Kapitola 4

Fuzzy množiny a fuzzy relace

Ústředním pojmem tohoto kurzu je fuzzy množina. Fuzzy množiny slouží k modelování souborů objektů, u nichž je nejlepší odpovědí na otázku, zda objekt do souboru patří, pravdivostní stupeň vybraný z vhodné uspořádané škály. Fuzzy množina A je tedy určena třemi údaji: universem X objektů, kterých se otázka týká, škálou L pravdivostních stupňů a pravidlem, které objektům přiřazuje pravdivostní stupně.

Za škálu pravdivostních stupňů budeme brát residuovaný svaz z předchozích kapitol.

Definice 4.1

Nechť **L** je residuovaný svaz a X je neprázdná množina. **L**-množina v X je zobrazení $A : X \to L$.

Stupeň příslušnosti x do A se v literatuře původně značil $f_A(x)$, později $\mu_A(x)$; dnes se píše prostě $A(x)$.

Fuzzy množina je tedy zobrazení z universa do škály pravdivostních stupňů. Terminologie a značení, které teď zavedeme, jsou ovšem množinové: hodnotu $A(x)$ čteme jako odpověď na otázku, do jaké míry prvek x do A patří.

Terminologie. Místo označení **L**-množina se také často používá pojem fuzzy množina nebo **L**-fuzzy množina. Hodnota $A(x)$ pak představuje stupeň příslušnosti prvku x do množiny A. Pojem fuzzy množiny zavedl L. A. Zadeh [Zadeh65]; obecnější **L**-množiny s hodnotami v úplném svazu uvažoval J. A. Goguen [Goguen67].

[Zadeh65]
L. A. Zadeh:
Fuzzy sets.
Information and Control 8(3), 338–353 (1965).

[Goguen67]
J. A. Goguen:
L-fuzzy sets.
Journal of Mathematical Analysis and Applications 18(1), 145–174 (1967).

Množinu všech **L**-množin v X budeme označovat L^X. **L**-množina A bude též značena zápisem $\{A(x)/x \mid x \in X\}$. Pokud navíc pro

všechny prvky y odlišné od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí $A(y) = 0$, píšeme zkráceně

$$A = \{A(x_1)/x_1, A(x_2)/x_2, \ldots, A(x_n)/x_n\}.$$

L-množina A se nazývá singleton, pokud existuje právě jedno $x \in X$, pro které $A(x) > 0$. Dále říkáme, že **L**-množina A je dvouhodnotová (též bivalentní), pokud pro všechna $x \in X$ platí $A(x) \in \{0, 1\}$. Nakonec, výška **L**-množiny A je definována vztahem

$$\mathrm{hgt}(A) = \bigvee_{x \in X} A(x).$$

Obvykle nerozlišujeme podmnožiny X a $\{0, 1\}$-hodnotové **L**-množiny v X.

Lotfi A. Zadeh

Lotfi A. Zadeh (1921–2017)

Narodil se v Baku v rodině ázerbájdžánského novináře a ruské dětské lékařky; když mu bylo deset, přestěhovala se rodina do Teheránu. Po studiu elektrotechniky na Teheránské univerzitě odešel roku 1944 do Spojených států – magisterský titul získal na MIT, doktorát na Kolumbijské univerzitě a od roku 1959 působil na Kalifornské univerzitě v Berkeley, kde katedru elektrotechniky později i vedl a stál u jejího rozšíření o informatiku (dnešní EECS).

Dříve než se začal věnovat fuzzy logice, byl Zadeh známým odborníkem v teorii systémů: je spoluautorem z-transformace, základního nástroje číslicového zpracování signálů, a jedním z průkopníků stavového popisu systémů. Článek *Fuzzy sets* [Zadeh65] napsal až ve svých čtyřiačtyřiceti letech. Přes počáteční posměch (vzpomeňme okrajové poznámky v kapitole 1) se stal jedním z nejcitovanějších vědeckých textů všech dob – dnes má přes sto tisíc citací. Zadeh na něj navázal lingvistickými proměnnými a přibližným usuzováním (1973–1975, viz kapitola 12) a teorií možnosti (1978).

Z mnoha poct jmenujme alespoň IEEE Medal of Honor (1995) a Franklinovu medaili (2009). Vědecky pracoval do vysokého věku; zemřel v Berkeley v roce 2017, v šestadevadesáti letech.

Příklad 4.1

Nechť $X = \{\text{kružnice}, \text{čtverec}, \text{hexagon}\}$ a **L** je standardní Gödelova algebra na $[0, 1]$. Uvažujme množinu $A : X \to [0, 1]$ danou předpisem

$$A(\text{kružnice}) = 1, \quad A(\text{čtverec}) = 0, \quad A(\text{hexagon}) = 0.5.$$

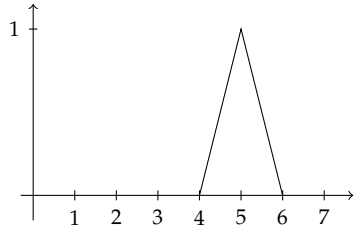
Intuitivně jde o množinu kružnicovitých tvarů.

