

Kapitola 2

Residuované svazy

V předchozí kapitole jsme odvodili vlastnosti, které požadujeme po struktuře pravdivostních hodnot. Nyní je shrneme do formální definice.

2.1 Definice a příklady

Definice 2.1

(Úplný) **residuovaný svaz** je struktura $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ splňující

- $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je (úplný) svaz,
- $\langle L, \otimes, 1 \rangle$ je komutativní monoid, tj. $\otimes$ je binární operace, která je komutativní, asociativní a $a \otimes 1 = a$ pro všechna $a \in L$;
- $\otimes$ a $\rightarrow$ splňují **podmínku adjunkce**, tj.
$$a \otimes b \leq c \text{ právě když } a \leq b \rightarrow c \text{ pro všechna } a, b, c \in L.$$

Nejdůležitější částí definice je podmínka adjunkce. Ta spojuje operace $\otimes$ a $\rightarrow$; všechny vlastnosti residua budeme odvozovat z ní. Je to podmínka, kterou jsme v předchozí kapitole vyvodili z požadavku, aby pravidlo *modus ponens* bylo korektní a co nejsilnější.

My budeme uvažovat pouze úplné residuované svazy (kdykoli je zde psáno „residuovaný svaz“, myslí se tím „úplný residuovaný svaz“).

Názvosloví pochází z algebry: dvojici zobrazení $x \mapsto a \otimes x$ a $y \mapsto a \rightarrow y$, svázanou podmínkou adjunkce, nazýváme adjungovaný (residuovaný) pár; jde o monotónní obdobu Galoisovy konexe.

V tomto textu $\mathbf{L}$ označuje libovolný residuovaný svaz (tedy úplný), zkracováno RS.

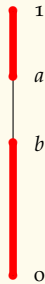
Prvky nosné množiny L se nazývají **pravdivostní stupně**. Operace $\otimes$ (**multiplikace**) a $\rightarrow$ (**residuum**) hrají roli pravdivostních funkcí „fuzzy konjunkce“ a „fuzzy implikace“.

0 a 1 označují **nejmenší** a **největší prvek**.

Následující tři struktury na jednotkovém intervalu jsou pro fuzzy logiku nejdůležitější a budeme je používat v celém textu.

Residuované svazy z příkladu 2.1 jsou speciální případ residuovaných svazů indukovaných tzv. t-normami (popíšeme si je v kapitole 3).

U Łukasiewicze, $a \rightarrow b$ (v případě $b \leq a$):



$$\begin{aligned} a \rightarrow b &= \min(1 - a + b, 1) \\ &= 1 - a + b \\ &= 1 - (a - b) \end{aligned}$$

Příklad 2.1

Tři nejdůležitější dvojice adjunktních operací na jednotkovém intervalu

- Łukasiewicz

$$\begin{aligned} a \otimes b &= \max(a + b - 1, 0), \\ a \rightarrow b &= \min(1 - a + b, 1), \end{aligned}$$

- Gödel

$$\begin{aligned} a \otimes b &= \min(a, b), \\ a \rightarrow b &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \leq b, \\ b & \text{jinak,} \end{cases} \end{aligned}$$

- Goguen (součinná)

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a \cdot b, \\ a \rightarrow b &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \leq b, \\ \frac{b}{a} & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

Příklad 2.2

Mějme $L = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_n = 1\}$ s lineárním uspořádáním $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Pak $a_i \wedge a_j = a_{\min(i,j)}$ a $a_i \vee a_j = a_{\max(i,j)}$. Následující operace určují (úplný) residuovaný svaz na L :

$$\begin{aligned} (1) \quad a_k \otimes a_\ell &= a_{\max(k+\ell-n, 0)}, \\ a_k \rightarrow a_\ell &= a_{\min(n-k+\ell, n)}. \end{aligned}$$

Pokud $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq [0, 1]$ a $a_i = \frac{i}{n}$, pak jsou tyto operace restrikcemi Łukasiewiczových operací na množinu $\{a_0, \dots, a_n\}$, tj. $\{a_0, \dots, a_n\}$ je poduniverzum standardní Łukasiewiczovy algebry.

$$\begin{aligned} (2) \quad a_k \otimes a_\ell &= a_{\min(k, \ell)}, \\ a_k \rightarrow a_\ell &= \begin{cases} a_n & \text{pokud } k \leq \ell, \\ a_\ell & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

(Gödelova struktura); pokud $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq [0, 1]$ a $a_0 = 0, a_n = 1$, pak jsou všechny operace restrikce Gödelových operací na množinu $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Pro $L = \{0, 1\}$ obě struktury (1) a (2) z příkladu 2.2 nám dají tutéž strukturu – dvouprvkovou booleovskou algebru, tj. strukturu pravdivostních hodnot klasické logiky. Na množině $\{0, 1\}$ neexistuje jiný residuovaný svaz.

