KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM07 – Podobnost a kompatibilita

Jan Konečný

11. listopadu 2026

Minule

- Fuzzy uspořádání: antisymetrie vzhledem k L-ekvivalenci; $R \cap R^{-1} = \approx$.
- L-uzávěrové operátory (monotonie ve stupních) $\leftrightarrow$ L-uzávěrové systémy (průniky + posuny).
- Tranzitivní uzávěr: jen ostrý uzávěrový operátor.

Jak podobnost spolupracuje s ostatními pojmy kurzu?

Plán:

- extenzionalita: kdy L-množina „respektuje“ podobnost,
- extenzionální obal,
- Leibnizova L-ekvivalence: podobnost z vlastností,
- věta o zachovávání podobnosti,
- faktorizace: slepení plně podobných prvků.

V celé přednášce: $\approx$ je L-ekvivalence na X.

Motivace

Mějme podobnost $\approx$ na universu. Fuzzy množiny na něm by ji měly „brát vážně“:

- je-li x v A a y je podobné x, mělo by i y být v A – v odpovídajícím stupni.
- „Vysoký“ nesmí skokově končit mezi 180.0 a 180.1 cm.

Definice 1 (extenzionalita)

$A \in L^X$ je extenzionální (kompatibilní) vzhledem k $\approx$, pokud

$$A(x) \otimes (x \approx y) \leq A(y) \qquad \text{pro všechna } x, y \in X.$$

Stupňovaně:

$$\mathrm{Ext}_{\approx}(A) = \bigwedge_{x,y} \big((A(x) \otimes (x \approx y)) \to A(y)\big).$$

Lemma 2

A je extenzionální vzhledem k $\approx$*, právě když*

$$(x \approx y) \leq \big(A(x) \leftrightarrow A(y)\big) \qquad \textit{pro všechna } x, y.$$

Důkaz.

Adjunkce: $A(x) \otimes (x \approx y) \leq A(y)$ p.k. $(x \approx y) \leq A(x) \to A(y)$. Máme pro všechny dvojice, tedy i pro $\langle y, x \rangle$; se symetrií $\approx$ dají obě dohromady biresiduum. □

Slovy: stupeň příslušnosti se mezi podobnými prvky nemění víc, než dovoluje podobnost.

- Vzhledem k ostré rovnosti je extenzionální *každá* množina ($x \approx y > 0$ jen pro $x = y$).
- Zajímavé to začne být pro bohatší podobnosti.

Příklad (Łukasiewicz)

$X = \{x, y, z\}$; $(x \approx y) = 0.9$, $(y \approx z) = 0.7$, $(x \approx z) = 0.6$ (ověřte: L-ekvivalence);

$$A = \{^{1}/x,\ ^{0.9}/y,\ ^{0.4}/z\}.$$

Je A extenzionální?

Porušení:

$$A(x) \otimes (x \approx z) = 1 \otimes 0.6 = 0.6 \not\leq 0.4 = A(z).$$

Nejhorší dvojice ($\langle x, z \rangle$ a $\langle y, z \rangle$) dávají $0.6 \to 0.4 = 0.8$:

$$\mathrm{Ext}_{\approx}(A) = 0.8.$$

- A extenzionální *není* – ale jen „o kus“.
- Jak ji spravit? Nejmenší opravou.

Definice 3 (extenzionální obal)

$$C_{\approx}(A)(y) = \bigvee_{x \in X} \left(A(x) \otimes (x \approx y) \right)$$

- Prvku y přidělíme vše, co si vynutí podobnost s ostatními prvky.
- „Existuje x v A, podobné y“ – supremum + $\otimes$, starý známý vzor.

Obal v příkladu

$$C_{\approx}(A)(x) = \max(1,\ 0.9 \otimes 0.9,\ 0.4 \otimes 0.6) = 1,$$
$$C_{\approx}(A)(y) = \max(1 \otimes 0.9,\ 0.9,\ 0.4 \otimes 0.7) = 0.9,$$
$$C_{\approx}(A)(z) = \max(1 \otimes 0.6,\ 0.9 \otimes 0.7,\ 0.4) = 0.6.$$

$$C_{\approx}(A) = \{^{1}/x,\ ^{0.9}/y,\ ^{0.6}/z\}$$

Prvek z dostal stupeň 0.6, který si vynutila podobnost s x.