Příklad 4.2

X – množina všech reálných čísel, **L** je Łukasiewiczova algebra na $[0,1]$. Definujme **L**-množinu $A \in L^X$ takto

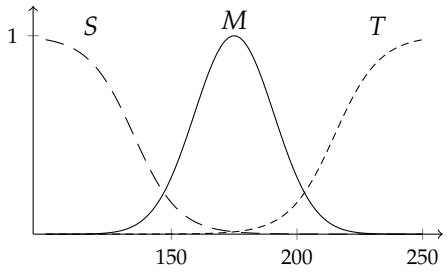
$$A(x) = \begin{cases} x-4 & \text{pro } 4 \leq x \leq 5, \\ 6-x & \text{pro } 5 < x \leq 6, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak A reprezentuje pojem „zhruba 5“:



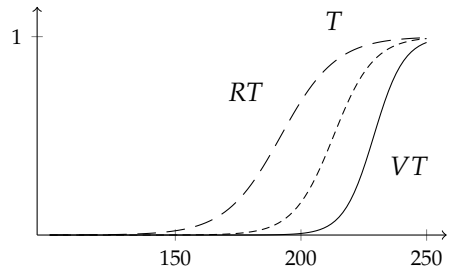
Příklad 4.3

$X = [100, 250]$ je rozsah výšky lidí v cm, $L = [0,1]$.
Následující obrázky ukazují fuzzy množiny S, M a T představující významy slov „malý“, „střední“ a „vysoký“.



Příklad 4.4

$X = [100, 250]$ je rozsah výšky lidí v cm, $L = [0,1]$.
Následující obrázky ukazují fuzzy množiny RT, T a VT představující významy slov „spíše vysoký“, „vysoký“ a „velmi vysoký“.



Nabízejí se dvě přirozené otázky: *kde se berou stupně příslušnosti?* a *do jaké míry záleží na přesném stupni příslušnosti?*

První otázka má ve skutečnosti dvě části. Zaprvé: jaké jsou stupně příslušnosti, jaká je jejich povaha a význam? To je otázka svou povahou filozofická a epistemologická a v tomto kurzu se na ni nepokoušíme odpovědět; předpokládáme, že intuitivní chápání pojmu částečného stupně pravdy je jasné a přijatelné. Zadruhé: jak stupně příslušnosti konkrétně určit? To je v podstatě otázka odborných znalostí (stupně příslušnosti nám sdělí expert), nebo návrhu experimentu (stupně příslušnosti se extrahují z dat) – podíváme se na to později.

Druhá otázka – do jaké míry záleží na přesných hodnotách stupňů příslušnosti – je matematicky dobře uchopitelná a pro tento kurz důležitější. Při odpovědi využijeme stupňovanou inkluzi a rovnost fuzzy množin, které zavedeme ještě v této kapitole. Uvidíme, že fuzzy množiny se v tomto ohledu chovají přirozeně.

4.1 L-relace

Podobně jako v klasické teorii množin, kde relace není nic jiného než množina uspořádaných n-tic, zavedeme fuzzy relace jako fuzzy množiny na kartézském součinu. Hodnota $R(x_1, \ldots, x_n)$ pak vyjadřuje stupeň, v němž jsou prvky $x_1, \ldots, x_n$ v relaci R.

Definice 4.2

Pokud $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, pak **L**-množina na X se nazývá (n-ární) L-relace mezi $X_1, X_2, \ldots$ a X_n.
Pokud $X_1 = \cdots = X_n$, mluvíme o n-ární **L**-relaci na množině X_1.

Příklad 4.5

Nechť $X = \mathbf{R}$ a $\mathbf{L}$ je libovolný RS s $L = [0,1]$.
Definujeme $E : X \times X \to [0,1]$ takto:

$$E(x,y) = \max(0, 1 - |x - y|).$$

Pak E je binární $\mathbf{L}$-relace na X.

Intuitivně: E reprezentuje relaci „být blízko sebe“.

4.2 Operace s L-množinami

Množinu L^X můžeme chápat jako přímý součin $|X|$ kopií množiny L. Proto může být přirozeně vybavena operacemi odvozenými z $\mathbf{L}$.

Libovolnou n-ární operaci $f : L^n \to L$ rozšíříme na n-ární operaci $\overline{f} : (L^X)^n \to L^X$ předpisem

$$\overline{f}(A_1, \ldots, A_n)(x) = f(A_1(x), \ldots, A_n(x)),$$

tedy po složkách (bodově).

Stejným způsobem jsou v L^X definována i libovolná infima a suprema.

Konkrétně operace $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$, 0, 1, a také $\bigvee$ a $\bigwedge$, definované na L, rozšíříme po složkách na operace $\wedge^{L^X}$, $\vee^{L^X}$, $\otimes^{L^X}$, $\to^{L^X}$, 0^{L^X}, 1^{L^X}, $\bigvee^{L^X}$ a $\bigwedge^{L^X}$ na L^X.

V dalším však budeme používat obvyklou množinovou notaci: $\cap$, $\cup$, $\otimes$, $\to$, $\emptyset$, X, $\bigcap$ a $\bigcup$.

Máme tedy:

$$\begin{aligned}
(A \cap B)(x) &= A(x) \wedge B(x) \\
(A \cup B)(x) &= A(x) \vee B(x) \\
(A \otimes B)(x) &= A(x) \otimes B(x) \\
(A \to B)(x) &= A(x) \to B(x) \\
\emptyset(x) &= 0 \\
X(x) &= 1 \\
(\bigcap_{i \in I} A_i)(x) &= \bigwedge_{i \in I} A_i(x) \\
(\bigcup_{i \in I} A_i)(x) &= \bigvee_{i \in I} A_i(x) \\
A \subseteq B \qquad & A(x) \leq B(x) \text{ pro všechna } x \in X
\end{aligned}$$

pro všechna $A, B, A_i \in L^X$ $(i \in I)$ a $x \in X$.

Věta 4.6

Pro libovolný RS $\mathbf{L}$ a množinu $X \neq \emptyset$ je

$$\mathbf{L}^X = \left\langle L^X, \cap, \cup, \otimes, \to, \emptyset, X \right\rangle$$

RS, kde infima a suprema jsou $\bigcap$ a $\bigcup$, a svazové uspořádání je $\subseteq$.

