KMI/FUZ Fuzzy množiny
FM09 – Fuzzy relační rovnice

Jan Konečný

24. listopadu 2026

Minule

- Rozšiřovací princip: obrazy supremem, vzory dosazením.
- Fuzzy čísla přes řezy; aritmetika po řezech.
- $\oplus$: komutativní monoid, neurčitost se kumuluje.

Diagnostika z FM04: symptomy $\circ$ znalost $=$ diagnózy.

Dnes obráceně: známe symptomy a diagnózy – a *hledáme znalost*.

Plán:

- formulace úlohy a varovné příklady,
- adjunkce skládání a Sanchezova věta,
- soustavy rovnic, stupeň řešitelnosti,
- duální rovnice s $\triangleleft$.

Definice 1 (fuzzy relační rovnice)

Dáno $A \in L^{X \times Y}$ a $B \in L^{X \times Z}$; řešíme

$$A \circ R = B \qquad \text{s neznámou } R \in L^{Y \times Z}.$$

- Diagnosticky: X pacienti, Y symptomy, Z nemoci; hledáme, které symptomy ukazují na které nemoci – učení znalosti z dat.
- Varianta s neznámou A: převede se inverzí (uvidíme).

Varování č. 1: řešení nemusí existovat

Jednoprvková universa (relace jsou čísla), Łukasiewicz:

$$0.3 \otimes r = 0.8.$$

- Levá strana nikdy nepřesáhne 0.3 – **žádné** řešení.
- Data mohou být se zvolenou strukturou prostě nekonzistentní.

Varování č. 2: řešení nemusí být jediné

Jeden pacient, dva symptomy ($A = (1,\ 0.9)$, $B = (0.8)$):

$$\max\big(r_1,\ 0.9 \otimes r_2\big) = 0.8.$$

Řešení:

- $r_1 = 0.8$, $r_2 \leq 0.9$ libovolné, *nebo*
- $r_2 = 0.9$, $r_1 \leq 0.8$ libovolné.

V množině řešení je ale řád:

- největší řešení: $(0.8,\ 0.9)$,
- dvě minimální: $(0.8,\ 0)$ a $(0,\ 0.9)$,
- vše mezi minimálním a největším je také řešení.

Tento řád teď vysvětlíme obecně.

Lemma 2 (adjunkce skládání)

$$A \circ R \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad R \subseteq A^{-1} \triangleleft B$$

Důkaz.

$A \circ R \subseteq B$ p.k. $A(x,y) \otimes R(y,z) \leq B(x,z)$ pro všechna x, y, z p.k.
$R(y,z) \leq A(x,y) \to B(x,z)$ p.k.
$R(y,z) \leq \bigwedge_x \big(A(x,y) \to B(x,z)\big) = (A^{-1} \triangleleft B)(y,z)$. □

Věrná obdoba adjunkce $\otimes / \to$ – „o patro výš“, mezi skládáními.

Věta 3 (Sanchezova věta, 1976)

Rovnice $A \circ R = B$ má řešení, právě když je jejím řešením

$$\widehat{R} = A^{-1} \triangleleft B, \qquad \widehat{R}(y,z) = \bigwedge_x \big(A(x,y) \to B(x,z)\big).$$

Pak je $\widehat{R}$ největší řešení a s každým řešením R je řešením i každé R' s $R \subseteq R' \subseteq \widehat{R}$.

Důkaz.

Je-li R řešení, pak $A \circ R \subseteq B$, takže $R \subseteq \widehat{R}$ (lemma). Monotonie skládání:

$$B = A \circ R \subseteq A \circ \widehat{R} \subseteq B,$$

poslední inkluze opět z lemmatu ($\widehat{R} \subseteq \widehat{R}$). Tedy $A \circ \widehat{R} = B$. Mezilehlá R': stejný argument. □

Čtení největšího řešení

$$\widehat{R}(y,z) = \bigwedge_{x \in X} \left(A(x,y) \to B(x,z)\right)$$

- „Symptom y ukazuje na nemoc z do stupně, v němž *každý* pacient se symptomem y má nemoc z.“
- Opatrný závěr z dat – infimum přes všechny pacienty.

Proč právě největší řešení?

