KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM06 – Fuzzy uspořádání a uzávěrové operátory

Jan Konečný

2. listopadu 2026

Minule

- Stupně Ref, Sym, Tra; $\mathrm{Tra}(R) = S(R \circ R,\ R)$.
- Uzávěry: $R \cup \mathrm{id}_X$, $R \cup R^{-1}$, $R^+ = \bigcup_n R^{\circ n}$.
- Nejmenší L-ekvivalence; tranzitivní uzávěr vždy nakonec.

Podobnost umíme. Dnes druhý velký typ relací – uspořádání – a s ním uzávěrové operátory.

Plán:

- fuzzy uspořádání (antisymetrie vzhledem k podobnosti),
- vzorové příklady: S a $\rightarrow$,
- L-uzávěrové operátory (monotonie ve stupních!),
- L-uzávěrové systémy a hlavní věta o korespondenci.

Jak na antisymetrii?

Klasicky: z $R(x, y)$ a $R(y, x)$ plyne $x = y$.

- Doslovný přepis by byl příliš tvrdý: zakazoval by oboustrannou souvislost *jakkoli podobných* různých prvků.
- Přirozené řešení: jsou-li x, y v relaci oběma směry, nemusejí být totožné – ale musejí být podobné.
- Antisymetrii vztáhneme k L-ekvivalenci $\approx$.

Definice 1 (L-uspořádání)

Nechť $\approx$ je L-ekvivalence na X. Relace $R \in L^{X \times X}$ je L-uspořádání vzhledem k $\approx$, pokud pro všechna x, y, z:

$$
\begin{aligned}
(x \approx y) &\leq R(x, y) && (\approx\text{-reflexivita}),\\
R(x, y) \wedge R(y, x) &\leq (x \approx y) && (\text{antisymetrie}),\\
R(x, y) \otimes R(y, z) &\leq R(x, z) && (\text{tranzitivita}).
\end{aligned}
$$

Trojice $\langle X, \approx, R \rangle$: fuzzy uspořádaná množina.

- Z $x \approx x = 1$ plyne obyčejná reflexivita $R(x, x) = 1$.
- $\approx$-reflexivita říká víc: podobné prvky jsou „skoro pod sebou“ v obou směrech.

Lemma 2

Je-li R L*-uspořádání vzhledem k $\approx$, pak*

$$R \cap R^{-1} = \approx.$$

Důkaz.

„$\subseteq$“ je antisymetrie. „$\supseteq$“: z $\approx$-reflexivity $(x \approx y) \leq R(x, y)$ a ze symetrie $(x \approx y) = (y \approx x) \leq R(y, x)$. □

Uspořádání v sobě podobnost nese – jako z klasického $\leq$ vyčteme rovnost jako $\leq \cap \geq$.

Příklad 3 (stupňovaná inkluze)

$\langle L^X, \approx, S \rangle$ je fuzzy uspořádaná množina:

- $(A \approx B) \leq S(A, B)$ (definice $\approx$),
- $S(A, B) \wedge S(B, A) = (A \approx B)$ (antisymetrie – dokonce rovnost),
- $S(A, B) \otimes S(B, C) \leq S(A, C)$ (tranzitivita, L04).

Příklad 4 (residuum)

$\langle L, \leftrightarrow, \rightarrow \rangle$ je fuzzy uspořádaná množina:

- $(a \leftrightarrow b) \leq a \rightarrow b$,
- $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = a \leftrightarrow b$,
- $(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$.

První příklad je „mocninou“ druhého: hodnoty $(A \rightarrow B)(x)$ agregujeme infimem do $S(A, B)$.

Numerický příklad

$X = \{x, y, z\}$, $\approx$ ostrá rovnost, diagonála 1,

$$R(x, y) = 0.7, \quad R(y, z) = 0.6, \quad R(x, z) = 0.4, \quad \text{jinde } 0.$$

- Antisymetrie: pro různé prvky je vždy jeden směr 0. ✓
- Tranzitivita nad Łukasiewiczem: $0.7 \otimes 0.6 = 0.3 \leq 0.4$. ✓
- Nad Gödelem: $\min(0.7,\ 0.6) = 0.6 \not\leq 0.4$. ✗

Věta 5 (1-řez)

Je-li R L*-uspořádání vzhledem k* L*-rovnosti $\approx$, pak*

$$^1R = \{\, \langle x, y\rangle \mid R(x, y) = 1 \,\}$$

je klasické (částečné) uspořádání na X.

Důkaz.