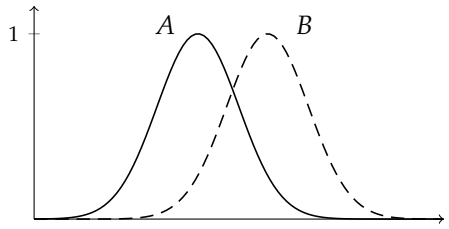
Navíc všechny rovnosti a nerovnosti platné v $\mathbf{L}$ budou po zobecnění platit i v $\mathbf{L}^X$.

Tato věta zobecňuje dobře známý fakt, že množina všech podmnožin dané množiny tvoří úplnou Booleovu algebru – ten dostaneme volbou dvouprvkové Booleovy algebry **2** za $\mathbf{L}$.

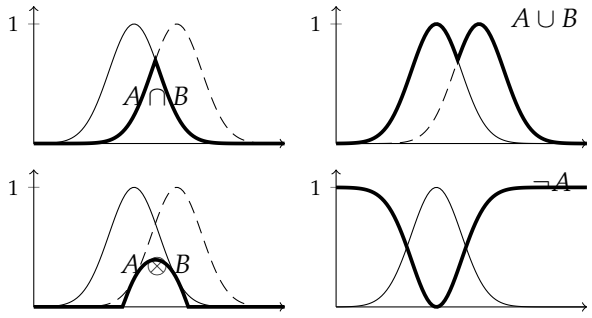
Vše, co jsme v kapitole 2 dokázali o residuovaných svazech, platí tedy i pro fuzzy množiny – každá nerovnost mezi pravdivostními stupni dává odpovídající vztah mezi fuzzy množinami. Dále toho budeme využívat bez zvláštního upozornění.

Příklad 4.7

Nechť $\mathbf{L}$ je standardní Łukasiewiczova algebra na $[0, 1]$:



Následující obrázek ukazuje výsledky operací $\cap, \cup, \otimes, \neg$.



Průnik a sjednocení lze definovat i pro systém množin, který je sám fuzzy, tj. každá množina do něj patří jen v jistém stupni. Rozmyslete si, že pro bivalentní $\mathcal{M}$ dávají následující předpisy obvyklý průnik a sjednocení.

Definice 4.3

Nechť $\mathcal{M}$ je **L**-množina v Y a každý $y \in Y$ je **L**-množina v X. Tj. $\mathcal{M} \in L^{L^X}$.
Definujeme **L**-množiny $\bigcap \mathcal{M}$ a $\bigcup \mathcal{M}$:

$$(\bigcap \mathcal{M})(x) = \bigwedge_{A \in Y} \mathcal{M}(A) \to A(x),$$
$$(\bigcup \mathcal{M})(x) = \bigvee_{A \in Y} \mathcal{M}(A) \otimes A(x).$$

Zjevně $\bigcap \mathcal{M}$ a $\bigcup \mathcal{M}$ jsou zobecněním průniku a sjednocení systému množin.

4.3 Podmnožinovost ve stupních

Relace $\subseteq$ na L^X je bivalentní – libovolné **L**-množiny buď to splňují $A \subseteq B$, nebo ne.

Z pohledu pravdivosti ve stupních je přirozené uvažovat podmnožinovost ve stupních:

Pro klasické množiny:

$$A \subseteq B \quad \text{právě když} \quad \forall x \in X\colon x \in A \text{ implikuje } x \in B.$$

Přímé zobecnění nám dá:

$$S(A,B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \to B(x))$$

Na relaci $S(A,B)$ se můžeme podívat i z jiného úhlu pohledu. Uvažujme **L**-množinu $A \to B$, kterou lze chápat jako soubor pravdivostních hodnot $(A \to B)(x)$. Tyto hodnoty poskytují informaci o „podmnožinovosti" jednotlivých prvků. Tento soubor můžeme interpretovat jako pravdivostní hodnotu, protože $\mathbf{L}^X$ tvoří relační strukturu, jejíž prvky lze chápat právě jako pravdivostní hodnoty. Aby však nedocházelo k neúměrnému růstu dimenze struktury pravdivostních hodnot, agregujeme tyto hodnoty přirozeným způsobem – pomocí infima.

Příklad 4.8

Pro Łukasiewiczovu, Gödelovu a součinovou strukturu na $[0,1]$ máme:
(Łukasiewicz)

$$S(A,B) = \bigwedge\{1 - A(x) + B(x) \mid x \in X, A(x) > B(x)\}$$

(Gödel)

$$S(A,B) = \bigwedge\{B(x) \mid x \in X, A(x) > B(x)\}$$

(součin)

$$S(A,B) = \bigwedge\{B(x)/A(x) \mid x \in X, A(x) > B(x)\}$$

Věta 4.9: Vlastnosti podmnožinovosti ve stupních

$S(A,A) = 1$
$S(A,B) \otimes S(B,C) \leq S(A,C)$
$S(A,B) = 1$ právě když $A \subseteq B$
$S(\emptyset, A) = 1 \qquad S(A,X) = 1$
$S(A, \bigcap_{i\in I} B_i) = \bigwedge_{i\in I} S(A,B_i)$
$S(\bigcup_{i\in I} A_i, B) = \bigwedge_{i\in I} S(A_i,B)$
$S(A, A\cap B) = S(A,B) = S(A\cup B, B)$
$S(A,B) \leq S(\neg B, \neg A)$
pokud $\mathbf{L}$ splňuje zákon dvojí negace, pak
$S(A,B) = S(\neg B, \neg A)$.