2.2 Základní vlastnosti residuovaných svazů

V důkazech následujících vět máme k dispozici jen definici; většinou vystačíme s podmínkou adjunkce. U každé věty si lze rozmyslet, jaké pravidlo klasické logiky zobecňuje.

Věta 2.3

Pro všechna $a, b \in L$:

$$\begin{aligned} a \otimes (a \rightarrow b) &\leq b \\ b &\leq a \rightarrow (a \otimes b) \\ a &\leq (a \rightarrow b) \rightarrow b \end{aligned}$$

Nerovnost $a \otimes (a \rightarrow c) \leq c$ (první nerovnost z věty, jen s b přejmenovaným na c) je vlastně to, co jsme požadovali, když jsme vyvozovali podmínku adjunkce.

$$\|\varphi\| \otimes (\|\varphi \Rightarrow \psi\|) \text{ je dolní odhad } \|\psi\|.$$

Důkaz

Toto vychází přímo z adjunkce:

Připomeňme: $x \otimes y \leq z$ právě když $x \leq y \rightarrow z$.

Položme: $x = a \rightarrow b, y = a, z = b$: dostaneme

$$(a \rightarrow b) \otimes a \leq b \quad \text{právě když} \quad a \rightarrow b \leq a \rightarrow b.$$

Položme: $x = b, y = a, z = a \otimes b$: dostaneme

$$b \otimes a \leq a \otimes b \quad \text{právě když} \quad b \leq a \rightarrow (a \otimes b).$$

Položme: $x = a, y = a \rightarrow b, z = b$: dostaneme

$$a \otimes (a \rightarrow b) \leq b \quad \text{právě když} \quad a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b.$$

Význam:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a		1			1
b			1		1
c				1	1
1					1

Věta 2.4

Pro všechna $a, b \in L$:

$$a \leq b \text{ právě když } a \rightarrow b = 1$$

$$a \rightarrow a = 1 \quad a \rightarrow 1 = 1 \quad 0 \rightarrow a = 1$$

Důkaz

Opět přímo z adjunkce: (přip.: $x \otimes y \leq z$ právě když $x \leq y \rightarrow z$)

Položme: $x = 1, y = a, z = b$: dostaneme

$$1 \otimes a \leq b \text{ právě když } 1 \leq a \rightarrow b.$$

Rovnosti na druhém řádku jsou toho přímým důsledkem.

Podle první části věty je implikace plně pravdivá, tj. $a \rightarrow b = 1$, právě když závěr je alespoň tak pravdivý jako předpoklad. Uspořádání svazu je tedy určeno residuem. Rovnosti na druhém řádku jsou speciálními případy; poslední z nich, $0 \rightarrow a = 1$, odpovídá klasickému principu, že z nepravdy plyne cokoli.

Význam:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a		1			1
b			1		1
c				1	1
1	0	a	b	c	1

Věta 2.5

Pro všechna $a \in L$:

$$1 \rightarrow a = a$$

Důkaz

Šlo by přímo z adjunkce, ale použijme to, co jsme už dokázali

$$a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$$

$$b \leq a \rightarrow (a \otimes b)$$

Dosaďme $a = 1$.

Význam:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0				a
b	0				b
c	0				c
1	0	a	b	c	1

Věta 2.6

Pro všechna $a \in L$ platí

$$a \otimes 0 = 0.$$

Důkaz

Nerovnice $a \otimes 0 \leq 0$ je ekvivalentní (dle adjunkce) s $0 \leq a \rightarrow 0$, což platí.

Věta 2.7

Pro všechna $a, b \in L$ platí

$$\begin{aligned} a \otimes b &\leq a \\ a &\leq b \rightarrow a. \end{aligned}$$

Důkaz

Tyto dvě nerovnice jsou dle adjunkce ekvivalentní. Stačí tedy dokázat jednu z nich. Z věty 2.4 máme, že $a \rightarrow a = 1$. Takže $b \leq a \rightarrow a$, a tedy $a \otimes b \leq a$ dle adjunkce.

