

Kapitola 1

Fuzzy množiny, motivace

Vágní pojmy jako „vysoký“, „teplý“ nebo „blízko“ používáme běžně, ale dvouhodnotová logika si s nimi neporadí: nutí nás u každého objektu rozhodnout ano, nebo ne. Fuzzy logika toto omezení odstraňuje tím, že mezi nepravdu a pravdu vkládá další pravdivostní hodnoty.

Odpovídá tomu pojem fuzzy množiny. Fuzzy množina popisuje soubor objektů tak, že odpověď na otázku, zda objekt do množiny patří, není jen ano nebo ne, ale stupeň pravdivosti vybraný z předem dané škály. Škála obsahuje kromě hodnot 0 (nepravda) a 1 (pravda) i mezistupně.

Zadat fuzzy množinu tedy znamená zadat trojici: univerzum objektů, kterých se otázka příslušnosti týká, škálu pravdivostních stupňů a pravidlo, které objektům z univerza přiřazuje stupeň.

Že dvouhodnotový popis vágních pojmů selhává, je nejlépe vidět na „paradoxu hromady“ (sorites paradox).

Příklad 1.1: Paradox hromady

Paradox hromady (též **sorites paradox**, zkráceně **sorites**) je označení pro skupinu paradoxů, které vycházejí z vágnosti termínů.

Hromada skládající se pouze z jednoho zrnka písku je malá. Pokud přidáte jedno zrnko na malou hromadu, zůstane malá. Každá hromada je proto malá.

Eubúlides z Milétu (4. století př. n. l.)

Těžké začátky. Přijetí fuzzy logiky nebylo zpočátku snadné. Anglické *fuzzy* znamená „rozmazaný, chlupatý“ a má hanlivý nádech – *fuzzy thinking* je zmatené myšlení. Kritika byla ostrá: R. E. Kálmán (1972) prohlásil, že „nic jako fuzzy pojem neexistuje“ a že fuzzifikace je „druh vědecké permisivnosti“; W. Kahan (1975) označil fuzzy teorii za „špatnou, špatnou a zhoubnou“, prý „kokain vědy“. Senátor W. Proxmire dokonce zamýšlel udělit výzkumu fuzzy logiky svou proslulou anticenu *Golden Fleece* („Zlaté rouno“) za plýtvání veřejnými penězi – Zadeh s grantovou agenturou NSF ho přesvědčili, že jde o seriózní vědu. V roce 2017 získala fuzzy logika cenu *Golden Goose Award*, udílenou výzkumu, který zněl zpočátku podivně, ale měl velký společenský přínos.

Fuzzy v Japonsku. V japonštině slovo *fuzzy* žádný hanlivý nádech nemělo a Japonsko fuzzy logiku přijalo rychle. Od konce 80. let řídila fuzzy regulace metro v Sendai a na trh přišly „fuzzy“ spotřebiče: rýžovary, pračky, vysavače, klimatizace. Slovo *fadží* (japonská výslovnost *fuzzy*) v roce 1990 získalo zlatou cenu v japonské soutěži o „slovo roku“ (Šingorjúkógo taišó). Stát výzkum zaštítit i institucionálně: roku 1989 vznikla v Jokohamě vládou podporovaná laboratoř LIFE (*Laboratory for International Fuzzy Engineering Research*).

Modus ponens

$$\frac{\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi)}{\psi}$$

Podívejme se na to formálně. Zápis $S(x)$ označuje tvrzení „hromada o x zrnkách písku je malá“. Předpokládáme, že platí $S(1)$ a $S(x) \Rightarrow S(x+1)$. Slovy: platí „hromada o jednom zrnku je malá“ a „pokud je hromada o x zrnkách písku malá, pak je hromada o $x+1$ zrnkách také malá“, neboli „když přidám na malou hromadu jedno zrnko písku, zůstane malá“. Snadno ukážeme, že za těchto předpokladů platí $S(n)$ pro libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$: z $S(1)$ a $S(1) \Rightarrow S(2)$ dostaneme $S(2)$; z $S(2)$ a $S(2) \Rightarrow S(3)$ dostaneme $S(3)$; ...; z $S(n-1)$ a $S(n-1) \Rightarrow S(n)$ dostaneme $S(n)$.

Podobné povahy jsou i následující dva příklady.

Příklad 1.2: Nerozlišitelnost barev

Nechť $A \approx B$ označuje, že barvy A a B se příliš neodlišují. Je intuitivně jasné, že pokud se A příliš neliší od B a B se příliš neliší od C , pak se A příliš neliší od C , tj. $A \approx B$ a $B \approx C$ implikuje $A \approx C$ (tranzitivita $\approx$). Nyní vezměte jakékoliv dvě barvy A a C . Zřejmě můžeme najít posloupnost barev $B_1, \dots, B_n$ tak, že $A \approx B_1, B_1 \approx B_2, \dots, B_{n-1} \approx B_n, B_n \approx C$, tj. řetězec barev začínající na A a končící na C , ve kterém se po sobě jdoucí barvy příliš neliší. Díky tranzitivitě máme $A \approx C$, tj. jakékoliv dvě barvy se příliš neliší.