Důkaz

Obecně budeme používat fakt, že

$$a_x \leq b_x \quad (a_x, b_x \in L, x \in X) \text{ implikuje } \bigwedge_{x\in X} a_x \leq \bigwedge_{x\in X} b_x.$$

Důkaz k $S(A,A) = 1$:
$S(A,A) = \bigwedge_{x\in X}(A \to A)(x) = \bigwedge_{x\in X} 1 = 1$.
Důkaz k $S(A,B) \otimes S(B,C) \leq S(A,C)$:

$$\begin{aligned} S(A,B) \otimes S(B,C) &= (\bigwedge_{x\in X} A(x) \to B(x)) \otimes (\bigwedge_{y\in X} B(y) \to C(y)) \\ &\leq \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X} (A(x) \to B(x)) \otimes (B(y) \to C(y)) \\ &\leq \bigwedge_{x\in X} (A(x) \to B(x)) \otimes (B(x) \to C(x)) \\ &\leq \bigwedge_{x\in X} A(x) \to C(x) = S(A,C). \end{aligned}$$

Dále $S(A,B) = 1$, právě když $A(x) \to B(x) = 1$ pro všechna $x \in X$, tj. právě když $A(x) \leq B(x)$ pro všechna $x \in X$, tj. právě když $A \subseteq B$.

Rovnosti $S(\emptyset, A) = 1$ a $S(A, X) = 1$ jsou pak přímým důsledkem předchozího.

$$\begin{aligned} S(A, \bigcap_{i\in I} B_i) &= \bigwedge_{x\in X} A(x) \to \bigwedge_{i\in I} B_i(x) \\ &= \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{i\in I} (A(x) \to B_i(x)) \\ &= \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{x\in X} (A(x) \to B_i(x)) = \bigwedge_{i\in I} S(A, B_i) \end{aligned}$$

$$S(A, A \cap B) = S(A, A) \wedge S(A, B) = 1 \wedge S(A, B) = S(A, B)$$

Máme $A \to B \subseteq \neg B \to \neg A$, takže

$$S(A, B) = \bigwedge_{x\in X} (A \to B)(x) \leq \bigwedge_{x\in X} (\neg B \to \neg A)(x) = S(\neg B, \neg A).$$

Splňuje-li **L** zákon dvojí negace, platí dokonce rovnost $a \to b = \neg b \to \neg a$ (kapitola 3), tedy $A \to B = \neg B \to \neg A$ a obě infima se shodují, tj. $S(A, B) = S(\neg B, \neg A)$.

Stupňovaná inkluze se tedy chová jako inkluze klasická: je reflexivní, tranzitivní (ve fuzzy smyslu) a stejným způsobem souvisí s průniky, sjednoceními a doplňky. Třetí vlastnost navíc říká, že klasická inkluze je speciálním případem S: $S(A, B) = 1$, právě když $A \subseteq B$.

Ze stejných důvodů můžeme uvažovat rovnost **L**-množin ve stupních:

Definice 4.4

Pro $A, B \in L^X$ definujme stupeň rovnosti A a B:

$$\approx (A, B) = \bigwedge_{x\in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)).$$

Relaci $\approx$ chápeme jako binární **L**-relaci na množině L^X. Pro přehlednost budeme používat infixovou notaci, tedy zapisovat $(A \approx B)$. Tento výraz intuitivně představuje pravdivostní hodnotu tvrzení:

„A a B obsahují stejné prvky.“

Ostrou rovnost $=$ lze pak definovat pomocí relace $\approx$, neboť platí

$$\approx(A,B) = 1 \text{ právě tehdy, když } A = B.$$

Příklad 4.10

V případě Łukasiewiczovy, Gödelovy a součinové struktury na $[0,1]$ máme

$$A \approx B = \bigwedge_{x\in X} 1 - |A(x) - B(x)| \qquad \text{(Łukasiewicz)}$$

$$A \approx B = \bigwedge_{x\in X, A(x)\neq B(x)} \min(A(x), B(x)) \qquad \text{(Gödel)}$$

$$A \approx B = \bigwedge_{x\in X} \min\left(\frac{A(x)}{B(x)}, \frac{B(x)}{A(x)}\right) \qquad \text{(součin)}$$

kde bereme $0/0 = 1$ a $a/0 = \infty$ pro $a \neq 0$.

Věta 4.11

Nechť $A, B, C, D \in L^X$. Pak platí

$$A \approx A = 1 \tag{4.1}$$
$$A \approx B = B \approx A \tag{4.2}$$
$$(A \approx B) \otimes (B \approx C) \leq A \approx C \tag{4.3}$$
$$A \approx B = 1 \text{ právě když } A = B \tag{4.4}$$
$$A \approx B = S(A,B) \wedge S(B,A) \tag{4.5}$$
$$A \approx \emptyset = S(A,\emptyset) \tag{4.6}$$
$$A \approx X = S(X,A) \tag{4.7}$$
$$A \approx A \cap B = S(A,B) = A \cup B \approx B \tag{4.8}$$
$$(A \approx B) \otimes S(B,C) \otimes (C \approx D) \leq S(A,D) \tag{4.9}$$
$$A \approx B \leq \neg B \approx \neg A \tag{4.10}$$
Pokud **L** splňuje zákon dvojí negace, pak (4.11)
$$A \approx B = \neg B \approx \neg A. \tag{4.12}$$

Důkaz

$A \approx A = 1$ vyplývá z $A(x) \leftrightarrow A(x) = 1$.
$A \approx B = B \approx A$ vyplývá z $A(x) \leftrightarrow B(x) = B(x) \leftrightarrow A(x)$.

$$
\begin{aligned}
&(A \approx B) \otimes (B \approx C) \\
&\quad = \left(\bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)) \right) \otimes \left(\bigwedge_{y \in X} (B(y) \leftrightarrow C(y)) \right) \\
&\quad \leq \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)) \otimes (B(y) \leftrightarrow C(y)) \\
&\quad \leq \bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)) \otimes (B(x) \leftrightarrow C(x)) \\
&\quad \leq \bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow C(x)) = A \approx C
\end{aligned}
$$

