

Kapitola 3

T-normy a významné třídy residuovaných svazů

V této kapitole zavedeme některé další podmínky pro residuované svazy. Každá z nich má zvláštní význam z logického hlediska. Například rovnost

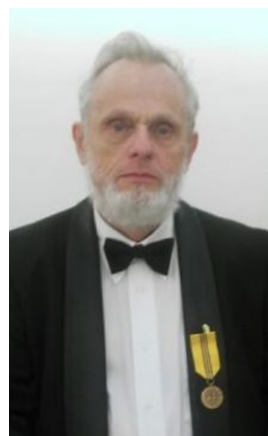
$$a = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (\text{tj. } a = \neg\neg a)$$

vyjadřuje, že struktura L pravdivostních hodnot splňuje známý zákon dvojité negace.

Petr Hájek (1940–2016)

Narodil se v Praze, vystudoval matematiku na Matematicko-fyzikální fakultě UK a své vědecké působení zahájil v semináři Petra Vopěnky – své první práce věnoval teorii množin (s Vopěnkou rozvíjel teorii polomnožin). Většinu života strávil v Akademii věd: nejprve v Matematickém ústavu, poté v Ústavu informatiky, který v letech 1992–2000 vedl jako ředitel.

Jeho dílo má tři hlavní oblasti. S Tomášem Havránkem vytvořil metodu GUHA – mechanizované hledání hypotéz v datech, ranou podobu toho, čemu se dnes říká dolování znalostí z dat. S Pavlem Pudlákem napsal standardní monografii o metamatematice aritmetiky prvního řádu (1993). A od devadesátých let se věnoval fuzzy logice: v knize *Metamathematics of Fuzzy Logic* [HAJEK98] ji vybudoval jako matematickou logiku. Zavedl v ní logiku BL, jejíž algebraickou sémantikou jsou BL-algebry z této kapitoly, a ukázal, že Łukasiewiczova, Gödelova i součinná logika jsou jejími schematickými rozšířeními.



Petr Hájek

Hájek byl také výborný varhaník a po desetiletí hrával při bohoslužbách. V roce 2006 obdržel státní medaili Za zásluhy. Zemřel v Praze na konci roku 2016.

3.1 Dodatečné podmínky

Definice 3.1

Nechť L je residuovaný svaz.

Řekneme, že L splňuje **axiom prelinearity**, pokud platí

$$(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1. \quad (3.1)$$

Residuovaný svaz L se nazývá **dělitelný**, pokud platí

$$a \wedge b = a \otimes (a \rightarrow b). \quad (3.2)$$

Residuovaný svaz L splňuje **zákon dvojité negace**, pokud platí:

$$a = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Residuovaný svaz L splňuje **idempotentnost**, pokud platí:

$$a \otimes a = a. \quad (3.4)$$

Podmínky lze číst takto. Prelinearita je oslabenou formou linearity: nepožaduje, aby každé dva prvky byly srovnatelné, ale jen aby supremum obou implikací mezi nimi bylo rovno 1. Dělitelnost říká, že infimum lze vždy vyjádřit pomocí multiplikace a residua – s nerovností $a \wedge b \geq a \otimes (a \rightarrow b)$, která platí obecně, jsme se setkali už v minulé kapitole. Idempotentnost pak vyjadřuje, že opakování téhož předpokladu nepřináší žádnou novou informaci.

Pokud je L lineární, zjevně splňuje axiom prelinearity, protože vždy platí, že $x \rightarrow y = 1$ nebo $y \rightarrow x = 1$.

3.2 Významné třídy residuovaných svazů

Definice 3.2

Integrální komutativní Girardův monoid je residuovaný svaz, který splňuje zákon dvojité negace.

Heytingova algebra je residuovaný svaz splňující

$$a \otimes b = a \wedge b.$$

BL-algebra je residuovaný svaz, který je dělitelný a splňuje axiom prelinearity.

MV-algebra je residuovaný svaz splňující

$$a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b.$$

Π -algebra (součinná algebra) je BL-algebra splňující:

$$(c \rightarrow 0) \rightarrow 0 \leq ((a \otimes c) \rightarrow (b \otimes c)) \rightarrow (a \rightarrow b),$$

$$a \wedge (a \rightarrow 0) = 0.$$

G-algebra (Gödelova algebra) je BL-algebra, která splňuje

$$a \otimes a = a.$$

Booleova algebra je residuovaný svaz, který je zároveň Heytingovou a MV-algebrou.

Název BL-algebra pochází ze zkratky **Basic Logic**, což je systém fuzzy logiky zavedený Petrem Hájkem v 90. letech jako zobecnění několika známých mnohoznačných logik, včetně Łukasiewiczovy, Gödelovy a součinné logiky. Algebraické struktury zvané BL-algebry slouží jako sémantický základ tohoto systému – podobně jako Booleovy algebry reprezentují klasickou logiku.

Formální zavedení BL-logiky a související algebraické struktury lze nalézt v knize [HAJEK98].

[HAJEK98]

P. Hájek:

Metamathematics of Fuzzy Logic.

Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998).