Reflexivita: $R(x, x) = 1$. Tranzitivita: $1 = 1 \otimes 1 \leq R(x, z)$. Antisymetrie: $R(x, y) = R(y, x) = 1$ dá $(x \approx y) = 1$; L-rovnost vynutí $x = y$. □

Pro $a < 1$ obecné a-řezy uspořádáními být nemusejí

Od uzávěrů k operátorům

Minule: uzávěry „po jedné relaci“.
Teď celek – uzávěr jako *zobrazení* $C\colon L^X \to L^X$.

Co od něj čekáme?

- výsledek obsahuje vstup,
- větší vstup nedá menší výstup,
- opakované uzavírání nic nepřidá.

Prostřední podmínku můžeme díky S vyslovit ve stupních!

Definice 6 (L-uzávěrový operátor)

$C\colon L^X \to L^X$ je L-uzávěrový operátor na X, pokud pro všechny $A, B \in L^X$:

$$
\begin{aligned}
&A \subseteq C(A) && \text{(extenzivita)},\\
&S(A,B) \leq S(C(A),\ C(B)) && \text{(monotonie ve stupních)},\\
&C(C(A)) = C(A) && \text{(idempotence)}.
\end{aligned}
$$

Pevné body: $\mathrm{fix}(C) = \{\, A \mid C(A) = A \,\}$.

- Monotonie ve stupních: nakolik je A v B, natolik je $C(A)$ v $C(B)$.
- Volbou $S(A, B) = 1$ plyne obyčejná monotonie ($A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$).
- Stupňovaná verze je *opravdu silnější* – uvidíme za chvíli.

Ostrý svět: staří známí

Uzávěrové operátory potkáváte celé studium:

vstup	uzávěr
podmnožina roviny	konvexní obal
množina vektorů	lineární obal
podmnožina grupy	generovaná podgrupa
množina v topologii	topologický uzávěr
relace	reflexivní/tranzitivní uzávěr

Vždy: „nejmenší hezký objekt obsahující vstup“.

Kvíz: je to uzávěrový operátor?

Na klasických podmnožinách X s pevným prvkem $a_0 \in X$ definujme

$$C(A) = A \cup \{a_0\}.$$

Je C uzávěrový operátor? A co zobrazení $C'(A) = X \setminus A$?

Kvíz: řešení

- $C(A) = A \cup \{a_0\}$: extenzivní ✓, monotonní ✓, idempotentní (a_0 už tam je) ✓ – ano. Uzavřené množiny: ty obsahující a_0.
- $C'(A) = X \setminus A$: není extenzivní ($A \not\subseteq X \setminus A$ pro $A \neq \emptyset$), a je *antitonní* – ne.

Příklad 7 (reflexivní uzávěr)

$C(R) = R \cup \mathrm{id}_X$ je L-uzávěrový operátor na $L^{X \times X}$:

- extenzivita a idempotence zřejmé,
- monotonie ve stupních z nerovnosti

$$S(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \geq S(A_1, B_1) \wedge S(A_2, B_2)$$

volbou $A_2 = B_2 = \mathrm{id}_X$.

Symetrický uzávěr $R \cup R^{-1}$: stejně, navíc $S(R_1^{-1}, R_2^{-1}) = S(R_1, R_2)$.

A tranzitivní uzávěr? Pozor!

Je extenzivní, idempotentní, monotonní pro $\subseteq$... ale monotonii **ve stupních** nemá!

Skládání totiž stupně inkluze *násobí*:

$$S(R_1^{\circ n},\ R_2^{\circ n}) \geq S(R_1, R_2)^n$$

– a lepší odhad obecně není. S rostoucím n se kazí.

Příklad 8 (protipříklad, Łukasiewicz, $X = \{x, y\}$)

R_1, R_2 symetrické, diagonály nulové, mimo diagonálu 0.9, resp. 0.6:

$$S(R_1, R_2) = 0.9 \to 0.6 = 0.7.$$

Uzávěry: mimo diagonálu beze změny, na diagonále $0.9 \otimes 0.9 = 0.8$, resp. $0.6 \otimes 0.6 = 0.2$:

$$S(R_1^+,\ R_2^+) = \underbrace{(0.9 \to 0.6)}_{0.7} \wedge \underbrace{(0.8 \to 0.2)}_{0.4} = 0.4 < 0.7.$$

První místo, kde se ostrá a stupňovaná teorie opravdu rozcházejí.

Co si z protipříkladu odnést

- Tranzitivní uzávěr *je* uzávěrový operátor v ostrém smyslu – selhává jen silnější, stupňovaná monotonie.
- Kvantitativní útěcha: odhad $S(R_1^+, R_2^+) \geq S(R_1, R_2)^n$ pořád něco říká – ztráta je kontrolovaná mocninou.
- Ve stupňovaném světě je potřeba u každé „samozřejmosti“ znovu ověřit, *ve které síle* platí.