Příklad 1.3: Paradox plešatého muže

Předpokládejme, že máme muže, který postupně ztrácí vlasy. Když má plnou hlavu vlasů, rozhodně není plešatý. Ale co když ztratí jeden vlas? Je plešatý? Nejspíše ne, ztráta jednoho vlasu nemění jeho stav z „vlasatý“ na „plešatý“. Ale co když tento proces pokračuje a muž postupně ztrácí vlasy jeden po druhém? V určitém okamžiku bychom museli uznat, že muž je plešatý, i když neexistuje konkrétní počet vlasů, při kterém bychom tuto hranici překročili.

Popsané situace jsou paradoxy v tomto smyslu: jsou nepravdivé (v nějakém zjevném/intuitivním smyslu), ale dostaneme se k nim logicky korektními kroky.

Společnou vlastností sorites paradoxů je to, že jsou formulovány v přirozeném jazyce a obsahují výrazy, které jsou označovány jako vágní („malé“, „ne příliš odlišné“). Při analýze paradoxů by termíny použité k jejich formulaci měly mít přesný význam. A s vágními pojmy je problém, protože nemají přesný význam.

1.1 Rozřešení paradoxů

Přístup založený na pravdě ve stupních umožňuje *sorites* paradox rozřešit. Být malou hromadou je vlastnost vyskytující se ve stupních, a tedy $S(x)$ může nabývat více pravdivostních hodnot než jen 0 nebo 1; vezměme za množinu pravdivostních hodnot reálný interval $[0, 1]$. Uvažme axiomy $S(1)$ a $S(x) \Rightarrow S(x+1)$. Hromada s jedním zrnkem písku je malá, tj. $S(1)$ má pravdivostní stupeň 1. Na druhou stranu $S(x) \Rightarrow S(x+1)$ by mělo mít vysoký pravdivostní stupeň ostře menší než 1, třeba 0.999.

Přímé zobecnění pravidla *modus ponens* říká: z výroku φ s pravdivostí alespoň a a výroku $\varphi \Rightarrow \psi$ s pravdivostí alespoň b odvod' ψ s pravdivostí alespoň $a \otimes b$, schematicky

$$\frac{a / \varphi, b / (\varphi \Rightarrow \psi)}{a \otimes b / \psi},$$

kde $\otimes$ je operace odpovídající konjunkci. Zvolme

$$a \otimes b = \max(0, a + b - 1).$$

Označíme-li $\|\varphi\|$ pravdivost výroku φ , dává opakovaná aplikace zobecněného pravidla (s $\|S(x) \Rightarrow S(x+1)\| = 0.999$ v každém kroku):

$$\begin{aligned} \|S(2)\| &\geq \|S(1)\| \otimes 0.999 = 1 \otimes 0.999 = 0.999, \\ \|S(3)\| &\geq 0.999 \otimes 0.999 = 0.998, \\ \|S(4)\| &\geq 0.998 \otimes 0.999 = 0.997, \\ &\vdots \\ \|S(201)\| &\geq 0.801 \otimes 0.999 = 0.800. \end{aligned}$$

Hodnota 0.999 vlastně není dobře zvolená. Zjevně tak dostaneme $S(1001) = 0$, tedy zhruba tisíc zrněk písku tvoří malou hromadu ve stupni 0. Jedno zrnko písku se jistě vejde do kubického milimetru a taková hromada má tedy méně než kubický centimetr. Pro ilustraci hodnotu ponecháme. Pro realističtější situaci bychom mohli zvolit jinou hodnotu.

Barvy. Přístup založený na stupních pravdivosti také pomůže vyřešit paradox, že „žádné dvě barvy se příliš neliší“. Měli bychom zamítnout předpoklad, že vztah „neliší se příliš“ je dvouhodnotový (tj. dvě barvy se buďto velmi liší, nebo se příliš neliší). Měli bychom spíše chápat vztah $\approx$ tak, že připouští pravdivost ve stupních, což je docela přirozený předpoklad.