Věta 2.8

Pro všechna $a, b \in L$:

$$a \otimes b \leq a \wedge b$$

Důkaz

Z věty 2.7 máme, že $a \otimes b \leq a$. A tedy i $a \otimes b \leq b$. Dokazovaná nerovnost plyne z těchto dvou.

Věta 2.9

Pro všechna $a, b, c \in L$ platí

$$(a \otimes b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$$

Důkaz

„ $\leq$ “:

$$(a \otimes b) \rightarrow c \leq a \rightarrow (b \rightarrow c) \quad (\text{adjunkce})$$

$$a \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c) \leq b \rightarrow c \quad (\text{adjunkce})$$

$$b \otimes (a \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c)) \leq c \quad (\text{asociativita a komutativita})$$

$$(a \otimes b) \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c) \leq c$$

Poslední nerovnice platí: už jsme dokázali $(x \otimes (x \rightarrow y) \leq y)$. „ $\geq$ “:

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \rightarrow c) &\leq (a \otimes b) \rightarrow c && \text{(adjunkce)} \\ (a \otimes b) \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) &\leq c && \text{(asoc. a kom.)} \\ b \otimes (a \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c))) &\leq c && \text{(adjunkce)} \\ a \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) &\leq b \rightarrow c \end{aligned}$$

Poslední nerovnice platí: už jsme dokázali $(x \otimes (x \rightarrow y) \leq y)$.

Věta 2.10: tranzitivita „fuzzy implikace“

Pro všechna $a, b, c \in L$:

$$(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c.$$

Důkaz

Dle adjunkce je dokazovaná nerovnost ekvivalentní s nerovnostmi

$$\begin{aligned} a \otimes (a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) &\leq c \\ a \otimes (a \rightarrow b) &\leq (b \rightarrow c) \rightarrow c \end{aligned}$$

To platí, protože $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$ a taky $b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow c$.

Věta zobecňuje klasické řetězení implikací: ze stupňů $a \rightarrow b$ a $b \rightarrow c$ dostáváme dolní odhad stupně $a \rightarrow c$. Použijeme ji například při důkazu tranzitivity podmnožinovitosti ve stupních v kapitole 4.

Věta 2.11

Pro všechna $a, b \in L$:

- $a \rightarrow b$ je největší prvek $\{c \mid a \otimes c \leq b\}$
- $a \otimes b$ je nejmenší prvek $\{c \mid a \leq b \rightarrow c\}$

Z tohoto vyplývá, že pro $\otimes$ existuje nejvýše jedno residuum $\rightarrow$... (a také naopak)

Důkaz

Víme, že $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$, a tedy $a \rightarrow b \in \{c \mid a \otimes c \leq b\}$; a pokud $a \otimes c \leq b$, pak dle adjunkce $c \leq a \rightarrow b$. Podobně víme,

že $a \leq b \rightarrow (a \otimes b)$, a tedy $a \otimes b \in \{c \mid a \leq b \rightarrow c\}$; a pokud $a \leq b \rightarrow c$, pak dle adjunkce $a \otimes b \leq c$.

Z věty plyne, že operace $\otimes$ a $\rightarrow$ se navzájem jednoznačně určují. Prvek $a \rightarrow b$ lze chápat jako „podíl“ b děleno a : je to největší prvek, který po vynásobení prvkem a nepřesáhne b . U Goguenovy struktury z příkladu 2.1 je $a \rightarrow b$ pro $a > b$ přímo podíl b/a .

Věta 2.12: monotonie $\otimes$ a $\rightarrow$

V každém RS platí:

$$\begin{array}{lll} b_1 \leq b_2 & \text{implikuje} & a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2, \\ b_1 \leq b_2 & \text{implikuje} & a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2, \\ a_1 \leq a_2 & \text{implikuje} & a_2 \rightarrow b \leq a_1 \rightarrow b. \end{array}$$

Pozor, v posledním se mění směr nerovnosti.

Důkaz

Dle adjunkce $a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2$ je ekvivalentní

$$b_1 \leq a \rightarrow (a \otimes b_2)$$

a to platí, protože máme předpoklad $b_1 \leq b_2$ a víme, že $b_2 \leq a \rightarrow (a \otimes b_2)$.