$A \approx B = 1$ právě když $A(x) \leftrightarrow B(x) = 1$ pro všechna $x \in X$
právě když $A(x) = B(x)$ pro všechna $x \in X$
právě když $A = B$.

$$
\begin{aligned}
A \approx B &= \bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)) \\
&= \bigwedge_{x \in X} ((A(x) \to B(x)) \wedge (B(x) \to A(x))) \\
&= \left(\bigwedge_{x \in X} (A(x) \to B(x)) \right) \wedge \left(\bigwedge_{x \in X} (B(x) \to A(x)) \right) \\
&= S(A, B) \wedge S(B, A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \approx \emptyset &= S(A, \emptyset) \wedge S(\emptyset, A) = S(A, \emptyset) \wedge 1 = S(A, \emptyset) \\
A \approx X &= S(A, X) \wedge S(X, A) = 1 \wedge S(X, A) = S(X, A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \approx A \cap B &= S(A, A \cap B) \wedge S(A \cap B, A) \\
&= S(A, B) \wedge 1 = S(A, B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \cup B \approx B &= S(A \cup B, B) \wedge S(B, A \cup B) \\
&= S(A, B) \wedge 1 = S(A, B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A \approx B) \otimes S(B, C) \otimes (C \approx D) &\leq S(A, B) \otimes S(B, C) \otimes S(C, D) \\
&\leq S(A, D)
\end{aligned}
$$

$$A \approx B \leq \neg B \approx \neg A$$

Pokud **L** splňuje zákon dvojí negace, pak

$$A \approx B = \neg B \approx \neg A.$$

Toto vyplývá z odpovídajících (ne)rovností pro $S(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

Rovnost $A \approx B = S(A,B) \wedge S(B,A)$ je stupňovaná obdoba faktu, že množiny jsou si rovny, právě když je každá z nich podmnožinou druhé. Tranzitivita relace $\approx$ odpovídá tranzitivitě biresidua (Věta 2.22).

4.4 Reprezentace klasickými množinami

S klasickými množinami umíme zacházet, a tak se vyplatí umět fuzzy množiny převádět na klasické a zpět, beze ztráty informace. Ukážeme dva takové převody: první je založen na tzv. řezech, druhý na podmnožinách součinu $X \times L$.

Reprezentace pomocí řezů

L-množiny v X mohou být reprezentovány systémy podmnožin množiny X.

Definice 4.5

Nechť A je **L**-množina v X, $a \in L$. Pak *a*-řez **L**-množiny A je podmnožina ${}^aA$ množiny X definovaná

$${}^aA = \{x \in X \mid A(x) \geq a\}.$$

Slovy: ${}^aA$ je množina prvků, jejichž stupeň příslušnosti do A je větší nebo roven a.

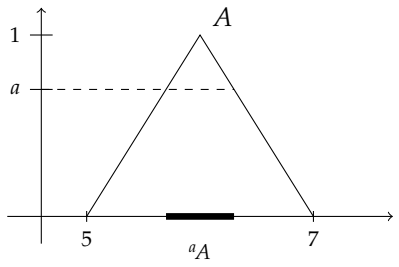
Příklad 4.12

(1) Nechť $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $L = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, a uvažujme **L**-množinu A v X (s libovolnou strukturou **L**):

$$A = \{{}^0/x_1, {}^1/x_2, {}^{\frac{2}{3}}/x_3, {}^{\frac{2}{3}}/x_4\}$$

Pak ${}^0A = X, {}^{\frac{1}{3}}A = {}^{\frac{2}{3}}A = \{x_2, x_3, x_4\}, {}^1A = \{x_2\}$.

(2) Uvažujme trojúhelníkovou množinu danou takto:



Pro $a = 0.7$ máme ${}^{a}A = [5.7, 6.3]$.

Definice 4.6

L-indexovaný systém $S = \{A_a \subseteq X \mid a \in L\}$ se nazývá **L-vnořený**, pokud

(1) $a \leq b$ implikuje $A_b \subseteq A_a$,

(2) pro každé $x \in X$ má množina $\{a \mid x \in A_a\}$ největší prvek.

Dva L-indexované systémy $\{A_a \mid a \in L\}$ a $\{B_a \mid a \in L\}$ jsou si rovny právě tehdy, když $A_a = B_a$ pro všechna $a \in L$. Ve **L**-vnořeném systému $\{A_a \subseteq X \mid a \in L\}$ navíc musí platit $A_0 = X$.

Lemma 4.13

Pro **L**-množinu A v X je $\{{}^{a}A \mid a \in L\}$ **L**-vnořený systém.

Důkaz

Nechť $a \leq b$. Pokud $x \in {}^{b}A$, pak $b \leq A(x)$, a tedy i $a \leq A(x)$. A proto $x \in {}^{a}A$. Největší prvek $\{a \mid x \in {}^{a}A\}$ je zjevně $A(x)$.

Pro **L**-množinu A v X a systém $\mathcal{S} = \{A_a \subseteq X \mid a \in L\}$ podmnožin množiny X definujeme systém $\mathcal{S}_A \subseteq 2^X$ a **L**-množinu $A_{\mathcal{S}} \in L^X$ předpisy

$$\mathcal{S}_A = \{{}^{a}A \mid a \in L\}, \qquad A_{\mathcal{S}}(x) = \bigvee_{x \in A_a} a.$$

Věta 4.14

Nechť $A \in L^X$ a $\mathcal{S}$ je **L**-vnořený systém. Pak

(1) $\mathcal{S}_A$ je **L**-vnořený systém,

(2) $A = A_{\mathcal{S}_A}$,

(3) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{A_\mathcal{S}}$.