Uzávěrové systémy: ostrá intuice

V ostrém světě:

- „uzavřené“ objekty tvoří systém uzavřený na průniky,
- uzávěr = průnik uzavřených nadobjektů,
- operátory a systémy si vzájemně odpovídají.

Fuzzy verze potřebuje jednu operaci navíc: posuny

$$(a \to A)(x) = a \to A(x).$$

Definice 9 (L-uzávěrový systém)

$\mathcal{S} \subseteq L^X$ je L-uzávěrový systém, je-li uzavřen na

- libovolné průniky (speciálně $X \in \mathcal{S}$ jako průnik prázdného systému),
- posuny: $A \in \mathcal{S},\ a \in L \ \Rightarrow\ a \to A \in \mathcal{S}$.

Posun: výpočet

$A = \{^{1}/x,\ ^{0.6}/y\}$, posun stupněm $a = 0.8$:

- Łukasiewicz: $0.8 \to 1 = 1$, $0.8 \to 0.6 = 0.8$, tedy $0.8 \to A = \{^{1}/x,\ ^{0.8}/y\}$.
- Gödel: $0.8 \to 1 = 1$, $0.8 \to 0.6 = 0.6$, tedy $0.8 \to A = A$.

Posun množinu nafoukne ($A \subseteq a \to A$); Gödelův posun zvedne na 1 všechny stupně $\geq a$ a ostatní nechá.

Příklady uzávěrových systémů

- Ostrý svět: uzavřené množiny topologie, podprostory, podgrupy, ekvivalence na pevné množině.
- Stupňovaný svět: reflexivní L-relace, symetrické L-relace (obojí snese průniky *i* posuny – ověřte),
- ... a příští týden hlavní příklad: extenzionální L-množiny vzhledem k podobnosti.

Operátor příslušný systému

Definice 10

$$C_{\mathcal{S}}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{S}} \big(S(A, B) \to B\big)$$

- Slovy: $x \in C_{\mathcal{S}}(A)$ ve stupni, v němž *pro každou* $B \in \mathcal{S}$ platí: *je-li* $A \subseteq B$, *pak* $x \in B$.
- Ostrý případ: přesně průnik všech nadmnožin z $\mathcal{S}$.

Věta 11 (hlavní věta o korespondenci)

1. $\mathrm{fix}(C)$ *je* L*-uzávěrový systém pro každý* L*-uzávěrový operátor* C*.*
2. $C_{\mathcal{S}}$ *je* L*-uzávěrový operátor a* $\mathrm{fix}(C_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$*.*
3. $C_{\mathrm{fix}(C)} = C$*.*

Přiřazení $C \mapsto \mathrm{fix}(C)$ *a* $\mathcal{S} \mapsto C_{\mathcal{S}}$ *jsou vzájemně inverzní bijekce.*

Pevné body a průniky.

Nechť $A_i \in \mathrm{fix}(C)$, $A = \bigcap_i A_i$. Stačí obyčejná monotonie:

$$C(A) \subseteq C(A_i) = A_i \quad \text{pro každé } i,$$

tedy $C(A) \subseteq A$; opačná inkluze je extenzivita. □

Průnik uzavřených je uzavřený – jako v ostrém případě.

Pevné body a posuny.

Nechť $B \in \mathrm{fix}(C)$, $a \in L$. Z adjunkce $a \otimes (a \to B(x)) \leq B(x)$, tedy $a \leq S(a \to B,\ B)$. Monotonie ve stupních:

$$a \leq S(a \to B,\ B) \leq S\big(C(a \to B),\ C(B)\big) = S\big(C(a \to B),\ B\big),$$

adjunkcí $C(a \to B) \subseteq a \to B$; opačná inkluze je extenzivita. □

Zde je monotonie ve stupních *nezbytná* – obyčejná by nestačila!

Proč zrovna posuny?

Intuice: uzávěrový systém má obsahovat všechny „stupňované průniky“ svých členů.

- V ostrém světě stačí průniky.
- Ve fuzzy světě umí $C_{\mathcal{S}}$ vracet i „oslabené“ členy: $S(A, B) \to B$ je posunuté B.
- Aby $\mathrm{fix}(C_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$, musí systém posuny obsahovat – jinak by pevných bodů bylo víc, než má.