Důkaz

Důkazy zbylých dvou jsou analogické:

Dle adjunkce $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2$ je ekvivalentní

$$a \otimes (a \rightarrow b_1) \leq b_2$$

a to platí, protože máme předpoklad $b_1 \leq b_2$ a víme, že $a \otimes (a \rightarrow b_1) \leq b_1$.

Dle adjunkce $a_2 \rightarrow b \leq a_1 \rightarrow b$ je ekvivalentní

$$a_1 \otimes (a_2 \rightarrow b) \leq b.$$

A to platí: z předpokladu $a_1 \leq a_2$ dostáváme $a_1 \otimes (a_2 \rightarrow b) \leq a_2 \otimes (a_2 \rightarrow b)$ (dle první – už dokázané – implikace v této větě) a víme, že $a_2 \otimes (a_2 \rightarrow b) \leq b$.

To vlastně říká, že výsledek residua (funkce implikace) se nesníží, když na oba argumenty aplikujeme stejnou operaci.

Pozor, v posledním se mění pořadí na pravé straně.

Věta 2.13

V každém RS platí:

$$a \rightarrow b \leq (a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c) \quad (2.1)$$

$$a \rightarrow b \leq (a \vee c) \rightarrow (b \vee c) \quad (2.2)$$

$$a \rightarrow b \leq (a \otimes c) \rightarrow (b \otimes c) \quad (2.3)$$

$$a \rightarrow b \leq (c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b) \quad (2.4)$$

$$a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c) \quad (2.5)$$

Důkaz

(2.1) Dle adjunkce je to ekvivalentní s

$$(a \wedge c) \otimes (a \rightarrow b) \leq b \wedge c.$$

A to vyplývá z:

$$(a \wedge c) \otimes (a \rightarrow b) \leq (a \otimes (a \rightarrow b)) \wedge (c \otimes (a \rightarrow b)) \leq b \wedge c.$$

(2.2) Dle adjunkce je to ekvivalentní s

$$(a \vee c) \otimes (a \rightarrow b) \leq b \vee c.$$

A to vyplývá z:

$$\begin{aligned} & (a \vee c) \otimes (a \rightarrow b) \\ &= (a \otimes (a \rightarrow b)) \vee (c \otimes (a \rightarrow b)) \quad (*) \\ &\leq b \vee c \end{aligned}$$

(*) tuto rovnost ještě nemáme dokázanou.

Dokážeme ji v další větě.

(2.3) Dle adjunkce (a asociativity a komutativity $\otimes$) je to ekvivalentní s

$$(a \otimes (a \rightarrow b)) \otimes c \leq b \otimes c,$$

což platí, protože $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$ a $\otimes$ je monotonní.

(2.4),(2.5) Obojí se dokáže stejně (ukážeme pro první). Dle adjunkce je to ekvivalentní s

$$(c \rightarrow a) \otimes (a \rightarrow b) \leq c \rightarrow b,$$

což víme, že platí.

2.3 Základní vlastnosti $\otimes$ a $\rightarrow$ vzhledem k infimům a supremům

Začneme větou, která je obdobou distributivních zákonů.

Věta 2.14

Následující rovnosti platí pro každou množinu indexů I .

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i) \quad (2.6)$$

$$a \rightarrow \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \rightarrow b_i) \quad (2.7)$$

$$\bigvee_{i \in I} a_i \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b) \quad (2.8)$$

První rovnice (2.6) pro $|I| = 2$ je to, co jsme potřebovali v důkazu předchozí věty.

Důkaz

(2.6): Z monotonie $\otimes$ máme $a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i \geq a \otimes b_i$ pro každé $i \in I$, a tedy

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i \geq \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i).$$

Označme $t = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i)$. Dle vlastností suprema $a \otimes b_i \leq t$ pro všechna $i \in I$. Dle adjunkce je to ekvivalentní s $b_i \leq a \rightarrow t$ pro všechna $i \in I$. A tedy $\bigvee_{i \in I} b_i \leq a \rightarrow t$, a dle adjunkce $a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i \leq t$.