Například vezměte barvy A , B a C s vlnovými délkami x , y a z a předpokládejte navíc, že $x < y < z$ a $|x - y| < |y - z|$. Pak je A bližší k B než B k C , a tudíž pravdivostní hodnota $A \approx B$ je větší než pravdivostní hodnota $B \approx C$. Když vyjdeme z intuitivně přijatelného předpokladu, že vzorec „pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$ “ (tranzitivita $\approx$) by měl být pravdivý, a opět vezmeme $[0, 1]$ jako množinu pravdivostních hodnot a součin jako operaci odpovídající konjunkci, pak stupňovaný přístup k $\approx$ převádí tento předpoklad na podmínku

$$\|A \approx B\| \cdot \|B \approx C\| \leq \|A \approx C\|$$

($\|X\|$ označuje pravdivostní hodnotu X). Takže pokud například pravdivostní hodnoty „ A a B se příliš neliší“ a „ B a C se příliš neliší“ jsou $0,8$ a $0,5$, pak omezení na A a C pomocí pravidla „pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$ “ je, že stupeň pravdivosti „ A a C se příliš neliší“ je alespoň $\|A \approx B\| \cdot \|B \approx C\| = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4$, což je intuitivně uspokojivé.

1.2 Struktury stupňů pravdivosti

Zatím jsme za stupně pravdivosti brali interval $[0, 1]$. Ted' se zeptáme obráceně: jaké vlastnosti musí množina stupňů pravdivosti mít, aby v ní šlo rozumně počítat? Jednotlivé požadavky vyvodíme z přirozených logických předpokladů.

Přístup založený na stupních pravdivosti přímo vede k předpokladu, že množina L stupňů pravdivosti je částečně uspořádaná (částečné uspořádání označujeme $\leq$) s 0 a 1 jako nejmenším a největším prvkem. Pro každé dva stupně pravdivosti a a b existuje stupeň pravdivosti větší nebo rovný a i b . Navíc můžeme požadovat, aby existoval nejmenší stupeň pravdivosti větší nebo rovný a i b . Tímto způsobem dospíváme k požadavku na existenci suprem (a duálně infim) dvouprvkových podmnožin v L .

Nechť $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ je množina tvrzení. Zobecnění z klasického případu dvouhodnotové logiky vede k předpokladu, že stupeň pravdivosti „existuje $i \in I$ takové, že φ_i “ je supremem stupňů pravdivosti φ_i , tj.

$$\| \text{„existuje } i \in I \text{ takové, že } \varphi_i \text{“} \| = \bigvee_{i \in I} \|\varphi_i\|$$

($\|\varphi\|$ je stupeň pravdivosti φ). Pokud tedy chceme hodnotit taková existenční (a duálně, univerzální) tvrzení, měla by existovat suprema (a infima) libovolných podmnožin L . Tímto způsobem dospíváme k předpokladu, že L by měl být úplný svaz.

Nyní se dostáváme k otázce operací na L , které modelují logické spojky. Obecný princip, kterého se držíme, říká, že by měly rozšířit klasické operace tak, že pokud je omezíme na „klasické stupně pravdivosti“ 0 a 1 , shodují se s klasickými operacemi.

Dále, stejně jako v klasickém případě, chceme, aby logika byla pravdivostně funkcionální, tj. stupeň pravdivosti složené formule závisí pouze na stupních pravdivosti jejích částí. Začneme konjunkcí. Operaci, která jí odpovídá, označme $\otimes$. Protože $\otimes$ by mělo rozšířit operaci odpovídající klasické konjunkci, vyžadujeme $1 \otimes 1 = 1$ a $1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0$. Dále je přirozené vyžadovat, aby operace $\otimes$ byla neklesající. Tímto způsobem jsme dospěli k tomu, že $(L, \otimes, 1)$ je komutativní monoid.

Implikace. V klasické logice vystupují konjunkce a implikace ve formulaci inferenčního pravidla zvaného *modus ponens*. *Modus ponens* tvrdí, že pokud je φ platné a $\varphi \Rightarrow \psi$ je platné (kde $\Rightarrow$ značí „implikuje“), pak ψ je platné. Upravme formulaci pomocí stupně platnosti: řekněme, že φ je platné ve stupni 1, pokud je φ platné, a ve stupni 0, pokud platné není. Ekvivalentní formulace *modu ponens* pak zní: pokud je φ platné alespoň ve stupni a a $\varphi \Rightarrow \psi$ je platné alespoň ve stupni b ($a, b \in \{0, 1\}$), pak ψ je platné alespoň ve stupni $a \otimes_2 b$. Toto pravidlo je platné v tom smyslu, že pokud φ a ψ jsou formule takové, že $a \leq \|\varphi\|$ a $b \leq \|\varphi \Rightarrow \psi\|$, pak $a \otimes_2 b \leq \|\psi\|$.

Takže při použití *modus ponens* nemůže nastat situace, že „odvodíme více, než je ve skutečnosti pravda“. Proto je úloha $\otimes_2$ v *modus ponens* určit dolní odhad platnosti odvozené formule ψ z dolních odhadů platnosti φ a $\varphi \Rightarrow \psi$. Vidíme také, že $\otimes_2$ dává nejvyšší možný dolní odhad za podmínky, že pravidlo je platné. Tento pohled na *modus ponens* je vhodný pro zobecnění na případ pravdivosti ve stupních.