Test na relacích

- Reflexivní relace: průniky ✓, posuny ✓ ($(a \to R)(x,x) = a \to 1 = 1$) $\Rightarrow$ L-uzávěrový systém; operátor je $R \mapsto R \cup \mathrm{id}_X$.
- Symetrické relace: taktéž ✓ ($(a \to R)^{-1} = a \to R^{-1}$).
- Tranzitivní relace: průniky ✓, posuny ✗.

Posun umí zničit tranzitivitu

Łukasiewicz, $X = \{x, y, z\}$, $T(x, y) = T(y, z) = 0.3$, jinde 0 – tranzitivní ($0.3 \otimes 0.3 = 0$).

Posun $T' = 0.5 \to T$:

$$T'(x, y) = T'(y, z) = 0.5 \to 0.3 = 0.8, \qquad \text{jinde } 0.5 \to 0 = 0.5.$$

$$T'(x, y) \otimes T'(y, z) = 0.8 \otimes 0.8 = 0.6 \not\leq 0.5 = T'(x, z).$$ 7

V dokonalé shodě s tím, že tranzitivní uzávěr nemá monotonii ve stupních.

Ostrý vs. stupňovaný svět: přehled

ostrá teorie	stupňovaná teorie
monotonie $\subseteq$	monotonie ve stupních (S)
systém: průniky	systém: průniky + posuny
$C_{\mathcal{S}}(A) = \bigcap\{B \supseteq A\}$	$C_{\mathcal{S}}(A) = \bigcap(S(A,B) \to B)$
tranzitivní uzávěr OK	tranzitivní uzávěr NOPE

Posuny jsou cena za bijekci; vyplatí se to už příště (L07).

Uzávěrové operátory všude kolem

- Topologický uzávěr (Kuratowski 1922), lineární a konvexní obal, generovaná podgrupa...
- V logice: Tarského operátor důsledků (1930).
- U nás: uzávěry relací (L05), extenzionální obal (L07), složení šipkových operátorů ve fuzzy FCA (L10).

„Uzavřenost“ je jedna z nejplodnějších matematických idejí – a funguje i ve stupních.

Duální svět: interiorní operátory

Obrátíme-li nerovnosti, dostaneme interiorní operátor: $I(A) \subseteq A$, monotonie, $I(I(A)) = I(A)$.

- Ostrý vzor: vnitřek množiny v topologii, největší otevřená podmnožina.
- Uzávěr = „nejmenší hezká nadmnožina“, interiér = „největší hezká podmnožina“.
- Celá dnešní teorie se dá zrcadlově přepsat – dobré cvičení na pochopení důkazů.

Aplikace: funkční závislosti v databázích

- Množina atributů $\mapsto$ její uzávěr = vše, co z ní plyne podle funkčních závislostí (Armstrongova pravidla).
- Uzávěr atributů je přesně uzávěrový operátor; uzavřené množiny určují klíče tabulky.
- Stupňovaná verze (podobnostní databáze): závislosti platí *do stupně* – a je potřeba právě dnešní aparát.

Odkud to je

- Ostrá teorie uzávěrů: klasika univerzální algebry a svazů (Birkhoff, Ore, 30.–40. léta).
- Stupňovaná verze s monotonií ve stupních a posuny: R. Bělohlávek, *Fuzzy closure operators* (2001) a kniha *Fuzzy Relational Systems* (2002).
- Právě podmínka posunů je to, co ostrá teorie „nevidí“ – v ostrém světě je triviální.

Kontrolní otázky

1. Proč z $\approx$-reflexivity plyne $R(x, x) = 1$?
2. Ověřte, že $\langle L, \leftrightarrow, \rightarrow \rangle$ splňuje antisymetrii.
3. Je identita $C(A) = A$ L-uzávěrový operátor? A konstanta $C(A) = X$?
4. Kde přesně se v důkazu uzavřenosti pevných bodů na posuny použila monotonie ve stupních?
5. Najděte L-uspořádání, jehož 0.7-řez není tranzitivní.
6. Tvoří extenzionální L-množiny uzávěrový systém? (Tip na příště.)

Shrnutí

- Fuzzy uspořádání: $\approx$-reflexivita + antisymetrie vůči $\approx$ + tranzitivita; $R \cap R^{-1} = \approx$.
- Vzorové příklady: $\langle L^X, \approx, S \rangle$ a $\langle L, \leftrightarrow, \rightarrow \rangle$.
- L-uzávěrové operátory: extenzivita + *monotonie ve stupních* + idempotence.
- Hlavní věta: bijekce operátorů a systémů (průniky + posuny).
- Tranzitivní uzávěr: uzávěrový operátor jen v ostrém smyslu.

Příště: podobnost, extenzionalita, faktorizace.

Ke čtení: skripta, kapitola 6.