KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM05 – Vlastnosti L-relací a uzávěry

Jan Konečný

26. října 2026

Minule

- L-množiny a operace; $S(A, B)$ a $A \approx B$; řezy.
- Relace, inverze, skládání $\circ$, $\triangleleft$, $\triangleright$ a diagnostické čtení.
- L-ekvivalence: reflexivita + symetrie + tranzitivita.

Dnes se na vlastnosti relací podíváme soustavně – a ve stupních.

Plán:

- stupně reflexivity, symetrie, tranzitivity,
- elegantní přeformulování přes S, $\approx$ a skládání,
- uzávěry vzhledem k vlastnostem,
- mocniny relací a tranzitivní uzávěr,
- nejmenší L-ekvivalence obsahující daná data.

Definice 1 (identická relace)

$$\mathrm{id}_X(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocná ostrá relace – budeme ji potřebovat u reflexivity.

Definice 2 (vlastnosti ve stupních)

Pro binární L-relaci R na X:

$$\mathrm{Ref}(R) = \bigwedge_{x \in X} R(x,x),$$

$$\mathrm{Sym}(R) = \bigwedge_{x,y \in X} \big(R(x,y) \to R(y,x)\big),$$

$$\mathrm{Tra}(R) = \bigwedge_{x,y,z \in X} \big((R(x,y) \otimes R(y,z)) \to R(x,z)\big).$$

Stejný recept jako u $S(A,B)$: $\bigwedge$ = „pro všechna“, $\to$ = „pokud–pak“.

- R je reflexivní (symetrická, tranzitivní), je-li příslušný stupeň 1.
- Obecněji: R je a-reflexivní, pokud $a \leq \mathrm{Ref}(R)$; atd.
- Vlastnosti relací jsou tedy samy L-množinami na množině všech relací!

Lemma 3

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ref}(R) = 1 \text{ } p.k. &\quad R(x,x) = 1 \text{ } pro\ všechna\ x,\\
\mathrm{Sym}(R) = 1 \text{ } p.k. &\quad R(x,y) = R(y,x),\\
\mathrm{Tra}(R) = 1 \text{ } p.k. &\quad R(x,y) \otimes R(y,z) \leq R(x,z).
\end{aligned}$$

Důkaz.

$a \to b = 1$ p.k. $a \leq b$. U symetrie dostaneme $R(x,y) \leq R(y,x)$ pro *všechny* dvojice – tedy i obráceně, tedy rovnost. □

L-ekvivalence = všechny tři stupně rovny 1. ✓

Věta 4 (ekvivalentní vyjádření)

$$\mathrm{Ref}(R) = S(\mathrm{id}_X,\ R), \qquad \mathrm{Sym}(R) = (R \approx R^{-1}), \qquad \mathrm{Tra}(R) = S(R{\circ}R,\ R).$$

- Klasicky: tranzitivita $\equiv R \circ R \subseteq R$. Stupňovaně: stupeň tranzitivity $=$ *stupeň inkluze* $R \circ R$ v R.
- Vše, co jsme zavedli u množin, se recykluje u vlastností relací.

Důkaz pro reflexivitu.

$$S(\mathrm{id}_X, R) = \bigwedge_{x,y} \big(\mathrm{id}_X(x,y) \to R(x,y)\big).$$

- Členy s $x \neq y$: $0 \to R(x,y) = 1$ – v infimu se neprojeví.
- Členy s $x = y$: $1 \to R(x,x) = R(x,x)$.

Zbude $\bigwedge_x R(x,x) = \mathrm{Ref}(R)$. □

Důkaz pro tranzitivitu.

Užijeme $(\bigvee_i a_i) \to b = \bigwedge_i (a_i \to b)$:

$$\begin{aligned} S(R \circ R,\ R) &= \bigwedge_{x,z} \Big(\big(\bigvee_y R(x,y) \otimes R(y,z) \big) \to R(x,z) \Big) \\ &= \bigwedge_{x,z} \bigwedge_y \big((R(x,y) \otimes R(y,z)) \to R(x,z) \big) \\ &= \mathrm{Tra}(R). \qquad \square \end{aligned}$$

Symetrie: $S(R, R^{-1})$ rozepište sami – a využijte, že $S(R, R^{-1}) = S(R^{-1}, R)$ (přeznačení).

Příklad

$X = \{x, y, z\}$:

R	x	y	z
x	1	0.8	0.3
y	0.6	1	0.5
z	0.3	0.7	1

Spočteme stupně vlastností nad Łukasiewiczem a Gödelem.