- Je kanonické: existuje, kdykoli existuje vůbec nějaké řešení, a spočte se vzorcem.
- Je nejopatrnější: připouští všechno, co data nevylučují – žádnou vazbu nepřidává navíc.
- Každé jiné řešení je jeho podmnožinou – ověříme-li neúspěch u největšího, neuspěje nikdo.

Tři úlohy kolem $A \circ R = B$

známe	hledáme	úloha
A, R	B	dopředná (skládání)
A, B	R	identifikace pravidel
R, B	A	diagnóza příčiny

Obě inverzní úlohy řeší tentýž aparát – residuum a největší řešení; liší se jen stranou, na které se residuuje.

Praktický algoritmus

1. Spočti $\widehat{R} = A^{-1} \triangleleft B$.
2. Dosaď: spočti $A \circ \widehat{R}$.
3. Vyjde-li B: hotovo, $\widehat{R}$ je největší řešení.
4. Nevyjde-li: řešení **neexistuje** – nic dalšího zkoušet netřeba.

Jedna zkouška rozhodne o všem.

Příklad (Łukasiewicz)

2 pacienti, 2 symptomy, 1 nemoc:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$\widehat{R}(s_1, n) = (1 \to 0.8) \wedge (0.4 \to 0.5) = 0.8 \wedge 1 = 0.8,$$
$$\widehat{R}(s_2, n) = (0.9 \to 0.8) \wedge (1 \to 0.5) = 0.9 \wedge 0.5 = 0.5.$$

Zkouška:

$$(A \circ \widehat{R})(p_1) = \max(1 \otimes 0.8,\ 0.9 \otimes 0.5) = \max(0.8,\ 0.4) = 0.8 \checkmark$$
$$(A \circ \widehat{R})(p_2) = \max(0.4 \otimes 0.8,\ 1 \otimes 0.5) = \max(0.2,\ 0.5) = 0.5 \checkmark$$

- Řešitelná; s_1 ukazuje na nemoc ve stupni 0.8, s_2 ve stupni 0.5.
- Porovnejte s FM04: tam jsme z R a S počítali diagnózy – teď jsme S „zrekonstruovali“.

Týž příklad nad Gödelem

$$\widehat{R}(s_1, n) = (1 \to 0.8) \wedge (0.4 \to 0.5) = 0.8 \wedge 1 = 0.8,$$
$$\widehat{R}(s_2, n) = (0.9 \to 0.8) \wedge (1 \to 0.5) = 0.8 \wedge 0.5 = 0.5.$$

Zkouška: $\max(\min(1, 0.8),\ \min(0.9, 0.5)) = 0.8$ ✓,
$\max(\min(0.4, 0.8),\ \min(1, 0.5)) = 0.5$ ✓

- Zde náhodou skoro totéž – ale residua se liší ($0.9 \to 0.8$: G 0.8, Ł 0.9); obecně řešitelnost **závisí na struktuře**.

Minicviko: skalární rozcvička

(Łukasiewicz)

1. Najděte největší x s $0.5 \otimes x \leq 0.3$.
2. Existuje x s $0.5 \otimes x = 0.7$?

Minicviko: řešení

1. $x = 0.5 \to 0.3 = 0.8$; zkouška: $0.5 \otimes 0.8 = 0.3$. ✓
2. Ne: $0.5 \otimes x \leq 0.5 \otimes 1 = 0.5 < 0.7$ – levá strana přes 0.5 nikdy nepřeleze.

Tentýž mechanismus v malém: residuum dává kandidáta, monotonie říká, kdy je úloha beznadějná.

Neznámá na druhé straně

$A \circ R = B$ se známou znalostí R a neznámými vstupy A?

- Inverze obrací skládání: $(A \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ A^{-1}$.
- Úloha se převede na předchozí; největší řešení:

$$\widehat{A} = B \triangleright R^{-1}, \qquad \widehat{A}(x, y) = \bigwedge_z \big(R(y, z) \to B(x, z)\big).$$

- Čtení: „jaké nejsilnější symptomy mohl pacient mít, aby vyšly právě tyto diagnózy?“ – abdukce.

Struktura množiny řešení

- Tvar „trsu“: jediný vrchol $\widehat{R}$, pod ním intervaly k minimálním řešením.
- Minimálních může být mnoho; na konečných universech existují, hledají se kombinatoricky, počet může růst exponenciálně.
- Řešení jsou uzavřena na sjednocení:

$$A \circ \bigcup_j R_j = \bigcup_j (A \circ R_j) = B.$$

(alternativní důkaz existence největšího řešení!)

