KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM08 – Rozšiřovací princip, fuzzy čísla a fuzzy aritmetika

Jan Konečný

17. listopadu 2026

Minule

- Extenzionalita a extenzionální obal (uzávěrový operátor).
- Leibnizova L-ekvivalence: podobnost z vlastností.
- Zachovávání podobnosti – robustnost teorie; faktorizace.

Dnes: jak na fuzzy množiny aplikovat obyčejné funkce – a jak počítat s neurčitými čísly typu „asi pět“.

Plán:

- rozšiřovací princip (obrazy a vzory),
- vlastnosti obrazů a vzorů,
- fuzzy čísla: definice přes řezy,
- fuzzy aritmetika po řezech,
- co funguje a co ne (monoid, nikoli grupa).

Obraz množiny – klasicky

Pro $f : X \to Y$ a $A \subseteq X$:

$$f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A \,\},$$

tj.

$$y \in f(A) \quad \text{p.k.} \quad \textit{existuje } x \in A \text{ s } f(x) = y.$$

„Existuje“ čteme supremem...

Definice 1 (rozšiřovací princip)

Pro $f : X \to Y$, $A \in L^X$, $B \in L^Y$:

$$f(A)(y) = \bigvee_{\substack{x \in X \\ f(x)=y}} A(x), \qquad f^{-1}(B)(x) = B(f(x)).$$

- Supremum prázdné množiny je 0: mimo obor hodnot má obraz stupeň 0.
- Vzor je pouhé „dosazení“.

Malý příklad

$X = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$:

$$f\left(\{^{0.7}/1,\ ^{0.4}/2,\ ^{0.5}/3\}\right) = \{^{0.7}/a,\ ^{0.5}/b\}.$$

- V bodě a se vzory „přetahují“ supremem: $\max(0.7,\ 0.4) = 0.7$.
- Relační pohled: $f(A) = A \circ R_f$, kde R_f je graf funkce jako ostrá relace – speciální případ skládání z FM04.

Věta 2 (vlastnosti obrazů a vzorů)

1. $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$; $\quad f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$ *(i ostře).*
2. f^{-1} *zachovává* $\bigcap$, $\bigcup$ *i posuny.*
3. $S(A_1, A_2) \leq S(f(A_1),\ f(A_2))$; $\quad S(B_1, B_2) \leq S(f^{-1}(B_1),\ f^{-1}(B_2))$.
4. $f({}^a A) \subseteq {}^a(f(A))$; *rovnost při dosažených supremech (např. konečné* X*).*

Důkaz (3) pro obrazy.

Pro každé y:

$$f(A_1)(y) \otimes S(A_1, A_2) = \bigvee_{f(x)=y} \left(A_1(x) \otimes S(A_1, A_2)\right)$$
$$\leq \bigvee_{f(x)=y} A_2(x) = f(A_2)(y),$$

adjunkce a infimum přes y. □

Protipříklad v (1).

f konstantní, A_1, A_2 ostré neprázdné disjunktní:
$f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. □

Důkaz (2): vzory komutují se vším.

Vzor je dosazení, například

$$f^{-1}\Big(\bigcap_i B_i\Big)(x) = \Big(\bigcap_i B_i\Big)(f(x)) = \bigwedge_i B_i(f(x)) = \Big(\bigcap_i f^{-1}(B_i)\Big)(x);$$

stejně pro $\bigcup$, $a \otimes B$, $a \to B$. □

Obrazy jsou „tvořivé“ (suprema), vzory „poslušné“ (dosazení) – klasická asymetrie, fuzzy beze změny.

Příklad: obraz při $f(x) = x^2$

$A = (-1,\ 0,\ 1)$ trojúhelníkové (viz dále), $f(x) = x^2$:

$$f(A)(y) = A(\sqrt{y}\,) \vee A(-\sqrt{y}\,) = 1 - \sqrt{y} \quad \text{pro } y \in [0, 1]$$

(a 0 jinde).

- Obraz **není** trojúhelníkový – hrana je odmocninová.
- Řezy $[\,0,\ (1-\alpha)^2\,]$ jsou ale pořád uzavřené intervaly.