Znalost, že $a \leq \|\varphi\|$ a $b \leq \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ ($a, b \in L$), nás vede k použití $\otimes$ k (1) získání dolního odhadu platnosti ψ . Navíc chceme (2) získat nejvyšší možný dolní odhad, za podmínky, že pravidlo je stále platné. Označme $\rightarrow$ binární operaci na L , která odpovídá $\Rightarrow$.

Podmínka (1) v tomto pohledu říká, že pokud $a \leq \|\varphi\|$ a $b \leq \|\varphi \Rightarrow \psi\|$, potom platí $a \otimes b \leq \|\psi\|$. Díky pravdivostní funkcionalitě to znamená: pokud $a \leq \|\varphi\|$ a $b \leq \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\|$, potom platí $a \otimes b \leq \|\psi\|$. Dosadíme-li $a = \|\varphi\|$ a označíme-li $c = \|\psi\|$, dostáváme speciální případ této implikace, tedy

$$b \leq a \rightarrow c \quad \text{implikuje} \quad a \otimes b \leq c.$$

Podmínka (2): Chceme, aby odvození pomocí *modus ponens* bylo co nejsilnější. Z $a = \|\varphi\|$ a $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$ dostáváme dolní odhad $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ hodnoty $c = \|\psi\|$, tj. $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\| \leq c$. Pravidlo je tím silnější, čím větší je odhadovaná hodnota $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ (za podmínky, že pravidlo je stále platné, tj. dává dolní odhad $\|\psi\|$). Jelikož a je dané, hodnota $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ závisí na $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$. Protože operace $\otimes$ je neklesající, větší $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$ vede k větší (nebo alespoň stejné) hodnotě $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\|$.

Protože $\|\varphi \Rightarrow \psi\| = \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\| = a \rightarrow c$, požadavek, aby *modus ponens* byl co nejsilnější, implikuje, že hodnota $a \rightarrow c$ by měla být co největší hodnotou, která vede k dolnímu odhadu c . Chceme tedy, aby kdykoliv platí $a \otimes b \leq c$ (tj. kdykoliv je b možným kandidátem pro $\|\varphi\| \rightarrow \|\psi\| = a \rightarrow c$; b je považován za možného kandidáta, protože vede k dolnímu odhadu), platilo $b \leq a \rightarrow c$ (tj. hodnota $a \rightarrow c$ je alespoň tak dobrá jako b , protože vede k alespoň stejně dobrému dolnímu odhadu c). Neboli

$$a \otimes b \leq c \quad \text{implikuje} \quad b \leq a \rightarrow c.$$

Kombinací podmínek, které jsme odvodili z (1) a (2), dostáváme

$$a \otimes b \leq c \quad \text{právě když} \quad b \leq a \rightarrow c.$$

[WARD39]

M. Ward, R. P. Dilworth:

Residuated lattices.

Transactions of the American Mathematical Society 45(3), 335–354 (1939).

[GOGUEN69]

J. A. Goguen:

The logic of inexact concepts.

Synthese 19(3–4), 325–373 (1969).

Tuto podmínku budeme nazývat **podmínkou adjunkce**. Algebraické struktury, které splňují výše vyvozené podmínky, se nazývají úplné residuované svazy a my je v tomto kurzu budeme používat jako struktury pravdivostních hodnot.

Residuované svazy byly zavedeny v [WARD39] a jako struktura pro fuzzy logiku identifikovány v [GOGUEN69].

Cvičení

1. V rozboru sorites paradoxu nahraďte hodnotu 0.999 hodnotou 0.9999. Od kolika zrněk klesne pravdivostní stupeň $S(n)$ pod 0.5? A od kolika bude nulový?
2. Formalizujte paradox plešatého muže stejně, jako jsme formalizovali paradox hromady: zvolte predikát, axiomy a jejich pravdivostní stupně a spočtěte, jak se stupně propagují.
3. Mějme čtyři barvy A, B, C, D a stupně podobnosti $\|A \approx B\| = \|B \approx C\| = \|C \approx D\| = 0.9$. Jaký dolní odhad stupně $\|A \approx D\|$ dává tranzitivita s operací $a \otimes b = \max(0, a + b - 1)$? A s operací $a \otimes b = a \cdot b$?
4. Odvození podmínky adjunkce nezávisí na konkrétní volbě $\otimes$. Vezměte $a \otimes b = \min(a, b)$ a z předpisu „ $a \rightarrow c$ je největší b takové, že $a \otimes b \leq c$ “ odvoďte explicitní vzorec pro residuum (dostanete Gödelovu implikaci z Příkladu 2.1).
5. Kde přesně by se v odvození podmínky adjunkce pokazila korektnost pravidla *modus ponens*, kdyby operace $\otimes$ nebyla neklesající?