Minimální řešení: rozbor příkladu

$\max(r_1,\ 0.9 \otimes r_2) = 0.8$ podrobně:

- obě složky ≤ 0.8: $r_1 \leq 0.8$ a $0.9 \otimes r_2 \leq 0.8$ (tj. $r_2 \leq 0.9$),
- alespoň jedna složka $= 0.8$: $r_1 = 0.8$, *nebo* $0.9 \otimes r_2 = 0.8$ (tj. $r_2 = 0.9$).

Množina řešení = dvě „stěny kvádru“; minimální prvky jsou rohy $(0.8,\ 0)$ a $(0,\ 0.9)$, největší $(0.8,\ 0.9)$.

Tři adjunkce, jeden příběh

patro	adjunkce
stupně	$a \otimes b \leq c \iff a \leq b \to c$
relace	$A \circ R \subseteq B \iff R \subseteq A^{-1} \triangleleft B$
duál	$B \subseteq A \triangleleft R \iff A^{-1} \circ B \subseteq R$

- Táž myšlenka na třech úrovních – Sanchezovy věty jsou „velká“ verze modu ponens.
- Příště přibude čtvrté patro: Galoisovy konexe.

Soustavy rovnic

Každý pacient je vlastně jedna rovnice – obecně:

$$A_i \circ R = B_i, \qquad i \in I.$$

Věta 4

Soustava má řešení, právě když je řeší

$$\widehat{R} = \bigcap_{i \in I} \left(A_i^{-1} \triangleleft B_i \right),$$

a pak je to největší řešení.

Kandidáty jednotlivých rovnic prostě protneme.

Když řešení není

I bez řešení je $\widehat{R}$ užitečné:

- $A \circ \widehat{R} \subseteq B$ vždy (lemma),
- a mezi všemi takovými je $A \circ \widehat{R}$ největší – nejlepší „opatrné podřešení“.

Nikdy nediagnostikuje víc, než data připouštějí, a ze všech takových je nejtěsnější.

Věta 5 (stupeň řešitelnosti)

Položme $\sigma = S(B,\ A \circ \widehat{R})$. *Pak*

$$\sigma = \left(B \approx A \circ \widehat{R}\right) \qquad a \qquad \text{řešitelná} \iff \sigma = 1.$$

- Příklad: $0.3 \otimes r = 0.8$ má $\widehat{r} = 1$, $0.3 \otimes 1 = 0.3$,

$$\sigma = 0.8 \to 0.3 = 0.5$$

  – „řešitelná napůl“.
- I neřešitelnost je stupňovaná – v duchu celého kurzu.

Soustava v akci

Náš 2×2 příklad jsou vlastně *dvě* jednořádkové rovnice (po pacientech):

$$p_1 : \max(r_1,\ 0.9 \otimes r_2) = 0.8 \qquad \Rightarrow \quad \widehat{R}_1 = (0.8,\ 0.9),$$
$$p_2 : \max(0.4 \otimes r_1,\ r_2) = 0.5 \qquad \Rightarrow \quad \widehat{R}_2 = (1,\ 0.5).$$

Průnik kandidátů:

$$\widehat{R} = \widehat{R}_1 \cap \widehat{R}_2 = (0.8,\ 0.5)\ \checkmark$$

– přesně výsledek z celkové rovnice.

Co s neřešitelnou soustavou v praxi

- Použít $A \circ \widehat{R}$ jako nejlepší opatrnou aproximaci (a hlásit σ).
- Zkusit jinou strukturu L – řešitelnost na ní závisí.
- Hledat „viníky“: pacienty (rovnice), jejichž vyřazení stupeň σ nejvíc zvedne – odlehlá či chybná data.
- Přeformulovat úlohu jako optimalizaci (minimalizuj vzdálenost $A \circ R$ od B).

Duální rovnice

Implikační čtení diagnózy ($\triangleleft$ z FM04) vede na

$$A \triangleleft R = B.$$

Lemma 6 (duální adjunkce)

$$B \subseteq A \triangleleft R \quad \Longleftrightarrow \quad A^{-1} \circ B \subseteq R$$

Důkaz.