Pro orientaci v těchto třídách poslouží tři struktury z příkladu 2.1. Ve cvičení na konci kapitoly si ověříte, že Łukasiewiczova struktura je MV-algebra, Gödelova struktura je G-algebra a součinná struktura je Π -algebra. Booleovy algebry pak, jak už víme, odpovídají klasické logice.

Zkratka MV pochází z anglického *many-valued* (mnohohodnotový). MV-algebry zavedl C. C. Chang koncem 50. let jako nástroj pro algebraický důkaz úplnosti Łukasiewiczovy logiky.

3.3 Důsledky dodatečných podmínek

U každé ze čtyř podmínek teď odvodíme ekvivalentní přeformulování a několik důsledků. V důkazech vystačíme s adjunkcí a s vlastnostmi z kapitoly 2.

Věta 3.1: Prelinearita

Následující podmínky jsou ekvivalentní v každém residuovaném svazu:

prelinearita (3.1)

$$a \rightarrow (b_1 \vee b_2) = (a \rightarrow b_1) \vee (a \rightarrow b_2), \quad (3.5)$$

$$(a_1 \wedge a_2) \rightarrow b = (a_1 \rightarrow b) \vee (a_2 \rightarrow b). \quad (3.6)$$

Důkaz

Nechť platí prelinearita. Pak díky ní a binární distributivitě $\otimes$ přes $\vee$ máme

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b_1 \vee b_2) &= ((b_1 \rightarrow b_2) \vee (b_2 \rightarrow b_1)) \otimes (a \rightarrow (b_1 \vee b_2)) \\ &= ((b_1 \rightarrow b_2) \otimes (a \rightarrow (b_1 \vee b_2))) \\ &\quad \vee ((b_2 \rightarrow b_1) \otimes (a \rightarrow (b_1 \vee b_2))) \\ &\leq (a \rightarrow b_2) \vee (a \rightarrow b_1), \end{aligned}$$

kde poslední krok plyne z rovnosti $(b_1 \vee b_2) \rightarrow b_2 = (b_1 \rightarrow b_2) \wedge (b_2 \rightarrow b_2) = b_1 \rightarrow b_2$ (a symetricky pro b_1 spolu s tranzitivitou fuzzy implikace z kapitoly 2. Tedy (3.5) platí.

Podobně

$$\begin{aligned} (a_1 \wedge a_2) \rightarrow b &= ((a_1 \rightarrow a_2) \vee (a_2 \rightarrow a_1)) \otimes ((a_1 \wedge a_2) \rightarrow b) \\ &= ((a_1 \rightarrow a_2) \otimes ((a_1 \wedge a_2) \rightarrow b)) \\ &\quad \vee ((a_2 \rightarrow a_1) \otimes ((a_1 \wedge a_2) \rightarrow b)) \\ &\leq (a_1 \rightarrow b) \vee (a_2 \rightarrow b), \end{aligned}$$

kde v posledním kroku využíváme, že $a_1 \otimes (a_1 \rightarrow a_2) \leq a_1 \wedge a_2$, takže dle adjunkce $(a_1 \rightarrow a_2) \otimes ((a_1 \wedge a_2) \rightarrow b) \leq a_1 \rightarrow b$ (a symetricky pro druhý člen). Tedy i (3.6) platí.

Z (3.5) odvodíme prelinearitu dosazením $a = b_1 \vee b_2$ (a $b_1 = a$, $b_2 = b$):

$$\begin{aligned} 1 &= (a \vee b) \rightarrow (a \vee b) = ((a \vee b) \rightarrow a) \vee ((a \vee b) \rightarrow b) \\ &= (b \rightarrow a) \vee (a \rightarrow b), \end{aligned}$$

neboť $(a \vee b) \rightarrow a = (a \rightarrow a) \wedge (b \rightarrow a) = b \rightarrow a$.

Z (3.6) odvodíme prelinearitu dosazením $b = a_1 \wedge a_2$ (a $a_1 = a$, $a_2 = b$):

$$\begin{aligned} 1 &= (a \wedge b) \rightarrow (a \wedge b) = (a \rightarrow (a \wedge b)) \vee (b \rightarrow (a \wedge b)) \\ &= (a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a), \end{aligned}$$

neboť $a \rightarrow (a \wedge b) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$.

Poznámka

V důkazu jsme u (3.5) a (3.6) ověřovali jen nerovnosti „ $\leq$ “ – opačné nerovnosti platí v každém residuovaném svazu: $\bigvee_i (a \rightarrow b_i) \leq a \rightarrow \bigvee_i b_i$ a $\bigvee_i (a_i \rightarrow b) \leq \bigwedge_i a_i \rightarrow b$ jsou speciální případy Věty 2.15. Jde tedy o rovnosti.

Podle Věty 3.1 je tedy prelinearita ekvivalentní s tím, že implikaci lze „rozdělovat“ přes supremum ve druhém a přes infimum v prvním argumentu. V lineárně uspořádaných svazech je prelinearita splněna, proto v nich tyto rovnosti platí.