Detail: symetrie (Łukasiewicz)

dvojice	$R(u,v) \to R(v,u)$
x, y	$0.8 \to 0.6 = 0.8$
y, x	$0.6 \to 0.8 = 1$
x, z	$0.3 \to 0.3 = 1$
y, z	$0.5 \to 0.7 = 1$
z, y	$0.7 \to 0.5 = 0.8$

$$\mathrm{Sym}(R) = 0.8.$$

Stupeň hned říká, *jak moc* symetrie chybí – to ostré „ne“ neumí.

Detail: tranzitivita

- Łukasiewicz: výpočtem $R \circ R \subseteq R$, tedy

$$\mathrm{Tra}(R) = S(R \circ R,\ R) = 1$$

  – relace *je* tranzitivní.

- Gödel:
  $(R \circ R)(z, x) \geq \min(R(z, y),\ R(y, x)) = \min(0.7,\ 0.6) = 0.6 > 0.3$,
  takže

$$\mathrm{Tra}(R) = 0.6 \to 0.3 = 0.3.$$

Táž tabulka, různé struktury, různé stupně – potřetí v kurzu.

Minicviko: je to podobnost?

$X = \{x, y\}$,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je R reflexivní, symetrická a $\otimes$-tranzitivní – pro Łukasiewicze i pro Gödela?

Minicviko: řešení

- Reflexivita: diagonála samé 1. ✓
- Symetrie: matice je symetrická. ✓
- Tranzitivita (Ł): nejhorší řetěz $R(x,y) \otimes R(y,x) = 0.8 \otimes 0.8 = 0.6 \leq R(x,x) = 1$; přes diagonálu $0.8 \otimes 1 = 0.8 \leq 0.8$. ✓
- Tranzitivita (Gödel): $\min(0.8, 0.8) = 0.8 \leq 1$. ✓

R je podobnost v obou strukturách – u 2×2 matic tranzitivita „nebolí“, zajímavá začne být od tří prvků (viz matice E).

Proposition 1

Je-li R reflexivní a tranzitivní, pak $R \circ R = R$.

Důkaz.

Tranzitivita říká $R \circ R \subseteq R$. Obráceně z reflexivity:

$$R(x,y) = R(x,y) \otimes R(y,y) \leq \bigvee_z R(x,z) \otimes R(z,y) = (R \circ R)(x,y). \qquad \square$$

Reflexivní tranzitivní relace jsou idempotentní vůči skládání – další mocniny už nic nezmění.

Slovník příbuzných pojmů

vlastnosti	jméno
Ref + Sym	tolerance (blízkost)
Ref + Tra	kvaziuspořádání ve stupních
Ref + Sym + Tra	podobnost (L-ekvivalence)

V literatuře: *similarity* (Zadeh 1971), *proximity*, *fuzzy preorder* – názvosloví kolísá, vlastnosti jsou to podstatné.

Další vlastnosti

$$\mathrm{Irr}(R) = \bigwedge_x \neg R(x,x), \qquad \mathrm{Asy}(R) = \bigwedge_{x,y} \big(R(x,y) \to \neg R(y,x)\big).$$

- Antisymetrie potřebuje srovnávat prvky ve stupních (L-ekvivalenci) – přijde příště u fuzzy uspořádání.

Uzávěry: motivace

- Relace z dat předepsané vlastnosti obvykle **nemají**: měřená podobnost nebývá ani symetrická, natož tranzitivní.
- Chceme relaci co nejméně zvětšit, aby vlastnost získala.

Definice 5 (uzávěr)

Uzávěr relace R vzhledem k vlastnosti V je nejmenší L-relace $R' \supseteq R$ s vlastností V (existuje-li).

Kdy uzávěr existuje?

Stačí:

1. vlastnost má plná relace (konstantně 1),
2. vlastnost je zachována libovolnými průniky.

Uzávěr je pak průnik všech vyhovujících nadrelací (a průnik je díky (1) neprázdný).

Věta 6 (vlastnosti a průniky)

$$\mathrm{Ref}\Big(\bigcap_i R_i\Big) = \bigwedge_i \mathrm{Ref}(R_i),$$
$$\mathrm{Sym}\Big(\bigcap_i R_i\Big) \geq \bigwedge_i \mathrm{Sym}(R_i),$$
$$\mathrm{Tra}\Big(\bigcap_i R_i\Big) \geq \bigwedge_i \mathrm{Tra}(R_i).$$

U reflexivity rovnost (záměna infim); u Sym a Tra jen „$\geq$“!

Proč jen „$\geq$“?