Vzor: příklad

$f(x) = x^2$ na $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$$B = \{^{0.7}/0,\ ^{1}/1,\ ^{0.4}/4\}.$$

Vzor $f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$:

$$f^{-1}(B) = \{^{0.7}/0,\ ^{1}/-1,\ ^{1}/1,\ ^{0.4}/-2,\ ^{0.4}/2\}.$$

Vzor se počítá „dosazením“ – žádné supremum, proto je jednodušší než obraz.

Více proměnných

Definice 3

Pro $f : X_1 \times X_2 \to Y$:

$$f(A_1, A_2)(y) = \bigvee_{\substack{x_1, x_2 \\ f(x_1, x_2) = y}} \big(A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)\big).$$

- Proč $\wedge$, a ne $\otimes$? Zadehova původní volba – a hlavně: jen s minimem bude platit věta o řezech.
- ($\otimes$-verze existuje a je menší.)

Fuzzy čísla: co chceme

Modelovat „asi pět“, „zhruba mezi dvěma a třemi“:

- aspoň jedna typická hodnota (stupeň 1),
- stupně od typických hodnot *klesají* na obě strany (žádné „zuby“),
- neurčitost nesahá do nekonečna.

Od této chvíle: $L = [0, 1]$, universum $\mathbb{R}$.

Definice 4 (fuzzy číslo)

$A \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ je fuzzy číslo, pokud

- A je normální: $A(x) = 1$ pro nějaké x,
- každý řez ${}^{\alpha}A$ ($\alpha > 0$) je uzavřený interval,
- nosič $\{\, x \mid A(x) > 0 \,\}$ je omezený.

Řezy značíme ${}^{\alpha}A = [a_\alpha,\ b_\alpha]$.

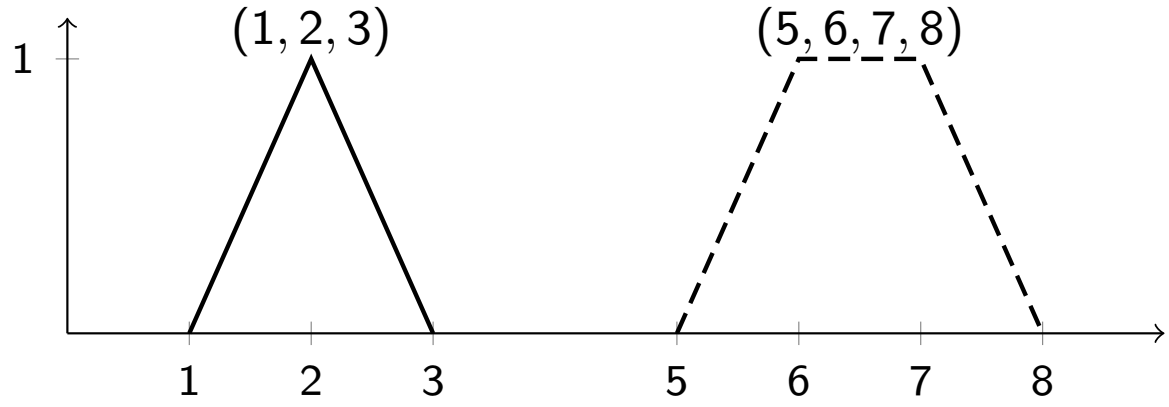
Co podmínky znamenají

- Řezy–intervaly $\Longleftrightarrow$ fuzzy konvexnost:

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq A(x) \wedge A(y).$$

  Mezi dvěma body stupeň neklesne pod menší z krajních.
- Uzavřené řezy $\Longleftrightarrow$ horní polospojitost A.
- Definice přes řezy = přímé napojení na reprezentaci z FM04.

Trojúhelníková a lichoběžníková čísla



- Trojúhelníkové (a, b, c): model „asi b“.
- Lichoběžníkové (a, b, c, d): „zhruba mezi b a c“.
- Ostrá čísla (r, r, r) a intervaly (a, a, b, b): speciální případy.