Věta 3.2: Dělitelnost

V každém residuovaném svazu jsou následující podmínky ekvivalentní:

dělitelnost (tj. $a \wedge b = a \otimes (a \rightarrow b)$);

$a \leq b$ implikuje existenci c takového, že $a = b \otimes c$; (3.7)

$a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \otimes ((a \wedge b) \rightarrow c)$. (3.8)

Důkaz

Nejprve ukážeme, že (3.7) implikuje dělitelnost. Necht' c je takové, že $a \wedge b = a \otimes c$ (takové c existuje díky (3.7)). Z adjunkce plyne, že $c \leq a \rightarrow (a \wedge b) \leq a \rightarrow b$, tedy

$$a \wedge b = a \otimes c \leq a \otimes (a \rightarrow b).$$

Opačná nerovnost platí vždy, takže máme rovnost. Tím je ověřena dělitelnost.

Dále předpokládejme dělitelnost a ověřme (3.8):

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \wedge c) &= (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \wedge ((a \wedge b) \rightarrow c) \\ &= (a \rightarrow b) \otimes ((a \wedge b) \rightarrow c), \end{aligned}$$

což je právě (3.8).

Nakonec předpokládejme (3.8) a ověřme (3.7). Necht' $a \leq b$. Pak podle (3.8):

$$\begin{aligned} b \otimes ((a \wedge b) \rightarrow a) &= (a \rightarrow b) \otimes ((a \wedge b) \rightarrow a) \\ &= 1 \otimes ((a \wedge b) \rightarrow a) \\ &= (a \wedge b) \rightarrow a, \end{aligned}$$

a tedy:

$$b \otimes ((a \wedge b) \rightarrow a) = a,$$

což je tvar $a = b \otimes c$, kde $c = ((a \wedge b) \rightarrow a)$. Tím je ověřena (3.7).

Podmínka (3.7) vysvětluje název *dělitelnost*: menší prvek a lze vždy „vydělit“ větším prvkem b , tj. napsat jej ve tvaru součinu $b \otimes c$. V důkazu se za c bere residuum.

Věta 3.3: Důsledky axiomu prelinearity

Pokud residuovaný svaz splňuje prelinearitu, pak zároveň platí následující podmínky:

$$(x \otimes x) \wedge (y \otimes y) \leq x \otimes y \leq (x \otimes x) \vee (y \otimes y), \quad (3.9)$$

$$x \otimes (y_1 \wedge y_2) = (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2), \quad (3.10)$$

$$x \wedge (y_1 \vee y_2) = (x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2), \quad (3.11)$$

$$x \vee y = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x). \quad (3.12)$$

Důkaz

(3.9) Ověříme následující:

$$\begin{aligned} & (a \otimes a) \wedge (b \otimes b) \\ &= ((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes ((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)) \\ &\leq (a \otimes (a \rightarrow b)) \vee (b \otimes (b \rightarrow a)) \leq a \otimes b \\ &= (a \otimes b) \otimes ((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)) \\ &= (b \otimes a \otimes (a \rightarrow b)) \vee (a \otimes b \otimes (b \rightarrow a)) \\ &\leq (a \otimes a) \vee (b \otimes b). \end{aligned}$$

(3.10) Dle Věty 2.15 je třeba ověřit nerovnost „ $\geq$ “. Platí:

$$\begin{aligned} & (a \otimes b_1) \wedge (a \otimes b_2) \\ &= ((a \otimes b_1) \otimes ((b_1 \rightarrow b_2) \vee (b_2 \rightarrow b_1))) \vee \\ &\quad \vee ((a \otimes b_2) \otimes ((b_1 \rightarrow b_2) \vee (b_2 \rightarrow b_1))) \\ &\leq (a \otimes b_1 \otimes (b_1 \rightarrow b_2)) \vee (a \otimes b_2 \otimes (b_2 \rightarrow b_1)) \\ &\leq (a \otimes (b_1 \wedge b_2)) \wedge (a \otimes (b_1 \wedge b_2)) \\ &= a \otimes (b_1 \wedge b_2). \end{aligned}$$

(3.11) Protože

$$a \wedge (b_1 \vee b_2) \geq (a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2)$$

platí vždy, stačí dokázat opačnou nerovnost. Máme:

$$\begin{aligned} a \wedge (b_1 \vee b_2) &\leq ((a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2)) \\ &= ((a \wedge (b_1 \vee b_2)) \rightarrow (a \wedge b_1)) \rightarrow \\ &\quad ((a \wedge (b_1 \vee b_2)) \rightarrow (a \wedge b_2)) \\ &\geq ((b_1 \vee b_2) \rightarrow b_1) \vee ((b_1 \vee b_2) \rightarrow b_2) \\ &= (b_2 \rightarrow b_1) \vee (b_1 \rightarrow b_2) = 1. \end{aligned}$$

Tím je podle Věty 2.4 opačná nerovnost ověřena.

(3.12) Na základě (2.14) zbývá ověřit jen část „ $\geq$ “. Máme:

$$\begin{aligned} & ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \wedge ((b \rightarrow a) \rightarrow a) \\ &= (((a \rightarrow b) \rightarrow b) \wedge ((b \rightarrow a) \rightarrow a)) \otimes ((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)) \\ &\leq ((a \rightarrow b) \otimes ((a \rightarrow b) \rightarrow b)) \vee ((b \rightarrow a) \otimes ((b \rightarrow a) \rightarrow a)) \\ &\leq b \vee a = a \vee b, \end{aligned}$$

čímž je nerovnost ověřena.