(2.7): Dle monotonie $\rightarrow$ v druhém argumentu platí

$$a \rightarrow \bigwedge_{i \in I} b_i \leq \bigwedge_{i \in I} (a \rightarrow b_i).$$

Označme $t = \bigwedge_{i \in I} (a \rightarrow b_i)$. Dle vlastností infima $t \leq a \rightarrow b_i$ pro všechna $i \in I$. Dle adjunkce je to ekvivalentní s $a \otimes t \leq b_i$ pro všechna $i \in I$. A tedy $a \otimes t \leq \bigwedge_{i \in I} b_i$, a dle adjunkce $t \leq a \rightarrow \bigwedge_{i \in I} b_i$.

(2.8): Dle antitonie $\rightarrow$ v prvním argumentu platí

$$\bigvee_{i \in I} a_i \rightarrow b \leq \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b).$$

Označme $t = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b)$.

Dle vlastností infima $t \leq a_i \rightarrow b$ pro všechna $i \in I$. Dle adjunkce (2 $\times$) je to ekvivalentní s $a_i \leq t \rightarrow b$ pro všechna $i \in I$. A tedy $\bigvee_{i \in I} a_i \leq t \rightarrow b$, a dle adjunkce (2 $\times$) $t \leq \bigvee_{i \in I} a_i \rightarrow b$.

Věta 2.15

$$\begin{aligned}
a \otimes \bigwedge_{i \in I} b_i &\leq \bigwedge_{i \in I} (a \otimes b_i) \\
\bigvee_{i \in I} (a \rightarrow b_i) &\leq a \rightarrow \bigvee_{i \in I} b_i \\
\bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow b) &\leq \bigwedge_{i \in I} a_i \rightarrow b
\end{aligned}$$

Důkaz

Snadné; vyplývá z monotonie $\otimes$, monotonie $\rightarrow$ v druhém argumentu a antitonie $\rightarrow$ v prvním argumentu.

Další vlastnosti RS:

Věta 2.16

$$\begin{aligned}
a \rightarrow b &= ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow b & (2.9) \\
a \otimes (a \rightarrow b) &= b \quad \text{právě když} \quad (\exists c)(a \otimes c = b) & (2.10) \\
a \rightarrow (a \otimes b) &= b \quad \text{právě když} \quad (\exists c)(a \rightarrow c = b) & (2.11) \\
(b \rightarrow a) \rightarrow a &= b \quad \text{právě když} \quad (\exists c)(c \rightarrow a = b) & (2.12) \\
(a \wedge b) \otimes (a \vee b) &\leq a \otimes b & (2.13) \\
a \vee b &\leq ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \wedge ((b \rightarrow a) \rightarrow a) & (2.14) \\
a \wedge b &\geq a \otimes (a \rightarrow b) & (2.15) \\
a \otimes (b \rightarrow c) &\leq b \rightarrow (a \otimes c). & (2.16)
\end{aligned}$$

Větu uvádíme bez důkazu; část vztahů je předmětem cvičení na konci kapitoly. Druhý až čtvrtý řádek říká, že rovnosti, které obecně neplatí, platí právě pro prvky, které lze v příslušném tvaru vyjádřit. Residuovaným svazům, v nichž v předposlední nerovnosti $a \wedge b \geq a \otimes (a \rightarrow b)$ platí rovnost (nazývají se dělitelné), se budeme věnovat v kapitole 3.

Dosud jsme residuum měli dané a zkoumali jsme jeho vlastnosti. Následující věta říká, kdy k multiplikaci $\otimes$ na úplném svazu s komutativním monoidem residuum existuje, a dává vzorec, jak je spočítat.

Věta 2.17

Nechť $L = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1 \rangle$ je struktura splňující

- $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je úplný svaz, tj. částečně uspořádaná množina, ve které existují libovolná infima a suprema (částečné uspořádání L se značí $\leq$);
- $\langle L, \otimes, 1 \rangle$ je komutativní monoid, tj. $\otimes$ je binární operace, která je komutativní, asociativní a $a \otimes 1 = a$ pro všechna $a \in L$.

Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (1) Existuje $\rightarrow$ splňující adjunkci ($s \otimes$).
- (2) Pro libovolná a, b má množina $\{c \mid a \otimes c \leq b\}$ největší prvek.
- (3) $a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i)$ platí v L .
- (4) Definujeme-li $a \rightarrow b = \bigvee \{c \mid a \otimes c \leq b\}$, pak $\rightarrow$ a $\otimes$ splňují adjunkci.

Důkaz

Triviálně (4) implikuje (1). Dle věty 2.11 (1) implikuje (2). Dle věty 2.14 (1) implikuje (3). Stačí nám ukázat, že (2) implikuje (4) a že (3) implikuje (4).