Odvození řezů trojúhelníku

Na rostoucí části $A(x) = \frac{x-a}{b-a}$; podmínka $A(x) \geq \alpha$:

$$\frac{x-a}{b-a} \geq \alpha \iff x \geq a + \alpha(b-a);$$

na klesající části symetricky $x \leq c - \alpha(c-b)$. Dohromady:

$${}^{\alpha}(a,b,c) = \big[\, a + \alpha(b-a),\quad c - \alpha(c-b) \,\big].$$

- $\alpha = 1$: jádro $\{b\}$; $\quad \alpha \to 0^+$: celý nosič.
- Řezy závisejí na α lineárně – proto se trojúhelníky tak dobře počítají.

Řezy lichoběžníku

(a, b, c, d): rostoucí část do b, plató $[b, c]$, klesající od c:

$$^{\alpha}(a, b, c, d) = \big[\, a + \alpha(b - a), \quad d - \alpha(d - c) \,\big].$$

- $\alpha = 1$: jádro $[b,\ c]$.
- Trojúhelník je speciální případ $b = c$.
- Ostrý interval: $a = b$, $c = d$.

Proč zrovna tahle definice fuzzy čísla?

- Normalita: aspoň jedna plně typická hodnota – jinak by „asi pět“ nemělo žádné „pět“.
- Řezy–intervaly: neurčitost je souvislá – bez „děr“ a „zubů“.
- Uzavřenost a omezenost: suprema se nabývají – klíč k větě o řezech.

Každá podmínka má své místo; vypusťte jednu a věta o aritmetice po řezech spadne.

Fuzzy aritmetika

Rozšiřovacím principem:

$$(A \oplus B)(z) = \bigvee_{x+y=z} \big(A(x) \wedge B(y)\big),$$

podobně $\ominus$ (přes $x - y = z$) a $\odot$ (přes $x \cdot y = z$).

Přímý výpočet je nepohodlný – pomohou řezy.

Připomenutí: intervalová aritmetika

$$
\begin{aligned}
[a,b] + [c,d] &= [a+c,\ b+d],\\
[a,b] - [c,d] &= [a-d,\ b-c],\\
[a,b] \cdot [c,d] &= [\min P,\ \max P], \quad P = \{ac,\ ad,\ bc,\ bd\}.
\end{aligned}
$$

- Odečítání jde „křížem“ – nejhorší případy.
- Intervalová aritmetika: R. E. Moore (1966), původně pro odhady zaokrouhlovacích chyb počítačů.

Věta 5 (fuzzy aritmetika po řezech)

Pro fuzzy čísla A, B a $\alpha \in (0, 1]$:

$$^{\alpha}(A \oplus B) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B,$$

obdobně pro $\ominus$ a $\odot$. Výsledky jsou opět fuzzy čísla.

Idea důkazu.

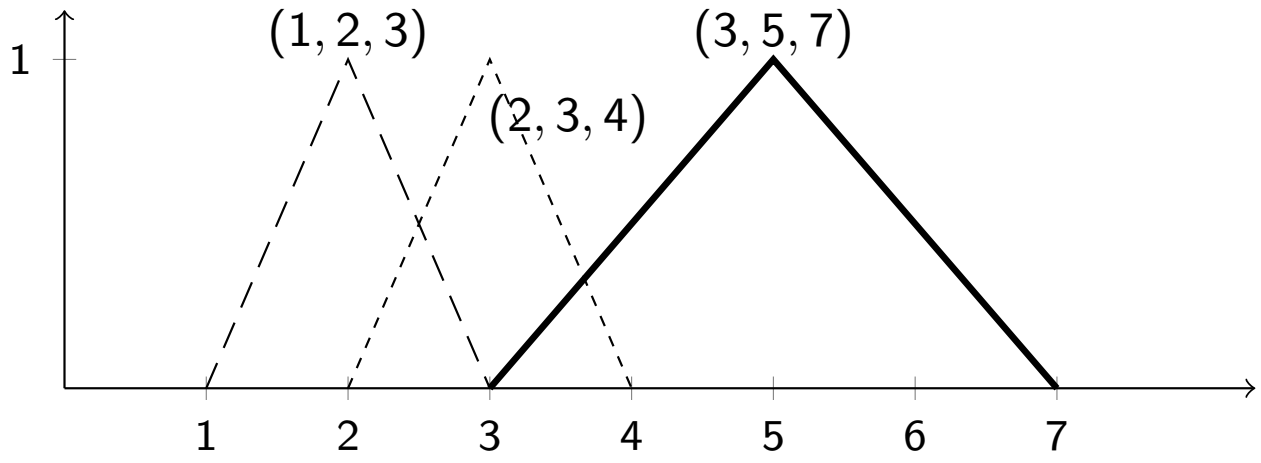
„$\supseteq$“: pro $x \in {}^{\alpha}A$, $y \in {}^{\alpha}B$ je