Důkaz

Tvrzení (1) víme z předchozího lemmatu.
(2): Nerovnost $A \leq A_{\mathcal{S}_A}$ vyplývá z $x \in {}^{A(x)}A \in \mathcal{S}_A$ dle definice $A_{\mathcal{S}_A}$. Nerovnost $A \geq A_{\mathcal{S}_A}$ platí, právě když $\bigvee_{x \in {}^a A} a \leq A(x)$, tj. právě když pro všechna $x \in {}^a A$ platí $a \leq A(x)$ – a to platí, protože $x \in {}^a A$ znamená $a \leq A(x)$.
(3): Musíme ověřit, že pro každé $a \in L$ platí $A_a = {}^a A_\mathcal{S}$. Pokud $x \in A_a$, pak $A_\mathcal{S}(x) = \bigvee_{x \in A_b} b \geq a$, a tedy $x \in {}^a A_\mathcal{S}$. Naopak pokud $x \in {}^a A_\mathcal{S}$, pak $a \leq \bigvee_{x \in A_b} b$. Dle definice **L**-vnořeného systému má množina $\{b \in L \mid x \in A_b\}$ největší prvek, nazvěme ho b^*; takže $\bigvee_{x \in A_b} b = b^*$, a tedy $a \leq b^*$. A protože $\mathcal{S}$ je **L**-vnořený systém, máme $A_{b^*} \subseteq A_a$, a z $x \in A_{b^*}$ dostaneme $x \in A_a$.

Body (2) a (3) věty 4.14 říkají, že $A \mapsto \mathcal{S}_A$ a $\mathcal{S} \mapsto A_\mathcal{S}$ jsou vzájemně inverzní zobrazení mezi L^X a množinou všech **L**-vnořených systémů podmnožin množiny X. **L**-množiny jsou tedy **L**-vnořenými systémy plně reprezentovatelné.

Reprezentace pomocí podmnožin $X \times L$

Definice 4.7

Podmnožina $A \subseteq X \times L$ se nazývá (**L**-množinově) reprezentativní, pokud

(1) pro každé $x \in X$, $\langle x, a\rangle \in A$ a $b \leq a$ implikují $\langle x, b\rangle \in A$.

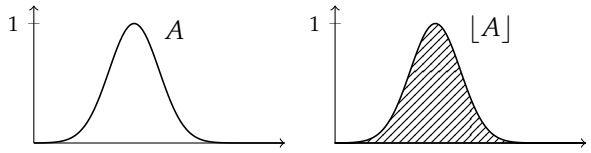
(2) pro každé $x \in X$ má množina $\{a \in L \mid \langle x, a\rangle \in A\}$ největší prvek.

Pro **L**-množinu $A \in L^X$ a podmnožinu $A' \subseteq X \times L$ položíme

$$\lfloor A \rfloor = \{\langle x, a\rangle \in X \times L \mid a \leq A(x)\}$$
$$\lceil A' \rceil = \{\langle x, a\rangle \in X \times L \mid a = \bigvee_{\langle x,b\rangle \in A'} b\}.$$

Příklad 4.15

Tento obrázek znázorňuje operátor $\lfloor \cdot \rfloor$.



Věta 4.16

Nechť $A \in L^X$ je **L**-množina a $A' \subseteq X \times L$ je reprezentativní množina. Pak

(1) $\lfloor A \rfloor \subseteq X \times L$ je reprezentativní množina;

(2) $\lceil A' \rceil$ je **L**-množina;

(3) $A = \lceil \lfloor A \rfloor \rceil$ a $A' = \lfloor \lceil A' \rceil \rfloor$.

Důkaz

(1) Pokud $\langle x, a\rangle \in \lfloor A \rfloor$ a $b \leq a$, pak $b \leq a \leq A(x)$, a tedy $\langle x, b\rangle \in \lfloor A \rfloor$ dle definice. Zjevně je $A(x)$ největší stupeň pravdivosti a takový, že $\langle x, a\rangle \in \lfloor A \rfloor$.

(2) Plyne přímo z definice $\lceil A' \rceil$.

(3) Protože $A(x)$ je největší a takové, že $\langle x, A(x)\rangle \in \lfloor A \rfloor$, dostáváme

$$A(x) = \bigvee_{\langle x,a\rangle \in \lfloor A \rfloor} a = \lceil \lfloor A \rfloor \rceil(x).$$

Pokud $\langle x,a\rangle \in A'$, pak $\lceil A'\rceil(x) \geq a$, a tedy $\langle x,a\rangle \in \lfloor\lceil A'\rceil\rfloor$.

Naopak nechť $\langle x,a\rangle \in \lfloor\lceil A'\rceil\rfloor$. Pak $a \leq \lceil A'\rceil(x)$, tj. $a \leq \bigvee_{\langle x,b\rangle\in A'} b$.

Protože A' je reprezentativní, $\{b \mid \langle x,b\rangle \in A'\}$ má největší prvek, řekněme b^*.

Takže $a \leq b^*$ a $\langle x,b^*\rangle \in A'$.

Protože A' je reprezentativní, dostaneme $\langle x,a\rangle \in A'$.

4.5 Binární L-relace a jejich skládání

Binární **L**-relace, tj. **L**-množiny v $X \times Y$, jsou fuzzy protějškem klasických binárních relací. Zavedeme pro ně dvě základní konstrukce – inverzní relaci a skládání. Obojí budeme potřebovat v kapitole o přibližném usuzování.

Definice 4.8

Inverzní relace binární **L**-relace $R \in L^{X\times Y}$ je **L**-relace $R^{-1} \in L^{Y\times X}$ definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$ předpisem

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y).$$

Lemma 4.17

Pro $R, R_1, R_2, R_i \in L^{X\times Y}$ $(i \in I)$ platí:

$$R = (R^{-1})^{-1}$$
$$(\bigcap_{i\in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1} \qquad (\bigcup_{i\in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i\in I} R_i^{-1}$$
$$(R_1 \otimes R_2)^{-1} = R_1^{-1} \otimes R_2^{-1} \qquad (R_1 \to R_2)^{-1} = R_1^{-1} \to R_2^{-1}$$
$$S(R_1,R_2) = S(R_1^{-1},R_2^{-1}) \qquad (R_1 \approx R_2) = (R_1^{-1} \approx R_2^{-1})$$

Důkaz

Snadné cvičení – vše plyne přímo z definice inverzní relace.