„(2) implikuje (4)“: Uvažujme (2) a definujme $\rightarrow$ tak jako ve (4). Pak $a \rightarrow b$ je největší prvek $\{c \mid a \otimes c \leq b\}$. Takže pokud $a \otimes c \leq b$, pak $c \leq a \rightarrow b$. Pokud $c \leq a \rightarrow b$, pak z monotonie $\otimes$ a uvedené vlastnosti $a \rightarrow b$,

$$a \otimes c \leq a \otimes (a \rightarrow b) \leq b.$$

Takže $\otimes$ a $\rightarrow$ definované v (4) splňují adjunkci.

„(3) implikuje (4)“: Uvažujme (3) a definujme $\rightarrow$ tak jako ve (4). Pokud $a \otimes c \leq b$, pak zjevně $c \leq a \rightarrow b$. Pokud $a \leq c \rightarrow b$, pak

$$\begin{aligned} a \otimes c &\leq a \otimes (a \rightarrow b) \\ &= a \otimes \bigvee \{d \mid a \otimes d \leq b\} \\ &= \bigvee \{a \otimes d \mid a \otimes d \leq b\} \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Takže $\otimes$ a $\rightarrow$ definované v (4) splňují adjunkci.

Podmínka (3) je kritérium existence residua a podmínka (4) udává, jak residuum spočítat. Tímto způsobem budeme v kapitole 3 konstruovat residuované svazy z t-norem.

2.4 Odvozené operace

Z multiplikace a residua nyní odvodíme další operace: biresiduum, které bude hrát roli pravdivostní funkce „fuzzy ekvivalence“, dále negaci a n -té mocniny. Biresiduum a negace jsou přitom definovány stejnými předpisy, jakými se ekvivalence a negace zavádějí z implikace a konjunkce v klasické logice.

Definice 2.2

Biresiduum v L je binární operace $\leftrightarrow$ na L definovaná

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a).$$

Negace v L je unární operace $\neg$ definovaná

$$\neg a = a \rightarrow 0.$$

Pro nezáporné celé číslo n je **n -tá mocnina** prvku $a \in L$ definována

$$a^0 = 1 \quad a \quad a^{n+1} = a^n \otimes a.$$

Příklad 2.18

Biresidua odpovídající Łukasiewiczově, Gödelově a součinnové struktuře na $[0, 1]$:

$$a \leftrightarrow b = 1 - |a - b| \quad (\text{Łukasiewicz})$$

$$a \leftrightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = b \\ \min(a, b) & \text{jinak} \end{cases} \quad (\text{Gödel})$$

$$a \leftrightarrow b = \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)} \quad (\text{součin})$$

(v posledním dodefinujeme $0/0 = 1$).

Příklad 2.19

Negace odpovídající Łukasiewiczově, Gödelově a součinnové struktuře na $[0, 1]$:

$$\neg a = 1 - a \quad (\text{Łukasiewicz})$$

$$\neg a = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = 0 \\ 0 & \text{pro } a > 0 \end{cases} \quad (\text{Gödel a součin})$$

Příklad 2.20

Mocniny odpovídající Łukasiewiczově, Gödelově a součinnové struktuře na $[0, 1]$:

$$a^n = \max(0, 1 - n(1 - a)) \quad (\text{Łukasiewicz})$$

$$a^n = a \quad (\text{Gödel})$$

$$a^n = \text{obvyklá mocnina} \quad (\text{součin})$$

Věta 2.21: Vlastnosti biresidua I

$$0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0 = 0, \quad 0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1$$

$$a \leftrightarrow a = 1 \quad a \leftrightarrow 1 = a \quad a \leftrightarrow 0 = \neg a$$

$$a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a$$

$$a \leftrightarrow b = 1 \quad \text{právě když} \quad a = b$$

Důkaz

Přímo vyplývá z definice biresidua a vlastností residua.