$$(A \oplus B)(x+y) \geq A(x) \wedge B(y) \geq \alpha.$$

„$\subseteq$“: funkce $g(x) = A(x) \wedge B(z-x)$ je horní polospojitá s omezeným nosičem, takže své supremum *nabývá* v nějakém x_0; pak $A(x_0) \geq \alpha$ i $B(z-x_0) \geq \alpha$. □

Právě tady je potřeba $\wedge$ (a ne $\otimes$) v rozšiřovacím principu!

Asi dva plus asi tři je asi pět



$$[1{+}\alpha,\ 3{-}\alpha] + [2{+}\alpha,\ 4{-}\alpha] = [3{+}2\alpha,\ 7{-}2\alpha]$$

– řezy čísla $(3, 5, 7)$: trojúhelníky se sčítají po složkách.

Ještě jedno sčítání

$(0, 1, 2) \oplus (1, 3, 5)$ po řezech:

$$[\alpha,\ 2-\alpha] + [1+2\alpha,\ 5-2\alpha] = [1+3\alpha,\ 7-3\alpha]$$

– řezy trojúhelníkového čísla $(1,\ 4,\ 7)$.

- Vrcholy: $1+3=4$ ✓; kraje: $0+1=1$, $2+5=7$ ✓.
- Sčítání po složkách funguje i pro různě široká čísla.

Sčítání přes řezy: kontrola

$(1, 2, 3) \oplus (2, 3, 4)$; α-řezy jsou intervaly

$$[1 + \alpha,\ 3 - \alpha] \quad \text{a} \quad [2 + \alpha,\ 4 - \alpha].$$

Intervalové sčítání po řezech:

$$[3 + 2\alpha,\ 7 - 2\alpha]$$

– a to jsou přesně řezy trojúhelníku $(3, 5, 7)$. ✓

Princip rozšíření a počítání po řezech dávají totéž.

Lichoběžníky se sčítají po složkách

$$(a, b, c, d) \oplus (a', b', c', d') = (a + a',\ b + b',\ c + c',\ d + d')$$

Např.

$$(0, 1, 2, 3) \oplus (1, 2, 3, 4) = (1, 3, 5, 7).$$

Jádra se sečtou, nosiče se sečtou – neurčitost roste: šířka nosiče je součtem šířek.

Opačné číslo a skalární násobek

- $-(a, b, c) = (-c, -b, -a)$ – trojúhelník se zrcadlí, např. $-(1, 2, 3) = (-3, -2, -1)$.
- Kladný skalár: $2 \cdot (1, 2, 3) = (2, 4, 6)$.
- Záporný skalár: nejdřív zrcadlo, pak škálování.

Pozor: $A \oplus (-A) \neq 0$ – k tomu se za chvíli vrátíme.

Intervalové násobení: pozor na znaménka

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min P,\ \max P], \quad P = \{ac,\ ad,\ bc,\ bd\}$$

Příklad se zápornými čísly:

$$[-1,\ 2] \cdot [3,\ 4] = [\min\{-3, -4, 6, 8\},\ \max\{\dots\}] = [-4,\ 8].$$

- Nestačí vynásobit kraje „po pořadí“ – je nutné projít všechny čtyři součiny.
- Proto součin trojúhelníků není trojúhelník ani „po složkách“.

U násobení pozor

$(1, 2, 3) \odot (1, 2, 3)$:

$$^{\alpha} = [1{+}\alpha,\ 3{-}\alpha] \cdot [1{+}\alpha,\ 3{-}\alpha] = [\,(1{+}\alpha)^2,\ (3{-}\alpha)^2\,].$$

- Řez pro $\alpha = 0.5$: $[2.25,\ 6.25]$.
- Trojúhelník $(1, 4, 9)$ by měl řez $[2.5,\ 6.5] \Rightarrow$ součin **není trojúhelníkový**.
- Po řezech ale počítat umíme vždy – a to stačí.