Všimněme si, že prelinearita neimplikuje rovnost

$$a \otimes \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \otimes b_i).$$

Podle Lemmatu 3.6 (dokážeme jej níže v této kapitole) a Věty 2.15 by taková rovnost totiž implikovala spojitost operace $\otimes$. Avšak residuovaný svaz na $[0, 1]$ indukovaný t-normou *nilpotentní minimum* splňuje podmínku prelinearity, ale $\otimes$ není spojitá (je pouze zleva spojitá).

Věta 3.4: Důsledky dělitelnosti

Nechť residuovaný svaz splňuje podmínku dělitelnosti. Pak platí následující vlastnosti:

$$a \otimes b \leq (a \otimes a) \vee (b \otimes b), \quad (3.13)$$

$$a \otimes (b_1 \wedge b_2) = (a \otimes b_1) \wedge (a \otimes b_2), \quad (3.14)$$

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i), \quad (3.15)$$

$$a \otimes a = a \quad \text{implikuje} \quad (\forall b)(a \wedge b = a \otimes b). \quad (3.16)$$

Důkaz

(3.13) Podle rovnosti (3.7), která je ekvivalentní s dělitelností, existují c_1, c_2 taková, že

$$a = (a \vee b) \otimes c_1, \quad b = (a \vee b) \otimes c_2.$$

Pak zřejmě $a \vee b = (c_1 \vee c_2) \otimes (a \vee b)$. Máme tedy

$$\begin{aligned} a \otimes b &= ((a \vee b) \otimes c_1) \otimes ((a \vee b) \otimes c_2) \\ &= c_1 \otimes c_2 \otimes (a \vee b) \otimes (a \vee b) \\ &\leq ((c_1 \otimes c_1) \vee (c_2 \otimes c_2)) \otimes (a \vee b) \otimes (a \vee b) \\ &= (a \otimes a) \vee (b \otimes b). \end{aligned}$$

(3.14) Nerovnost „ $\leq$ “ platí v každém residuovaném svazu díky monotonii $\otimes$, takže je třeba ověřit pouze nerovnost

$$a \otimes (b_1 \wedge b_2) \geq (a \otimes b_1) \wedge (a \otimes b_2).$$

Máme:

$$\begin{aligned} (a \otimes b_1) \wedge (a \otimes b_2) &= (a \otimes b_1) \otimes ((a \otimes b_1) \rightarrow (a \otimes b_2)) \\ &= a \otimes b_1 \otimes (b_1 \rightarrow (a \rightarrow b_2)) \\ &= a \otimes (b_1 \wedge (a \rightarrow b_2)) \\ &= a \otimes ((a \rightarrow b_2) \wedge b_1) \leq a \otimes ((a \rightarrow b_2) \wedge b_2) \\ &= a \otimes b_2 \otimes (b_2 \rightarrow b_1) = a \otimes (b_1 \wedge b_2). \end{aligned}$$

(3.15) Je třeba ověřit jen směr „ $\leq$ “ (opačný platí v každém svazu). Máme:

$$\begin{aligned} a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i &= \bigvee_{i \in I} \left(\left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \otimes \left(\left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \rightarrow a \right) \right) \\ &= \bigvee_{i \in I} (b_i \otimes (b_i \rightarrow a)) \leq \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \end{aligned}$$

(3.16) Platí:

$$a \wedge b = a \otimes (a \rightarrow b) = a \otimes a \otimes (a \rightarrow b) \leq a \otimes b.$$

Protože opačná nerovnost vždy platí, dostáváme rovnost $a \wedge b = a \otimes b$.

Věta 3.5: Důsledky dvojité negace

Pokud residuovaný svaz splňuje zákon dvojité negace, pak splňuje i následující podmínky:

$$a \rightarrow b = \neg(a \otimes \neg b), \quad (3.17)$$

$$\neg \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) = \bigvee_{i \in I} \neg a_i, \quad (3.18)$$

$$a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a, \quad (3.19)$$

prelinearita je ekvivalentní s

$$a \otimes (b_1 \wedge b_2) = (a \otimes b_1) \wedge (a \otimes b_2). \quad (3.20)$$

Důkaz

(3.17) Okamžitě podle Věty 2.9 platí

$$a \rightarrow b = a \rightarrow ((b \rightarrow 0) \rightarrow 0) = (a \otimes (b \rightarrow 0)) \rightarrow 0.$$

(3.18) Podle Věty 2.14 máme

$$\left(\bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow 0)\right) \rightarrow 0 = \bigwedge_{i \in I} ((a_i \rightarrow 0) \rightarrow 0) = \bigwedge_{i \in I} a_i.$$

Odtud plyne

$$\bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow 0) = \left(\bigwedge_{i \in I} a_i\right) \rightarrow 0,$$

což dokazuje tvrzení.