Věta 2.22: Vlastnosti biresidua II

Pro všechna $a, b, c \in L$ platí

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq a \leftrightarrow c.$$

Důkaz

Potřebujeme ukázat, že

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq a \rightarrow c,$$
$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq c \rightarrow a.$$

Díky symetrii stačí dokázat jednu z nich, vezmeme první. Dle adjunkce je to ekvivalentní s $a \otimes (a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq c$, a to vyplývá z

$$\begin{aligned} a \otimes (a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) &\leq a \otimes (a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \\ &\leq b \otimes (b \rightarrow c) \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Nerovnost lze číst takto: je-li a podobné b ve stupni $a \leftrightarrow b$ a b podobné c ve stupni $b \leftrightarrow c$, pak je a podobné c alespoň ve stupni $(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c)$. Použijeme ji při důkazu tranzitivity fuzzy ekvivalencí v kapitole 4.

Věta 2.23: Vlastnosti biresidua III

Pro všechna $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ platí

$$\begin{aligned} (a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) &\leq (a_1 \wedge a_2) \leftrightarrow (b_1 \wedge b_2), \\ (a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) &\leq (a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2), \\ (a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) &\leq (a_1 \otimes a_2) \leftrightarrow (b_1 \otimes b_2), \\ (a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) &\leq (a_1 \rightarrow a_2) \leftrightarrow (b_1 \rightarrow b_2). \end{aligned}$$

Důkaz

Protože $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$, stačí u každé nerovnosti dokázat variantu s residuem $\rightarrow$ na pravé straně; opačný směr je symetrický a obě varianty pak dá vlastnost infima ($x \leq y$ a $x \leq z$ implikuje $x \leq y \wedge z$).

První nerovnost: dle adjunkce stačí ukázat

$$(a_1 \wedge a_2) \otimes ((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)) \leq b_1 \wedge b_2,$$

a pro $i = 1, 2$ je levá strana $\leq a_i \otimes (a_i \rightarrow b_i) \leq b_i$.

Druhá nerovnost: dle adjunkce stačí $(a_1 \vee a_2) \otimes c \leq b_1 \vee b_2$ pro $c = (a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)$. Dle distributivity (Věta 2.14) je

$$\begin{aligned} (a_1 \vee a_2) \otimes c &= (a_1 \otimes c) \vee (a_2 \otimes c) \\ &\leq (a_1 \otimes (a_1 \rightarrow b_1)) \vee (a_2 \otimes (a_2 \rightarrow b_2)) \leq b_1 \vee b_2. \end{aligned}$$

Třetí nerovnost: protože $a_i \leftrightarrow b_i \leq a_i \rightarrow b_i$, stačí

$$(a_1 \rightarrow b_1) \otimes (a_2 \rightarrow b_2) \leq (a_1 \otimes a_2) \rightarrow (b_1 \otimes b_2),$$

tj. dle adjunkce $a_1 \otimes a_2 \otimes (a_1 \rightarrow b_1) \otimes (a_2 \rightarrow b_2) \leq b_1 \otimes b_2$, což plyne dvojím užitím $x \otimes (x \rightarrow y) \leq y$ a monotonie $\otimes$.

Čtvrtá nerovnost: stačí ukázat $(b_1 \rightarrow a_1) \otimes (a_2 \rightarrow b_2) \leq (a_1 \rightarrow a_2) \rightarrow (b_1 \rightarrow b_2)$ (symetrická varianta se dokáže záměnou rolí). Dle adjunkce (užité dvakrát) to znamená

$$b_1 \otimes (b_1 \rightarrow a_1) \otimes (a_1 \rightarrow a_2) \otimes (a_2 \rightarrow b_2) \leq b_2,$$

což je řetěz: $b_1 \otimes (b_1 \rightarrow a_1) \leq a_1$, dále $a_1 \otimes (a_1 \rightarrow a_2) \leq a_2$ a konečně $a_2 \otimes (a_2 \rightarrow b_2) \leq b_2$.

Věta 2.24: Vlastnosti biresidua IV

$$\bigwedge_{i \in I} (a_i \leftrightarrow b_i) \leq (\bigwedge_{i \in I} a_i) \leftrightarrow (\bigwedge_{i \in I} b_i) \quad (2.17)$$

$$\bigwedge_{i \in I} (a_i \leftrightarrow b_i) \leq (\bigvee_{i \in I} a_i) \leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} b_i) \quad (2.18)$$

$$a \leftrightarrow b = (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b). \quad (2.19)$$

Důkaz

První nerovnost: díky symetrii stačí ukázat $\bigwedge_i (a_i \leftrightarrow b_i) \leq (\bigwedge_i a_i) \rightarrow (\bigwedge_i b_i)$, tj. dle adjunkce

$$\left(\bigwedge_i a_i \right) \otimes \bigwedge_i (a_i \leftrightarrow b_i) \leq \bigwedge_j b_j;$$

a pro každé $j \in I$ je levá strana $\leq a_j \otimes (a_j \rightarrow b_j) \leq b_j$.

