5) = \max(0.8, 0.4) = 0.8,$$

$$(R \circ S)(p_2) = \max(0.4 \otimes 0.8, 1 \otimes 0.5) = \max(0.2, 0.5) = 0.5.$$

Implikační čtení téhož:

$$(R \triangleleft S)(p_1) = (1 \rightarrow 0.8) \wedge (0.9 \rightarrow 0.5) = 0.8 \wedge 0.6 = 0.6,$$

$$(R \triangleleft S)(p_2) = (0.4 \rightarrow 0.8) \wedge (1 \rightarrow 0.5) = 1 \wedge 0.5 = 0.5.$$

- $\circ$: optimistická diagnóza (stačí jeden symptom); $\triangleleft$: přísná (všechny musí souhlasit).
- Tento příklad si zapamatujte – v FM09 ho *obrátime* (neznámou bude S).

Věta 12 (vlastnosti skládání $\circ$)

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T,$$

$$\left(\bigcup_i R_i\right) \circ S = \bigcup_i (R_i \circ S),$$

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

- Vše z distributivity $\otimes$ přes suprema (FM02).
- Asociativita: obě strany jsou supremem přes *dvojice* prostředníků.

Věta 13 (skládání a podmnožinovitost)

$$S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \leq S(R_1 \circ S_1, R_2 \circ S_2).$$

Náčrt.

Stačí $(R_1 \circ S_1)(x, z) \otimes S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \leq (R_2 \circ S_2)(x, z)$. Levá strana je supremum přes y z výrazů

$$R_1(x, y) \otimes S(R_1, R_2) \otimes S_1(y, z) \otimes S(S_1, S_2) \leq R_2(x, y) \otimes S_2(y, z),$$

dvakrát definice S + MP. □

Podobné relace mají podobná složení – vrátí se v FM07.

Definice 14 (L-ekvivalence)

Binární L-relace E na X je **L-ekvivalence**, pokud pro všechna $x, y, z \in X$:

$$E(x, x) = 1 \quad (\text{reflexivita}),$$

$$E(x, y) = E(y, x) \quad (\text{symetrie}),$$

$$E(x, y) \otimes E(y, z) \leq E(x, z) \quad (\text{tranzitivita}).$$

Je-li navíc $E(x, y) = 1$ jen pro $x = y$, je E **L-rovnost**.

- L-ekvivalence modelují **podobnost** a nerozlišitelnost; jiné názvy: similarity, fuzzy ekvivalence.
- Stupňovaná tranzitivita: podobnost po řetězci slábne (vzpomeňte barvy z FM01).
- Známí zástupci:
 - $\approx$ na L^X – dokonce L-rovnost,
 - biresiduum $\leftrightarrow$ na L – také L-rovnost.

Příklad (Łukasiewicz)

$$X = \{x, y, z, u\}:$$

E	x	y	z	u
x	1	0.9	0.8	1
y	0.9	1	0.7	0.9
z	0.8	0.7	1	0.8
u	1	0.9	0.8	1

- Reflexivita a symetrie: vidět z tabulky. ✓
- Transitivita: nutno ověřit všechny trojice, např.
 $E(y, x) \otimes E(x, z) = 0.9 \otimes 0.8 = 0.7 \leq E(y, z)$. ✓

- E **není** L-rovnost: $E(x, u) = 1$, ač $x \neq u$ – prvky x a u jsou plně podobné. (Co s tím, uvidíme v FM07: slepíme je.)
- Nad Gödelovou algebrou by tranzitivita selhala:

$$\min(0.9, 0.8) = 0.8 \not\leq 0.7.$$

Táž tabulka, jiná struktura, jiný verdikt.

Shrnutí

- L-množiny: zobrazení $X \rightarrow L$; operace po prvcích; posuny.
- $S(A, B)$ a $A \approx B$: infimum čte „pro všechna“, residuum „pokud–pak“.
- Řezy: fuzzy množina $\equiv$ vnořený systém klasických množin.
- Relace: inverze, skládání $\circ$, $\triangleleft$, $\triangleright$ a jejich slovní čtení.
- L-ekvivalence: reflexivní + symetrická + tranzitivní; podobnost.

Příště: vlastnosti relací ve stupních a uzávěry.

Ke čtení: skripta, kapitola 4.