Definice 4.9: skládání L-relací

Pro **L**-relace $R \in L^{X\times Y}$ a $S \in L^{Y\times Z}$ definujeme **L**-relace $R \circ S$, $R{\triangleleft}S$, $R{\triangleright}S$ a $R\Box S$ v $X \times Z$ předpisy

$$(R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y\in Y} (R(x,y) \otimes S(y,z)),$$
$$(R{\triangleleft}S)(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} (R(x,y) \to S(y,z)),$$
$$(R{\triangleright}S)(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} (S(y,z) \to R(x,y)),$$
$$(R\Box S)(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} (R(x,y) \leftrightarrow S(y,z)).$$

Poznámka

Složení $\circ$ je přímočaré zobecnění klasického skládání binárních relací: pro $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$ máme

$\langle x,z\rangle \in R \circ S$ právě když existuje $y \in Y$: $\langle x,y\rangle \in R$ a $\langle y,z\rangle \in S$

a pro $\mathbf{L} = \mathbf{2}$ dává definice $\circ$ přesně toto. Skládání $\circ$ je navíc asociativní:

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Příklad 4.18

Nechť X je množina pacientů, Y množina symptomů nemocí a Z množina nemocí. **L**-relace $R \in L^{X\times Y}$ zachycuje, kdo má jaké symptomy (výsledky lékařské prohlídky), a **L**-relace $S \in L^{Y\times Z}$ zachycuje, které symptomy souvisejí s kterou nemocí (lékařská znalost).
Chceme zjistit, kteří pacienti mají které nemoci – tedy získat **L**-relaci mezi X a Z. Každé ze čtyř složení na to odpovídá jinak:

- $(R \circ S)(x,z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém existuje symptom y takový, že pacient x má symptom y a y je symptom nemoci z.
- $(R{\triangleleft}S)(x,z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém je pravda, že pokud pacient x má symptom y, pak y je symptomem nemoci z.
- $(R{\triangleright}S)(x,z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém je pravda, že pacient x má všechny symptomy nemoci z.

- $(R\Box S)(x,z)$ je pravdivostní stupeň, ve kterém je pravda, že pacient x má právě symptomy nemoci z.

Složení $\circ$ tedy odpovídá obratu „existuje y takové, že ...“, složení $\triangleleft$ a $\triangleright$ obratům tvaru „pro každé y platí ...“. Které skládání zvolit, závisí na tom, jaký vztah mezi x a z chceme vyjádřit.

Věta 4.19: skládání a inverzní relace

Pro $* \in \{\circ, \triangleleft, \triangleright, \Box\}$ platí

$$(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}.$$

Poznámka

Zjevně platí $R\Box S = (R\triangleleft S) \cap (R\triangleright S)$ a dle předchozí věty také $R\triangleright S = (S^{-1}\triangleleft R^{-1})^{-1}$. Za základní skládání **L**-relací tedy můžeme považovat jen dvojici $\circ$ a $\triangleleft$ (nebo dvojici $\circ$ a $\triangleright$).

Věta 4.20: skládání a podmnožinovost

$$\begin{aligned} S(R_1,R_2) \otimes S(S_1,S_2) &\leq S(R_1 \circ S_1, R_2 \circ S_2), \\ S(R_2,R_1) \otimes S(S_1,S_2) &\leq S(R_1\triangleleft S_1, R_2\triangleleft S_2), \\ S(R_1,R_2) \otimes S(S_2,S_1) &\leq S(R_1\triangleright S_1, R_2\triangleright S_2). \end{aligned}$$

Důkaz: první nerovnost

Tato nerovnost je ekvivalentní

$$(R_1 \circ S_1)(x,z) \otimes S(R_1,R_2) \otimes S(S_1,S_2) \leq (R_2 \circ S_2)(x,z).$$

A máme

$$\begin{aligned}
&(R_1 \circ S_1)(x,z) \otimes S(R_1,R_2) \otimes S(S_1,S_2)\\
=&(\bigvee_{y\in Y} R_1(x,y) \otimes S_1(y,z)) \otimes S(R_1,R_2) \otimes S(S_1,S_2)\\
=&\bigvee_{y\in Y} (R_1(x,y) \otimes S_1(y,z) \otimes S(R_1,R_2) \otimes S(S_1,S_2))\\
\leq&\bigvee_{y\in Y} (R_1(x,y) \otimes (R_1(x,y) \to R_2(x,y))\\
&\qquad \otimes S_1(y,z) \otimes (S_1(y,z) \to S_2(y,z)))\\
\leq&\bigvee_{y\in Y} R_2(x,y) \otimes S_2(y,z) = (R_2 \circ S_2)(x,z).
\end{aligned}$$

Zbylé dvě nerovnosti se dokáží podobně (cvičení).