Druhá nerovnost: podobně stačí $(\bigvee_i a_i) \otimes \bigwedge_i (a_i \leftrightarrow b_i) \leq \bigvee_j b_j$.

Dle distributivity (Věta 2.14) je levá strana rovna

$$\bigvee_i \left(a_i \otimes \bigwedge_j (a_j \leftrightarrow b_j) \right) \leq \bigvee_i (a_i \otimes (a_i \rightarrow b_i)) \leq \bigvee_i b_i.$$

(2.19): Dokážeme $a \leftrightarrow b \leq (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)$. Dle adjunkce je tato nerovnost ekvivalentní s

$$(a \vee b) \otimes (a \leftrightarrow b) \leq a \wedge b. \quad (2.20)$$

Nerovnost (2.20) platí, právě když platí nerovnosti

$$(a \vee b) \otimes (a \leftrightarrow b) \leq a \quad \text{a} \quad (a \vee b) \otimes (a \leftrightarrow b) \leq b.$$

Vzhledem k symetrii stačí dokázat jednu z nich.

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \otimes (a \leftrightarrow b) &\leq (a \vee b) \otimes (a \rightarrow b) \\
 &= (b \otimes (a \rightarrow b)) \vee (a \otimes (a \rightarrow b)) \\
 &\leq b \vee b \\
 &= b
 \end{aligned}$$

Opačná nerovnost plyne z monotonie residua: z $a \leq a \vee b$ a $a \wedge b \leq b$ dostáváme $(a \vee b) \rightarrow (a \wedge b) \leq a \rightarrow b$, symetricky $(a \vee b) \rightarrow (a \wedge b) \leq b \rightarrow a$, a tedy $(a \vee b) \rightarrow (a \wedge b) \leq a \leftrightarrow b$.

Věta 2.25: Vlastnosti negace

Pro $\forall a, a_i \in L, i \in I$:

$$\begin{array}{ll}
 \neg 0 = 1 & \neg 1 = 0 \\
 a \otimes \neg a = 0 & a \leq b \text{ implikuje } \neg b \leq \neg a \\
 a \leq \neg \neg a & \neg(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigwedge_{i \in I} \neg a_i \\
 \neg a = \neg \neg \neg a & \neg(\bigwedge_{i \in I} a_i) \geq \bigvee_{i \in I} \neg a_i.
 \end{array}$$

Důkaz

Toto jsou přímé důsledky definice negace ($\neg a = a \rightarrow 0$) a předchozích výsledků.

Zákon dvojité negace $\neg \neg a = a$ v residuovaných svazech obecně neplatí; platí jen nerovnost $a \leq \neg \neg a$. Například v Gödelově struktuře je pro $0 < a < 1$ $\neg \neg a = 1 \neq a$. Residuovanými svazy, které zákon dvojité negace splňují, se budeme zabývat v následující kapitole.

Cvičení

1. Ověřte rozbořem případů, že Gödelova dvojice operací z Příkladu 2.1 splňuje podmínku adjunkce.
2. Věta 2.16 byla uvedena bez důkazu. Dokažte její první tři vztahy. (Návod: u prvního použijte dvakrát $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$ a antitonií $\rightarrow$ v prvním argumentu.)
3. Dokažte vztah (2.16), tj. $a \otimes (b \rightarrow c) \leq b \rightarrow (a \otimes c)$.

4. Spočítejte v Łukasiewiczově algebře na $[0, 1]$ hodnoty $0.7 \leftrightarrow 0.4$, $\neg 0.3$ a $\neg\neg 0.3$; ověřte na nich vztahy $a \leq \neg\neg a$ a $a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$. V Gödelově algebře najděte a s $a < \neg\neg a$ i a s $a = \neg\neg a$.
5. Čtyřprvková Booleova algebra 2×2 (s operacemi po složkách) je residuovaný svaz. Napište tabulky operací $\otimes$ a $\rightarrow$ a ověřte, že svaz není lineárně uspořádaný.
6. Dokažte indukcí vzorec pro n -tou mocninu v Łukasiewiczově algebře: $a^n = \max(0, 1 - n(1 - a))$.