Odečítání: nepříjemné překvapení

$(1, 2, 3) \ominus (1, 2, 3)$:

$$[1{+}\alpha,\ 3{-}\alpha] - [1{+}\alpha,\ 3{-}\alpha] = [\,2\alpha - 2,\ 2 - 2\alpha\,]$$

– řezy čísla $(-2,\ 0,\ 2)$.

- „Asi dva minus asi dva“ = „asi nula“ – se *sečtenou* neurčitostí obou operandů.
- Důvod: intervalové odečítání jde křížem (nejhorší případy).

Monoid, nikoli grupa

- $\oplus$ je komutativní, asociativní, ostrá nula $(0, 0, 0)$ neutrální: komutativní monoid.
- Ale $A \ominus A \neq$ ostrá 0: inverze neexistují.
- Šířky nosičů se při $\oplus$ i $\ominus$ **sčítají**: neurčitost se výpočtem kumuluje a sama nezmizí.

Fuzzy rovnice

Má rovnice $A \oplus \mathcal{X} = B$ řešení?

- Šířka řezu ${}^{\alpha}\mathcal{X}$ by musela být šířka$({}^{\alpha}B)$ − šířka$({}^{\alpha}A)$.
- $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 4, 6)$: vyjde $\mathcal{X} = (1, 2, 3)$ ✓ (ověřte po řezech).
- $A = (0, 2, 4)$, $B = (1, 2, 3)$: šířka by vyšla záporná – řešení **neexistuje**.

Fuzzy počítání není jen „rozmazané“ klasické počítání – algebra je chudší a je třeba ji znát.

Minicviko: odečítání

Platí $(1, 2, 3) \ominus (0, 1, 2) = (-1,\ 1,\ 3)$?

Po řezech:

$$[1+\alpha,\ 3-\alpha]-[\alpha,\ 2-\alpha] = [\,(1+\alpha)-(2-\alpha),\ (3-\alpha)-\alpha\,] = [2\alpha-1,\ 3-2\alpha].$$

- $\alpha = 1$: $[1,\ 1]$; $\alpha \to 0$: $(-1,\ 3)$.
- Ano: $(-1,\ 1,\ 3)$. ✓ Vrcholy se odečtou, kraje „křížem“.

Minicviko: součet

Spočtěte

$$(1, 2, 4) \oplus (0, 2, 3)$$

a rozmyslete: je výsledek symetrický trojúhelník?

Minicviko: řešení

$$(1, 2, 4) \oplus (0, 2, 3) = (1, 4, 7)$$

- Po složkách: 1+0, 2+2, 4+3.
- Ramena se sčítají zvlášť: levá $1 + 2 = 3$, pravá $2 + 1 = 3$ – výsledek je symetrický, přestože žádný sčítanec nebyl!
- Asymetrie se sčítáním mohou vyrušit.

Aplikace: fuzzy rozpočet

Tři položky odhadnuté experty (v tis. Kč):

$$(90, 100, 115), \quad (45, 50, 60), \quad (28, 30, 35).$$

Celkem:

$$(163,\ 180,\ 210)$$

– „kolem 180, určitě mezi 163 a 210“.

- Neurčitost jednotlivých odhadů se poctivě nasčítá.
- Výsledek je srozumitelný i pro netechnické publikum.

Lingvistické proměnné

- Zadeh (1975): proměnné, jejichž hodnoty nejsou čísla, ale slova – „malá“, „asi pět“, „vysoká“ – interpretovaná fuzzy čísly.
- Fuzzy čísla jsou stavebním kamenem fuzzy pravidel a regulátorů (FM12).
- Aritmetika po řezech umožňuje se slovy *počítat*.

Shrnutí

- Rozšiřovací princip: obrazy supremem, vzory dosazením; monotonie ve stupních.
- Fuzzy číslo: normální + řezy–uzavřené intervaly + omezený nosič.
- Aritmetika po řezech: fuzzy počítání = intervalové počítání na každé hladině.
- Trojúhelníky se sčítají po složkách; násobení trojúhelníkovost nezachovává.
- $\oplus$: jen monoid – neurčitost se kumuluje, rovnice nemusí mít řešení.

Příště: fuzzy relační rovnice.

Ke čtení: skripta, kapitola 8.