(3.19) Podle (2.5) stačí ověřit nerovnost „ $\geq$ “. Ta plyne přímo z (2.5) a ze zákona dvojité negace:

$$\neg b \rightarrow \neg a \leq \neg \neg a \rightarrow \neg \neg b = a \rightarrow b.$$

(3.20) Na základě Věty 3.3 je třeba dokázat pouze implikaci „ $\Leftarrow$ “. Použijeme-li

$$a \otimes (b_1 \wedge b_2) = (a \otimes b_1) \wedge (a \otimes b_2),$$

spolu s (3.17) a (3.18), dostáváme

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b_1 \vee b_2) &= (a \otimes ((b_1 \vee b_2) \rightarrow 0)) \rightarrow 0 \\ &= (a \otimes ((b_1 \rightarrow 0) \wedge (b_2 \rightarrow 0))) \rightarrow 0 \\ &= ((a \otimes (b_1 \rightarrow 0)) \wedge (a \otimes (b_2 \rightarrow 0))) \rightarrow 0 \\ &= ((a \otimes (b_1 \rightarrow 0)) \rightarrow 0) \vee ((a \otimes (b_2 \rightarrow 0)) \rightarrow 0) \\ &= (a \rightarrow b_1) \vee (a \rightarrow b_2), \end{aligned}$$

což je právě (3.5), tedy podmínka ekvivalentní s prelinearitou.

Podle rovnosti (3.17) lze za platnosti zákona dvojité negace implikaci vyjádřit pomocí multiplikace a negace, podobně jako v klasické logice, kde $a \rightarrow b$ je jiný zápis pro $\neg(a \wedge \neg b)$. Rovnost (3.19) je obdobou obměny (kontrapozice) implikace.

3.4 Residuované svazy na $[0, 1]$

Ptáme se teď, které operace na $[0, 1]$ mohou být multiplikací residuovaného svazu. Odpověď dá Věta 3.8: jsou to právě zleva spojitě t-normy. Napřed ale potřebujeme dvě pomocná lemmata o vztahu mezi spojitostí reálných funkcí a zachováváním infim a suprem.

Nechť $f(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Řekneme, že f je **neklesající** (resp. **nerostoucí**) v proměnné x , jestliže pro libovolné $a_1, a_2, b \in [0, 1]$ z nerovnosti $a_1 \leq a_2$ plyne

$$f(a_1, b) \leq f(a_2, b) \quad (\text{resp. } f(a_1, b) \geq f(a_2, b)).$$

Analogicky se definuje funkce neklesající (resp. nerostoucí) v proměnné y .

Lemma 3.6

Nechť $f(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je binární operace na $[0, 1]$. Pokud je f neklesající v proměnné x , pak je f spojitá zleva (resp. zprava) v x právě tehdy, když pro každou množinu $\{a_j \mid j \in J\} \subseteq [0, 1]$ a libovolné $b \in [0, 1]$ platí (3.21) (resp. (3.22)):

$$f\left(\bigvee_{j \in J} a_j, b\right) = \bigvee_{j \in J} f(a_j, b), \quad (3.21)$$

$$f\left(\bigwedge_{j \in J} a_j, b\right) = \bigwedge_{j \in J} f(a_j, b). \quad (3.22)$$

Funkce f je tedy spojitá v x právě tehdy, když platí obě rovnosti (3.21) a (3.22).

Analogická tvrzení platí při záměně proměnné x za y ; duální tvrzení platí pro funkce, které jsou v dané proměnné nerostoucí.

Důkaz uvádíme pro případ spojitosti zleva u funkce, která je neklesající. Případ spojitosti zprava je symetrický, stejně jako případ funkce, která je nerostoucí.

Důkaz

Nechť f je neklesající a zároveň spojitá zleva v proměnné x . Položme $a = \bigvee_{j \in J} a_j$ a uvažujme dvě možnosti.

První možnost: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje

$$a_{j(n)} \in \{a_j \mid j \in J\} - \{a\}$$

tak, že $a - a_{j(n)} < \frac{1}{n}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že posloupnost je rostoucí, tj. $a_{j(n)} \leq a_{j(n+1)}$. Pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{j(n)} = a$ a zároveň $a_{j(n)} < a$.

Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} f\left(\bigvee_{j \in J} a_j, b\right) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{j(n)}, b\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{j(n)}, b) \\ &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f(a_{j(n)}, b) = \bigvee_{j \in J} f(a_j, b), \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne ze spojitosti zleva v x , třetí z toho, že posloupnost $f(a_{j(n)}, b)$ je neklesající, a poslední z monotonie

f spolu s tím, že posloupnost $a_{j(n)}$ konverguje k supremu a všech a_j .

Důkaz: pokračování

Druhá možnost: Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $a_k \in \{a_j \mid j \in J\} - \{a\}$ platí $a - a_k > \frac{1}{n}$. Pak nutně $a = a_\ell$ pro nějaký index $\ell \in J$, a tudíž

$$f\left(\bigvee_{j \in J} a_j, b\right) = f(a_\ell, b) \leq \bigvee_{j \in J} f(a_j, b).$$

Opačná nerovnost, tj.

$$f\left(\bigvee_{j \in J} a_j, b\right) \geq \bigvee_{j \in J} f(a_j, b),$$

platí díky tomu, že f je neklesající v x .

Obrácený směr: Předpokládejme, že rovnost (3.21) platí.

Chceme ukázat, že f je spojitá zleva v x .

Stačí ověřit, že pro libovolné $a \in [0, 1]$ a posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ splňující

$$a_n \leq a, \quad a_n \leq a_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b\right) = f(a, b).$$

Z rovnosti (3.21) totiž ihned plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f(a_n, b),$$

což je právě $f(a, b)$.