$B(x,z) \leq A(x,y) \to R(y,z)$ p.k. $A(x,y) \otimes B(x,z) \leq R(y,z)$ p.k.
$\bigvee_x \big(A(x,y) \otimes B(x,z)\big) \leq R(y,z)$. $\square$

Věta 7 (duální Sanchezova věta)

Rovnice $A \triangleleft R = B$ *má řešení, právě když ji řeší*

$$\widetilde{R} = A^{-1} \circ B, \qquad \widetilde{R}(y,z) = \bigvee_x \big(A(x,y) \otimes B(x,z)\big),$$

a pak je $\widetilde{R}$ *nejmenší řešení.*

- Čtení: „*existuje* pacient, který má symptom y i nemoc z“ – odvážný závěr.

Zrcadlová symetrie

$A \circ R = B$	$A \triangleleft R = B$
kandidát $\widehat{R} = A^{-1} \triangleleft B$	kandidát $\widetilde{R} = A^{-1} \circ B$
největší řešení	nejmenší řešení
opatrné infimum	odvážné supremum
mnoho minimálních	mnoho maximálních

Obě rovnice jsou dokonalé zrcadlové obrazy – dvojice $\circ/\triangleleft$ je sama adjungovaná.

Příklad duální rovnice

Jeden pacient: $A = (1,\ 0.9)$, $B = (0.7)$, Łukasiewicz. Rovnice:

$$r_1 \wedge (0.9 \to r_2) = 0.7.$$

$$\widetilde{r_1} = 1 \otimes 0.7 = 0.7, \qquad \widetilde{r_2} = 0.9 \otimes 0.7 = 0.6.$$

Zkouška: $0.7 \wedge (0.9 \to 0.6) = 0.7 \wedge 0.7 = 0.7$ ✓

Struktura řešení duální rovnice

$r_1 \wedge (0.9 \to r_2) = 0.7$ podrobně:

- nutně $r_1 \geq 0.7$ a $r_2 \geq 0.6$ (jinak minimum podteče),
- a alespoň jeden člen roven 0.7:
  - $r_1 = 0.7$, $r_2 \in [0.6,\ 1]$, *nebo*
  - $r_2 = 0.6$, $r_1 \in [0.7,\ 1]$.
- Nejmenší bod $(0.7,\ 0.6)$; maximální řešení $(0.7,\ 1)$ a $(1,\ 0.6)$.

Obrácený trs – přesně podle duality.

Zajímavost: Sanchez a medicína

- Elie Sanchez publikoval větu o největším řešení v roce 1976 (*Information and Control*).
- Motivací mu byla přesně lékařská diagnostika.
- Fuzzy relační rovnice jsou dnes samostatný obor: minimální řešení, přibližná řešení, numerika, aplikace (i komprese obrazu).

Aplikace mimo medicínu

- Technická diagnostika: příznaky poruch $\times$ závady; z pozorovaných projevů zpět k příčině.
- Doporučovací systémy: uživatelé $\times$ položky; identifikace relace „komu se líbí co“ z hodnocení.
- Znalostní inženýrství: z dvojic (vstup, výstup) rekonstruovat relaci pravidel – inverzní úloha k příštímu tématu.

Výhled: od rovnic k pravidlům

- Dnes: R je neznámá, $A \circ R = B$ řešíme.
- V FM12: R sestavíme z pravidel JE-LI–PAK a skládání $A \circ R$ bude *odvozovací krok*.
- Největší řešení $A \to B$ se vrátí jako „implikační“ konstrukce relace pravidel – dnešek je teoretické jádro fuzzy regulátorů.

Shrnutí

- Rovnice $A \circ R = B$: řešení nemusí existovat ani být jediné.
- Adjunkce skládání $\Rightarrow$ Sanchez: $\widehat{R} = A^{-1} \triangleleft B$ největší řešení; jedna zkouška rozhodne.
- Soustavy: kandidáty protneme. Stupeň řešitelnosti $\sigma = S(B,\ A \circ \widehat{R})$.
- Duální rovnice $A \triangleleft R = B$: nejmenší řešení $\widetilde{R} = A^{-1} \circ B$; opatrné infimum vs. odvážné supremum.

Příště: Galoisovy konexe a pojmy z dat.

Ke čtení: skripta, kapitola 9.