Kontrola: obal už extenzionální je

$C_{\approx}(A) = \{^{1}/x,\ ^{0.9}/y,\ ^{0.6}/z\}$; projdeme nejnebezpečnější dvojice (Łukasiewicz):

$$C(x) \otimes (x \approx z) = 1 \otimes 0.6 = 0.6 \leq 0.6 = C(z),$$
$$C(y) \otimes (y \approx z) = 0.9 \otimes 0.7 = 0.6 \leq 0.6 = C(z),$$
$$C(x) \otimes (x \approx y) = 1 \otimes 0.9 = 0.9 \leq 0.9 = C(y).$$

Ostatní dvojice: ještě volnější. $\mathrm{Ext}(C(A)) = 1$. ✓

Singletonové obaly = řádky podobnosti

$$C_{\approx}(\{^{1}/x\})(y) = 1 \otimes (x \approx y) = (x \approx y)$$

– obal singletonu je řádek relace $\approx$.

- V příkladu: $C_{\approx}(\{^{1}/x\}) = \{^{1}/x,\ ^{0.9}/y,\ ^{0.6}/z\}$.
- Extenzionální množiny jsou přesně suprema posunutých řádků – podobnost „generuje“ celý systém.

Věta 4 (o extenzionálním obalu)

$C_{\approx}(A)$ je nejmenší extenzionální L*-množina obsahující A. Navíc $C_{\approx}$ je* L*-uzávěrový operátor; jeho pevné body jsou přesně extenzionální* L*-množiny.*

Obal je extenzionální.

Distributivita $\otimes$ přes suprema a tranzitivita $\approx$:

$$\begin{aligned} C_{\approx}(A)(y) \otimes (y \approx z) &= \bigvee_x \big(A(x) \otimes (x \approx y) \otimes (y \approx z)\big) \\ &\leq \bigvee_x \big(A(x) \otimes (x \approx z)\big) = C_{\approx}(A)(z). \qquad \square \end{aligned}$$

Nejmenší.

Je-li B extenzionální a $A \subseteq B$:

$$A(x) \otimes (x \approx y) \leq B(x) \otimes (x \approx y) \leq B(y). \qquad \square$$

Uzávěrový operátor.

Extenzivita: $A(y) = A(y) \otimes (y \approx y) \leq C_{\approx}(A)(y)$.

Monotonie ve stupních: $A_1(x) \otimes S(A_1, A_2) \leq A_2(x)$, tedy

$$C_{\approx}(A_1)(y) \otimes S(A_1, A_2) \leq \bigvee_x \big(A_2(x) \otimes (x \approx y)\big) = C_{\approx}(A_2)(y).$$

Idempotence: $C_{\approx}(A)$ je extenzionální, a je tedy nejmenší extenzionální nadmnožinou sebe sama. □

Hlavní věta z FM06 $\Rightarrow$ extenzionální množiny tvoří L-uzávěrový systém. ✓

Tři tváře extenzionality

Pro L-množinu A je ekvivalentní:

1. $A(x) \otimes (x \approx y) \leq A(y)$ pro všechna x, y (definice),
2. $\mathrm{Ext}_{\approx}(A) = 1$,
3. $C_{\approx}(A) = A$ (A je pevný bod obalu).

Tentýž pojem lokálně (po dvojicích), kvantitativně (stupněm) a operátorově (pevným bodem).

Obal a operace

Proposition 1

$$C_{\approx}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \bigcup_i C_{\approx}(A_i).$$

Důkaz.

Suprema komutují se supremy:

$$\bigvee_x \Big(\bigvee_i A_i(x)\Big) \otimes (x \approx y) = \bigvee_i \bigvee_x A_i(x) \otimes (x \approx y). \qquad \square$$

S průniky obal komutovat nemusí (jen $\subseteq$) – rozmyslete proč.

Minicviko: extenzionalita na dvou prvcích

$X = \{x, y\}$, $(x \approx y) = 0.8$, Łukasiewicz,

$$A = \{^{1}/x,\ ^{0.7}/y\}.$$

Je A extenzionální? Spočtěte $\mathrm{Ext}_{\approx}(A)$ a $C_{\approx}(A)$.

Minicviko: řešení

- $A(x) \otimes (x \approx y) = 1 \otimes 0.8 = 0.8 \not\leq 0.7$ – extenzionální *není*.
- $\mathrm{Ext}_{\approx}(A) = 0.8 \to 0.7 = 0.9$ (ostatní dvojice dávají 1).
- $C_{\approx}(A)(y) = \max(0.7,\ 1 \otimes 0.8) = 0.8$, tedy $C_{\approx}(A) = \{^{1}/_{x},\ ^{0.8}/_{y}\}$.

Stejné minicviko nad Gödelem

- Porušení: $\min(1,\ 0.8) = 0.8 \not\leq 0.7$ – opět neextenzionální.
- $\mathrm{Ext}_{\approx}(A) = 0.8 \to 0.7 = 0.7$ (Gödelovo residuum vrací cílový stupeň).
- Obal: $C_{\approx}(A)(y) = \max(0.7,\ \min(1, 0.8)) = 0.8$ – *stejný* jako u Łukasiewicze!