Lemma 3.7

Nechť $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je funkce taková, že pro každé $a \in [0, 1]$ jsou funkce $x \mapsto f(x, a)$ a $y \mapsto f(a, y)$ spojité. Pak je f spojitá jako funkce dvou proměnných.

Na základě Lemmatu 3.7 je tvrzení, že t-norma je spojitá (jako reálná funkce dvou proměnných), ekvivalentní s tvrzením, že je spojitá v každé své proměnné zvlášť.

Důkaz

Musíme ukázat, že pro každé $a, b \in [0, 1]$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a - \delta, a + \delta)$ a $y \in (b - \delta, b + \delta)$ platí

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

(Poznámka: Pokud např. $a = 1$, pak interval $(a - \delta, a + \delta)$ je třeba chápat jako $(1 - \delta, 1]$ apod. Analogicky pro ostatní hraniční případy.)

Pro libovolné $A, B \in [0, 1]$ jsou funkce $f(A, x)$ a $f(x, B)$ spojité na kompaktním intervalu $[0, 1]$, a proto jsou rovnoměrně spojité.

Existují tedy $\delta_1, \delta_2 > 0$ takové, že pro všechna $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ splňující

$$|x_1 - x_2| < \delta_1, \quad |y_1 - y_2| < \delta_2$$

platí

$$|f(x_1, B) - f(x_2, B)| < \varepsilon/2, \quad |f(A, y_1) - f(A, y_2)| < \varepsilon/2.$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ a vezměme libovolné $x \in (a - \delta, a + \delta)$ a $y \in (b - \delta, b + \delta)$.

Pak máme:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(a, b)| &= |f(x, y) - f(a, y) + f(a, y) - f(a, b)| \\ &\leq |f(x, y) - f(a, y)| + |f(a, y) - f(a, b)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

čímž je důkaz dokončen.

Nyní zavedeme pojem t-normy. Definice shrnuje vlastnosti, které má multiplikace každého residuovaného svazu na $[0, 1]$: komutativitu, asociativitu a neutrální prvek 1 požaduje přímo definice residuovaného svazu, monotonii jsme dokázali v minulé kapitole.

Definice 3.3: t-norma

T-norma je binární operace

$$\otimes : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

kteřá splňuje následující vlastnosti:

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad (\text{asociativita})$$

$$a \otimes b = b \otimes a \quad (\text{komutativita})$$

$$b_1 \leq b_2 \implies a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2 \quad (\text{monotónnost})$$

$$a \otimes 1 = a \quad (\text{neutrální prvek 1})$$

Příklady t-norem jsou uvedeny v příkladu 2.1. Jejich grafy jsou zobrazeny v postranním obrázku v následujícím pořadí (shora): Łukasiewiczova t-norma, Gödelova t-norma a součinnová t-norma.

Název *t-norma* je zkrácením výrazu *triangular norm*. T-normy byly původně zavedeny v rámci pravděpodobnostních metrických prostorů jako zobecnění trojúhelníkové nerovnosti známé z klasických metrických prostorů.

Definice 3.4: spojitost t-normy

T-norma $\otimes$ se nazývá **zleva spojitá**, jestliže pro každou rostoucí posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$ a každé $b \in [0, 1]$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \otimes b) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \otimes b.$$

Analogicky, t-norma $\otimes$ je **zprava spojitá**, jestliže pro každou klesající posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$ a každé $b \in [0, 1]$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \otimes b) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \otimes b.$$

Věta 3.8

Je-li $\otimes$ t-norma spojitá zleva, pak definice

$$a \rightarrow b = \bigvee \{ c \in [0, 1] \mid a \otimes c \leq b \} \quad (3.23)$$

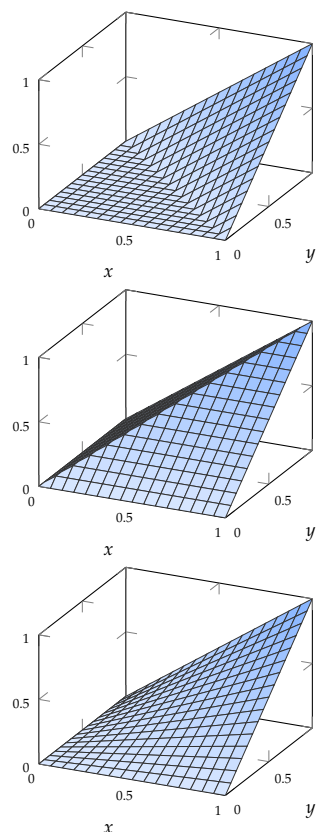
určuje residuum a struktura $\langle [0, 1], \min, \max, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ je úplný residuovaný svaz.

Naopak, je-li struktura $\langle [0, 1], \min, \max, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ residuovaný svaz, pak $\otimes$ je nutně t-norma spojitá zleva.

Důkaz

Tvrzení je přímým důsledkem Lemmatu 3.6 a Věty 2.17.

Věta tak dává vzájemně jednoznačný vztah mezi zleva spojitými t-normami a residuovanými svazy na $[0, 1]$: zleva spojitost t-normy je ekvivalentní s existencí residua. Vzorec (3.23) navíc umožňuje residuum přímo počítat.