Vezměme ostré relace na $X = \{x, y\}$:

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle\}, \qquad R_2 = \{\langle y, x\rangle\}.$$

- Obě zcela nesymetrické: $\mathrm{Sym}(R_1) = \mathrm{Sym}(R_2) = 0$.
- Průnik je prázdná relace – symetrická ve stupni 1.
- $0 = \bigwedge_i \mathrm{Sym}(R_i) < \mathrm{Sym}(\bigcap_i R_i) = 1$.

Pro uzávěry je ale podstatný právě směr „$\geq$“: průnik relací s vlastností má opět vlastnost. ✓

Důkaz pro tranzitivitu.

Označme $R = \bigcap_i R_i$, $t = \bigwedge_i \mathrm{Tra}(R_i)$. Pro každé j:

$$t \otimes R(x,y) \otimes R(y,z) \leq \mathrm{Tra}(R_j) \otimes R_j(x,y) \otimes R_j(y,z) \leq R_j(x,z),$$

druhá nerovnost je adjungovaná definice $\mathrm{Tra}(R_j)$. Infimum přes j, adjunkce, infimum přes trojice. □

Věta 7 (reflexivní a symetrický uzávěr)

$$\mathrm{Cl}_{\mathrm{Ref}}(R) = R \cup \mathrm{id}_X, \qquad \mathrm{Cl}_{\mathrm{Sym}}(R) = R \cup R^{-1}.$$

Důkaz.

$R \cup \mathrm{id}_X$ je reflexivní nadrelace; každá reflexivní $R'' \supseteq R$ obsahuje id_X i R. $R \cup R^{-1}$ je symetrická ($(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R$); je-li R'' symetrická nadrelace, pak $R^{-1} \subseteq (R'')^{-1} = R''$. □

Stupňované uzávěry

Nejmenší nadrelace, která je a-reflexivní (a-symetrická, a-tranzitivní):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_{a\text{-Ref}}(R) &= R \cup (a \otimes \mathrm{id}_X), \\
\mathrm{Cl}_{a\text{-Sym}}(R) &= R \cup (a \otimes R^{-1}), \\
\mathrm{Cl}_{a\text{-Tra}}(R) &= R \cup \bigcup_{n \geq 1} \left(a^n \otimes R^{\circ(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

U tranzitivity si všimněte a^n: delší řetězce se „platí“ vícekrát.

Definice 8 (mocniny)

$$R^{\circ 1} = R, \qquad R^{\circ (n+1)} = R^{\circ n} \circ R.$$

Z asociativity: $R^{\circ m} \circ R^{\circ n} = R^{\circ (m+n)}$.

Mocniny čtou řetězce

Rozepsáním definice:

$$R^{\circ n}(x_0,\ x_n) = \bigvee_{x_1,\ldots,x_{n-1}} R(x_0,x_1) \otimes R(x_1,x_2) \otimes \cdots \otimes R(x_{n-1},x_n).$$

- $R^{\circ n}$ měří nejlepší řetězec délky n z x_0 do x_n.
- Stupeň řetězce $=$ $\otimes$-součin stupňů článků.
- Navazování řetězců $=$ sčítání délek.

Věta 9 (tranzitivní uzávěr)

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^{\circ n}$$

je nejmenší tranzitivní L*-relace obsahující* R*.*

Důkaz: tranzitivita.

Ve tvaru $R^+ \circ R^+ \subseteq R^+$: distributivita skládání přes sjednocení dá

$$R^+ \circ R^+ = \bigcup_{m,n} R^{\circ m} \circ R^{\circ n} = \bigcup_{m,n} R^{\circ(m+n)} \subseteq R^+. \qquad \square$$

Důkaz: minimalita.

T tranzitivní, $R \subseteq T$. Indukcí $R^{\circ n} \subseteq T$:

$$R^{\circ(n+1)} = R^{\circ n} \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T$$

(monotonie skládání + tranzitivita T). $\square$

Věta 10 (konečný případ)

Má-li X právě n prvků, pak

$$R^+ = R \cup R^{\circ 2} \cup \cdots \cup R^{\circ n}.$$

Idea.

Řetězec délky $> n$ projde nějakým prvkem dvakrát. Vypuštěním cyklu vznikne kratší řetězec se stejnými konci – a jeho stupeň *neklesne*: je $\otimes$-součinem podmnožiny článků a $a \otimes b \leq a \wedge b$. □

Výpočet: $n - 1$ násobení „matic“ v aritmetice L.