Věta 4.21: skládání a distributivita

$$\begin{aligned}
(\bigcup_i R_i) \circ S &= \bigcup_i (R_i \circ S) & R \circ (\bigcup_i S_i) &= \bigcup_i (R \circ S_i)\\
(\bigcup_i R_i) \triangleleft S &= \bigcap_i (R_i \triangleleft S) & R \triangleleft (\bigcap_i S_i) &= \bigcap_i (R \triangleleft S_i)\\
(\bigcap_i R_i) \triangleright S &= \bigcap_i (R_i \triangleright S) & R \triangleright (\bigcup_i S_i) &= \bigcap_i (R \triangleright S_i)
\end{aligned}$$

Věta 4.22: skládání a distributivita II

$$\begin{aligned}
(\bigcap_i R_i) \circ S &\subseteq \bigcap_i (R_i \circ S) & R \circ (\bigcap_i S_i) &\subseteq \bigcap_i (R \circ S_i)\\
(\bigcap_i R_i) \triangleleft S &\supseteq \bigcup_i (R_i \triangleleft S) & R \triangleleft (\bigcup_i S_i) &\supseteq \bigcup_i (R \triangleleft S_i)\\
(\bigcup_i R_i) \triangleright S &\supseteq \bigcup_i (R_i \triangleright S) & R \triangleright (\bigcap_i S_i) &\supseteq \bigcup_i (R \triangleright S_i)
\end{aligned}$$

Důkazy obou vět o distributivitě jsou snadným cvičením na vlastnosti $\otimes$ a $\to$ vzhledem k infimům a supremům (Věty 2.14 a 2.15).

4.6 L-ekvivalence

Na závěr kapitoly zavedeme **L**-ekvivalence, tj. binární **L**-relace, které modelují podobnost a nerozlišitelnost. Podrobněji se jim budeme věnovat v kapitole 7.

Definice 4.10

Binární **L**-relace E na X se nazývá L-ekvivalence, pokud pro libovolná $x, y, z \in X$ platí

$$\begin{aligned} E(x,x) &= 1 && \text{(reflexivita)} \\ E(x,y) &= E(y,x) && \text{(symetrie)} \\ E(x,y) \otimes E(y,z) &\leq E(x,z) && \text{(tranzitivita)} \end{aligned}$$

L-ekvivalence se nazývá L-rovnost, pokud

$$E(x,y) = 1 \quad \text{implikuje} \quad x = y.$$

Pro **L**-ekvivalenci se také používají jiné termíny; nejčastější jsou podobnost, fuzzy podobnost a nerozlišitelnost.

Poznámka

Vlastnosti (reflexivita), (symetrie) a (tranzitivita) z předchozí definice jsou přímá zobecnění týchž vlastností z bivalentního případu. Uvažujme totiž $\mathbf{L} = \mathbf{2}$. Pro reflexivitu a symetrii je to zjevné. U tranzitivity: jsou-li $\langle x, y\rangle$ a $\langle y, z\rangle$ v E, tj. $E(x,y) = 1$ a $E(y,z) = 1$, pak $1 = 1 \otimes 1 = E(x,y) \otimes E(y,z) \leq E(x,z)$, tedy $E(x,z) = 1$, tj. $\langle x, z\rangle$ je v E; relace E je tedy tranzitivní v bivalentním smyslu. Naopak nechť je E tranzitivní v bivalentním smyslu. Buď je $E(x,y) = 0$ nebo $E(y,z) = 0$, a pak (tranzitivita) platí triviálně; nebo je $E(x,y) = 1$ a $E(y,z) = 1$, tedy $\langle x, y\rangle$ a $\langle y, z\rangle$ jsou v E, z tranzitivity je $\langle x, z\rangle$ v E, tj. $E(x,z) = 1$, a (tranzitivita) platí také.

Jednu **L**-ekvivalenci už známe: relace $\approx$ na množině L^X je reflexivní, symetrická i tranzitivní, jak jsme dokázali výše, a protože $A \approx B = 1$ implikuje $A = B$, je to **L**-rovnost. Podobně je biresiduum $\leftrightarrow$ **L**-rovností na množině L.

Příklad 4.23

Nechť $X = \{x, y, z, u\}$, **L** je standardní Łukasiewiczova algebra na $[0, 1]$ a binární **L**-relace E je dána tabulkou

E	x	y	z	u
x	1	0.9	0.8	1
y	0.9	1	0.7	0.9
z	0.8	0.7	1	0.8
u	1	0.9	0.8	1

Snadno ověříme, že relace E je **L**-ekvivalence, avšak nikoli **L**-rovnost. Pokud bychom však uvažovali její restrikci na množinu $\{x, y, z\}$, získali bychom **L**-rovnost. Naproti tomu kdyby **L** byla Gödelova algebra, E by již nebyla **L**-ekvivalence, protože

$$0.8 = E(y, x) \otimes E(x, z) = \min(0.9, 0.8) \not\leq E(y, z) = 0.7,$$

a tedy E není tranzitivní.

Cvičení

1. Nechť $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{{}^{0.8}/x_1,\ {}^{0.5}/x_2,\ {}^{0}/x_3\}$ a $B = \{{}^{0.6}/x_1,\ {}^{0.9}/x_2,\ {}^{0.3}/x_3\}$. Spočtěte $A \cap B$, $A \cup B$, $A \otimes B$, $A \to B$ a $\neg A$ v Łukasiewiczově i Gödelově struktuře.

2. Pro množiny z předchozího cvičení spočtěte $S(A, B)$, $S(B, A)$ a $A \approx B$ v obou strukturách.

3. Pro trojúhelníkovou **L**-množinu A z Příkladu 4.12 určete řezy ${}^{0.3}A$, ${}^{0.5}A$ a ${}^{1}A$ a ověřte na nich rekonstrukci $A(x) = \bigvee_{x \in {}^{a}A} a$.

4. Dokažte lemma o vlastnostech inverzní relace (v textu ponecháno jako cvičení).

5. Dokažte asociativitu skládání: $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$. (Návod: Věta 2.14.)

6. Dokažte zbylé dvě nerovnosti věty o skládání a podmnožinovosti (pro $\triangleleft$ a $\triangleright$).

7. Ověřte přepočtem všech potřebných trojic, že relace E z posledního příkladu je tranzitivní vůči Łukasiewiczově t-normě.