Příklad 3.9: spojitost zleva není totéž jako spojitost

Tento příklad ukazuje, že zleva spojitost t-normy neimplikuje její spojitost jako funkce dvou proměnných.

Uvažujme t-normu zvanou **nilpotentní minimum**, označovanou symbolem $\otimes_0$, která je definována následovně:

$$a \otimes_0 b = \begin{cases} \min(a, b), & \text{je-li } a + b > 1, \\ 0, & \text{je-li } a + b \leq 1. \end{cases}$$

Tato binární operace splňuje všechny axiomy t-normy a navíc je zleva spojitá. Nicméně jako reálná funkce dvou proměnných není spojitá v celém $[0, 1]^2$. K nespojitosti dochází na množině bodů, kde $a + b = 1$ (s výjimkou krajních bodů $(0, 1)$ a $(1, 0)$), protože zde nastává skokový přechod mezi nulovou a nenulovou hodnotou:

$$\lim_{a+b \rightarrow 1^-} a \otimes_0 b = 0, \quad \lim_{a+b \rightarrow 1^+} a \otimes_0 b = \min(a, b) > 0.$$

Příklad 3.10: nejmenší t-norma – drastický součin

Příkladem extrémní t-normy je tzv. **drastický součin**. Je definován následovně:

$$a \otimes_d b = \begin{cases} \min(a, b), & \text{je-li } \max(a, b) = 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Drastický součin splňuje všechny axiomy t-normy, ale není spojitý ani zleva, ani zprava. Slouží jako dolní mez v částečném uspořádání množiny všech t-norem.

Snadno lze ověřit, že pro každou t-normu T platí

$$x \otimes_d y \leq T(x, y) \leq \min(x, y) \quad \text{pro všechna } x, y \in [0, 1].$$

Dle Věty 3.8 jsou residuované svazy na intervalu $[0, 1]$ ve vzájemné korespondenci s t-normami spojitými zleva. Všimněme si však, že protože $[0, 1]$ tvoří řetězec, residuované svazy na $[0, 1]$ splňují vlastnost prelinearity (viz poznámku za Definicí 3.1).

Lemma 3.11

T-norma $\otimes$ je spojitá právě tehdy, když struktura

$$\langle [0, 1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$$

tvoří dělitelný residuovaný svaz.

Důkaz

Nechť $\otimes$ je spojitá. Ověříme podmínku (3.7), která je ekvivalentní s dělitelností.

Nechť $a, b \in [0, 1]$ a $a \leq b$. Zavedme funkci $f(z) = b \otimes z$ definovanou na $[0, 1]$ s hodnotami v $[0, b]$. Funkce f je neklesající a spojitá. Jelikož $a \leq b$, z vlastnosti spojitosti plyne existence $c \in [0, 1]$ takového, že $f(c) = a$, tj. $a = b \otimes c$.

Naopak, předpokládejme platnost rovnosti (3.2). Pro libovolné $b \in [0, 1]$ definujme $f(z) = b \otimes z$. Z rovnosti (3.2) plyne, že f je surjektivní z $[0, 1]$ na $[0, b]$, a protože f je zároveň neklesající, je i spojitá.

Věta 3.12

Residuovaný svaz definovaný na $[0, 1]$ t-normou $\otimes$ je BL-algebra právě tehdy, když $\otimes$ je spojitá.

Důkaz

Prelinearita je vždy splněna v residuovaném svazu na $[0, 1]$ (viz poznámku za Definicí 3.1). Tvrzení tedy plyne přímo z Lemmatu 3.11.

3.5 Základní spojité t-normy

Gödelova, Łukasiewiczova a součinnová t-norma patří mezi základní spojité t-normy. Je snadné ověřit, že všechny tři jsou spojité (jejich grafy jsou na straně 47).

Ukážeme, že každou spojitou t-normu lze získat konstrukcí popsanou níže z Gödelovy, Łukasiewiczovy nebo součinnové t-normy.

Nechť $\otimes$ je t-norma. Označme množinu všech jejích idempotentních prvků jako

$$E(\otimes) = \{a \in [0, 1] \mid a \otimes a = a\}.$$

(Pokud je jasné, o kterou t-normu jde, píšeme jednoduše E .) Dále předpokládejme, že $\otimes$ je spojitá.

Lemma 3.13

Je-li $\otimes$ spojitá t-norma, pak množina $E(\otimes)$ je uzavřená vzhledem k přirozené topologii na $[0, 1]$, tj. topologii indukované standardní metrikou $d(a, b) = |a - b|$.

Důkaz

Podle známé věty je množina E uzavřená právě tehdy, když každý limitní bod konvergentní posloupnosti prvků z E náleží také do E .

Nechť tedy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ je konvergentní posloupnost a $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Pak:

$$b \otimes b = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \otimes \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \otimes a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b,$$

tedy b je idempotentní, a tudíž $b \in E$. Tím je dokázáno, že E je uzavřená množina.

Předpoklad spojitosti operace $\otimes$ nelze v Lemmatu 3.13 vynechat: například pro nilpotentní minimum $\otimes_0$, které je sice spojitě zleva, ale nikoli spojitě, platí:

$$E(\otimes_0) = \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right],$$

což není uzavřená množina.