Příklad: cyklus (Łukasiewicz)

$x \xrightarrow{0.8} y \xrightarrow{0.7} z \xrightarrow{0.5} x$:

R	x	y	z
x	0	0.8	0
y	0	0	0.7
z	0.5	0	0

Spočteme $R^{\circ 2}$, $R^{\circ 3}$ a R^{+}.

Druhá mocnina (nejlepší řetězce délky 2):

$$R^{\circ 2}(x, z) = 0.8 \otimes 0.7 = 0.5,$$
$$R^{\circ 2}(y, x) = 0.7 \otimes 0.5 = 0.2,$$
$$R^{\circ 2}(z, y) = 0.5 \otimes 0.8 = 0.3,$$

jinde 0.

Třetí mocnina: celý cyklus má stupeň

$$0.8 \otimes 0.7 \otimes 0.5 = 0,$$

takže $R^{\circ 3} = \emptyset$.

R^+	x	y	z
x	0	0.8	0.5
y	0.2	0	0.7
z	0.5	0.3	0

- $R^+ = R \cup R^{\circ 2}$; diagonála zůstala nulová – Łukasiewicz řetězce tlumí.
- R^+ není reflexivní ani symetrická: uzávěr přidává jen to, co si vlastnost vynutí.
- Původní $\mathrm{Tra}(R) = 0.5 \to 0 = 0.5$; po uzávěru 1.

Týž příklad nad Gödelem

Minimum po cestě nic neztrácí:

R_{G}^{+}	x	y	z
x	0.5	0.8	0.7
y	0.5	0.5	0.7
z	0.5	0.5	0.5

- Diagonála $0.5 =$ stupeň celého cyklu $\min(0.8,\ 0.7,\ 0.5)$.
- Uzávěr „slepuje“ tím víc, čím méně $\otimes$ tlumí.

Věta 11 (nejmenší L-ekvivalence)

$$E_R = \left(R \cup R^{-1} \cup \mathrm{id}_X\right)^+$$

je nejmenší L*-ekvivalence obsahující* R*.*

Idea.

$Q = R \cup R^{-1} \cup \mathrm{id}_X$ je reflexivní a symetrická; mocniny a sjednocení obojí zachovají, takže Q^+ je L-ekvivalence. Každá L-ekvivalence $\supseteq R$ obsahuje Q, tedy i Q^+. □

Kolik mocnin stačí?

Na n-prvkovém universu je

$$R^+ = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n.$$

Proč.

$R^k(x, y)$ je nejlepší „cesta“ délky k z x do y. Opakuje-li cesta vrchol, vystřižení smyčky ji zkrátí a stupeň *nezhorší* ($c \otimes d \leq d$). Stačí tedy cesty bez opakování – délky nejvýš n. □

Prakticky: uzávěr spočteme konečným počtem násobení matic.

Proč tranzitivní uzávěr nakonec?

Miniprotipříklad ($X = \{x, y\}$, ostré relace):

- $R = \{\langle x, y\rangle\}$ je tranzitivní (není co navazovat).
- Symetrizace: $R' = \{\langle x, y\rangle\,,\ \langle y, x\rangle\}$ – a teď

$$1 = R'(x, y) \otimes R'(y, x) \not\leq R'(x, x) = 0.$$

Tranzitivita je pryč!

Pravidlo

Nejdřív reflexivní a symetrický uzávěr, tranzitivní *nakonec* (ten symetrii zachovává, obráceně to neplatí).

Poincarého postřeh

- Henri Poincaré (*La Science et l'Hypothèse*, 1902): ve fyzikálním kontinuu naměříme $A = B$ a $B = C$, a přesto $A < C$.
- Smyslová nerozlišitelnost **není tranzitivní** – přesně jev, který modelují L-ekvivalence a opravuje tranzitivní uzávěr.
- Táž postava: topologie, tři tělesa a zárodky chaosu, slavná domněnka (Perelman) – viz medailonek ve skriptech.

Shrnutí

- Vlastnosti relací ve stupních; plný stupeň $=$ klasika.
- $\mathrm{Tra}(R) = S(R \circ R,\ R)$, $\mathrm{Sym}(R) = R \approx R^{-1}$ – vše je inkluze ve stupních.
- Uzávěry: $R \cup \mathrm{id}_X$, $R \cup R^{-1}$; tranzitivní přes mocniny, na konečné množině konečně.
- Nejmenší L-ekvivalence: $(R \cup R^{-1} \cup \mathrm{id}_X)^+$; tranzitivní uzávěr vždy nakonec.

Příště: fuzzy uspořádání a uzávěrové operátory.

Ke čtení: skripta, kapitola 5.