Obal se shodl, stupeň extenzionality ne – obal používá jen $\otimes$, stupeň jen $\to$.

Kompatibilní relace

Stejná idea pro relace: $R \in L^{X \times Y}$ je kompatibilní s $\approx^X$, $\approx^Y$, pokud

$$R(x, y) \otimes (x \approx^X x') \otimes (y \approx^Y y') \leq R(x', y').$$

- Nic nového: předpis $(\langle x, y \rangle \approx \langle x', y' \rangle) = (x \approx^X x') \otimes (y \approx^Y y')$ je L-ekvivalence na $X \times Y$ a kompatibilita R je extenzionalita vzhledem k ní.
- Obal i uzávěrové vlastnosti se přenášejí beze změny.

Odkud brát podobnost? Z vlastností!

Leibniz: věci, které se neliší žádnou vlastností, jsou totožné.

Fuzzy zjemnění: nerozlišitelnost neprohlašujeme, ale měříme – stupněm shody ve vlastnostech.

Věta 5 (Leibnizova L-ekvivalence)

Pro soubor vlastností $\mathcal{A} \subseteq L^X$ *je*

$$(x \approx_{\mathcal{A}} y) = \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \big(A(x) \leftrightarrow A(y)\big)$$

L-*ekvivalence, každá* $A \in \mathcal{A}$ *je vůči ní extenzionální, a je to největší* L-*ekvivalence s touto vlastností.*

Důkaz.

L-*ekvivalence:* reflexivita a symetrie z vlastností $\leftrightarrow$; tranzitivita z $(a{\leftrightarrow}b) \otimes (b{\leftrightarrow}c) \leq (a{\leftrightarrow}c)$ – infima ji zachovají.

Extenzionalita: z definice je $(x \approx_{\mathcal{A}} y) \leq A(x) \leftrightarrow A(y)$; lemma o biresiduu.

Největší: je-li každá $A \in \mathcal{A}$ extenzionální vůči E, dává totéž lemma $E(x, y) \leq A(x) \leftrightarrow A(y)$ pro každou A, tedy $E \subseteq \approx_{\mathcal{A}}$. $\square$

Příklad (Łukasiewicz)

$X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$:

$$A_1 = \{^{1}/x,\ ^{0.8}/y,\ ^{0.2}/z\}, \qquad A_2 = \{^{0.6}/x,\ ^{0.6}/y,\ ^{0.9}/z\}.$$

Biresidua ($a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$):

	x, y	x, z	y, z
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	1	0.7	0.7
$\approx_{\mathcal{A}}$	0.8	0.2	0.4

Tranzitivitu netřeba ověřovat – věta ji zaručuje.

K čemu je to dobré

- Prvky (pacienty, výrobky, dokumenty) popíšeme L-množinami vlastností – a podobnost *spočteme*.
- Stupně podobnosti pak nejsou expertní odhad, ale odvozená veličina s jasnou definicí.
- V FM10 na téže myšlence postavíme pojmy z dat.

Věta 6 (operace zachovávají podobnost)

$$(A_1 \approx A_2) \wedge (B_1 \approx B_2) \leq (A_1 \cap B_1) \approx (A_2 \cap B_2),$$
$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq (A_1 \otimes B_1) \approx (A_2 \otimes B_2),$$
$$(R_1 \approx R_2) \otimes (S_1 \approx S_2) \leq (R_1 \circ S_1) \approx (R_2 \circ S_2),$$
$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq S(A_1, B_1) \leftrightarrow S(A_2, B_2).$$

(obdobně pro $\cup$, $\rightarrow$)

Důkaz ($\cap$).

Označme $s = S(A_1, A_2) \wedge S(B_1, B_2)$. Pro každé x:

$$(A_1 \cap B_1)(x) \otimes s \leq \big(A_1(x) \otimes s\big) \wedge \big(B_1(x) \otimes s\big) \leq A_2(x) \wedge B_2(x),$$

tedy $s \leq S(A_1 \cap B_1,\ A_2 \cap B_2)$. Symetricky opačný směr; obě dohromady dají $\approx$. $\square$

Důkaz posledního bodu.