Protože E je uzavřená, její doplněk $[0, 1] - E$ je otevřený.

Lemma 3.14

Každá otevřená množina $O \subseteq [0, 1]$ je sjednocením spočetně mnoha navzájem disjunktních otevřených intervalů.

Důkaz

Každý bod $a \in O$ je obsažen v nějakém otevřeném intervalu O_a , který je maximální mezi otevřenými intervaly O' , pro něž platí $a \in O'$ a $O' \subseteq O$.

Toto je snadné ověřit: zaved'me

$$O_a = \{ (b_1, b_2) \mid a \in (b_1, b_2) \subseteq O \}.$$

Protože O je otevřená a neprázdná, množina O_a není prázdná, a můžeme položit $O_a = \bigcup O_a$.

Pak zřejmě platí $O = \bigcup_{a \in O} O_a$. Navíc, pokud $O_a \neq O_b$, pak $O_a \cap O_b = \emptyset$, tj. jednotlivé intervaly O_a se nepřekrývají.

Nakonec si všimněme, že počet takových intervalů O_a je na nejvyšší spočetný: z každého intervalu O_a lze vybrat jedno racionální číslo (např. střed) a množina racionálních čísel v $[0, 1]$ je spočetná.

Odtud plyne, že množinu $[0, 1] - E$ lze vyjádřit jako sjednocení systému otevřených intervalů, který označíme $\mathcal{I}_o(E)$.

Označme $\mathcal{I}(E)$ odpovídající systém uzavřených intervalů, tj.

$$\mathcal{I}(E) = \{[a, b] \mid (a, b) \in \mathcal{I}_o(E)\}.$$

Pro každý interval $I \in \mathcal{I}(E)$ označme omezení t-normy $\otimes$ na I symbolem $\otimes|_I$.

Věta 3.15: Mostert–Shieldsova reprezentace

Pro každou spojitou t-normu $\otimes$ platí:

- (i) Pro každý interval $I \in \mathcal{I}(E)$ je omezení $\otimes|_I$ izomorfní buď s Łukasiewiczovou t-normou, nebo se součinnovou t-normou;
- (ii) Neexistuje-li žádný interval $I \in \mathcal{I}(E)$ takový, že $a, b \in I$, pak platí $a \otimes b = \min(a, b)$.

Podle věty je tedy každá spojitá t-norma složena z „bloků“ podél diagonály, z nichž každý je (až na izomorfismus) Łukasiewiczova nebo součinnová t-norma, a mimo tyto bloky je t-norma rovna minimu.

Než přistoupíme k důkazu, zavedeme některé pojmy.

T-norma se nazývá **archimédovská**, pokud jsou 0 a 1 její jediné idempotentní prvky, tj.

$$a \otimes a < a \quad \text{pro každé } 0 < a < 1.$$

Archimédovská t-norma se nazývá **striktní**, pokud je 0 jejím jediným nilpotentním prvkem, tj. pokud platí $a \otimes a \otimes \dots \otimes a > 0$ pro všechna $a > 0$.

Naopak, archimédovská t-norma je **nilpotentní**, pokud není striktní.

Důkaz: idea

Restrikce $\otimes|_I$ na libovolný interval $I \in \mathcal{I}(E)$ je izomorfní s archimédovskou t-normou. Každá archimédovská t-norma je z definice buď striktní, nebo nilpotentní; striktní jsou izomorfní se součínovou t-normou a nilpotentní s Łukasiewiczovou t-normou. Konečně, leží-li mezi a a b nějaký idempotent e (tj. neexistuje interval $I \in \mathcal{I}(E)$ obsahující a i b), pak z dělitelnosti plyne $a \otimes b = \min(a, b)$.

Úplný důkaz včetně všech technických lemmat je uveden v dodatku 14.

Cvičení

1. Ověřte, že nilpotentní minimum $\otimes_0$ splňuje všechny axiomy t-normy, a odvoďte explicitní vzorec pro jeho residuum ze vztahu (3.23).
2. Ukažte na vhodné posloupnosti, že drastický součin $\otimes_d$ není spojitý zleva.
3. Sestavte tabulku: pro Łukasiewiczovu, Gödelovu a součínovou strukturu na $[0, 1]$ rozhodněte, zda splňují prelinearitu, dělitelnost, zákon dvojité negace a idempotentnost. Které z nich jsou tedy MV-, G- a Π -algebry?
4. Dokažte, že množina idempotentů $E(\otimes)$ každé t-normy obsahuje 0 a 1, a určete $E(\otimes)$ pro všechny tři základní spojitě t-normy i pro nilpotentní minimum.
5. Definujte na $[0, 1]$ operaci $\otimes$ tak, aby se na $[0, \frac{1}{2}]$ chovala jako přeškálovaná Łukasiewiczova t-norma, na $[\frac{1}{2}, 1]$ jako přeškálovaná součínová t-norma a jinde jako minimum (tzv. ordinální součet). Ověřte, že jde o spojitou t-normu, určete $E(\otimes)$ a popište rozklad z Mostertovy–Shieldsovy věty.
6. Kde v důkazu Lemmatu 3.11 (spojitost $\Leftrightarrow$ dělitelnost) se využívá věta o mezihodnotě?