Tranzitivita S dvakrát:

$$S(A_2, A_1) \otimes S(A_1, B_1) \otimes S(B_1, B_2) \leq S(A_2, B_2).$$

Z $(A_1 \approx A_2) \leq S(A_2, A_1)$ a $(B_1 \approx B_2) \leq S(B_1, B_2)$ dá adjunkce

$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq S(A_1, B_1) \to S(A_2, B_2);$$

záměna rolí dá druhou implikaci; infimum obou biresiduum. $\square$

Proč je to důležité

- V praxi stupně příslušnosti **nikdy** neurčíme přesně.
- Věta říká: nevadí – teorie je spojitá vůči stupňům. Výsledky se od „správných“ liší nejvýše tak, jak se liší vstupy.
- Pozor na $\otimes$ na levých stranách: skládáním se nepřesnosti mohou násobit (mocniny relací!).
- Odpověď na otázku z FM04: na desetinkách $T(178)$ nesejde.

Faktorizace: motivace

Prvky s $(x \approx y) = 1$ žádná extenzionální množina nerozliší.

- Nabízí se je slepit: universum se zmenší, o nic nepřijdeme.
- Vzpomeňte matici E z FM04: $E(x, u) = 1$ pro $x \neq u$.

Lemma 7

1-řez $^1{\approx}$ *je klasická ekvivalence na* X*.*

Důkaz.

Tranzitivita: z $(x{\approx}y) = (y{\approx}z) = 1$ plyne $1 = 1 \otimes 1 \leq (x \approx z)$. □

Třídy: $[x] = \{\, y \mid (x \approx y) = 1 \,\}$; faktorová množina $X/{\approx}$.

Věta 8 (faktorizace)

Předpis $([x] \approx [y]) = (x \approx y)$ *je korektní a definuje* L-*rovnost na* $X/{\approx}$. *Extenzionální* L-*množiny přecházejí na faktor korektně* ($A([x]) = A(x)$) *a zůstávají extenzionální.*

Korektnost.

Nechť $[x] = [x']$, $[y] = [y']$, tj. $(x \approx x') = (y \approx y') = 1$. Dvojí tranzitivita:

$$(x \approx y) = \underbrace{(x' \approx x)}_{1} \otimes (x \approx y) \otimes \underbrace{(y \approx y')}_{1} \leq (x' \approx y'),$$

a symetricky opačně – hodnota nezávisí na reprezentantech.

L-rovnost: $([x] \approx [y]) = 1$ dá $(x \approx y) = 1$, tedy $[x] = [y]$. □

Příklad (matice z FM04)

E na $\{x, y, z, u\}$ s $E(x, u) = 1$:

- Třídy podle ${}^1E$: $[x] = \{x, u\}$, $[y] = \{y\}$, $[z] = \{z\}$.
- Indukovaná relace na faktoru:

$$([x] \approx [y]) = 0.9, \quad ([x] \approx [z]) = 0.8, \quad ([y] \approx [z]) = 0.7$$

  – už je to L-rovnost.
- Universum se zmenšilo, o extenzionální množiny jsme nepřišli.

- Neextenzionální množiny na faktor **nepřejdou**: pro $(x \approx x') = 1$ a $A(x) \neq A(x')$ je předpis $A([x]) = A(x)$ nekorektní.
- Extenzionalita je tedy přesně „slučitelnost s podobností“ – právo přežít slepení.

Aplikace: podobnostní vyhledávání

- Databáze záznamů + podobnost $\approx$ (překlepy, přezdívky, blízké adresy).
- Dotaz „najdi Nováka“ = singleton; jeho extenzionální obal = všechny záznamy se stupněm podobnosti – seřazený výsledek zadarmo.
- Deduplikace: faktorizace podle $\approx$ (s prahem σ) slije duplicitní záznamy do tříd.

Proč v definici $\otimes$, a ne $\wedge$?

- Čteme: „*x* je v *A a zároveň x* je podobné *y*“ – dvě premisy se skládají, síla se spotřebovává: to je $\otimes$.
- S $\wedge$ (minimem) by dvě podobnosti 0.8 a 0.8 vynutily pořád 0.8 – řetězení by nic nestálo a obal by „prosákl“ celým universem.
- Stejná volba jako u tranzitivity v FM05 – není náhoda: extenzionalita *je* tranzitivita prodloužená do množiny.

Shrnutí

- Extenzionalita: $A(x) \otimes (x \approx y) \leq A(y)$; ekvivalentně $(x \approx y) \leq A(x) \leftrightarrow A(y)$.
- Extenzionální obal: nejmenší oprava; L-uzávěrový operátor.
- Leibnizova L-ekvivalence: největší podobnost slučitelná s vlastnostmi.
- Zachovávání podobnosti: teorie je robustní vůči nepřesným stupňům.
- Faktorizace: slepením plně podobných prvků vznikne L-rovnost.

Příště: rozšiřovací princip a fuzzy čísla.

Ke čtení: skripta, kapitola 7.