

Kapitola 5

Vlastnosti L-relací a uzávěry

V kapitole 4 jsme zavedli binární L-relace a jejich skládání a u L-ekvivalencí jsme se poprvé setkali s reflexivitou, symetrií a tranzitivitou. Nyní se na tyto vlastnosti podíváme soustavně a ve stupních: místo otázky, *zda* je L-relace tranzitivní, se budeme ptát, *do jaké míry* tranzitivní je. Druhým tématem kapitoly jsou uzávěry: jak danou L-relaci co nejúsporněji doplnit, aby předepsanou vlastnost získala.

5.1 Reflexivita, symetrie a tranzitivita ve stupních

Definice L-ekvivalence z kapitoly 4 požaduje, aby *pro všechna* x platilo $E(x, x) = 1$, aby *pro všechna* x, y platilo $E(x, y) = E(y, x)$, a tak dále. Obraty „pro všechna“ a „jestliže–pak“ ale umíme číst stupňovaně: univerzální kvantifikaci vyjadřuje infimum a podmínku residuum – přesně tak jsme v kapitole 4 zavedli stupeň inkluze $S(A, B)$. Stejným způsobem teď přiřadíme L-relacím stupně jejich vlastností. Nejprve si však připravíme jednu pomocnou relaci.

Definice 5.1

Identická relace na množině X je binární L-relace id_X definovaná předpisem

$$\text{id}_X(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = y, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 5.2: vlastnosti ve stupních

Pro binární L-relaci R na X definujeme

$$\text{Ref}(R) = \bigwedge_{x \in X} R(x, x),$$

$$\text{Sym}(R) = \bigwedge_{x, y \in X} (R(x, y) \rightarrow R(y, x)),$$

$$\text{Tra}(R) = \bigwedge_{x, y, z \in X} ((R(x, y) \otimes R(y, z)) \rightarrow R(x, z)).$$

Hodnoty $\text{Ref}(R)$, $\text{Sym}(R)$ a $\text{Tra}(R)$ nazýváme **stupeň reflexivity**, **stupeň symetrie** a **stupeň tranzitivity** L-relace R . Řekneme, že R je **reflexivní** (**symetrická**, **tranzitivní**), pokud je příslušný stupeň roven 1; obecněji je R **a -reflexivní** pro $a \in L$, pokud $a \leq \text{Ref}(R)$, a podobně pro ostatní vlastnosti.

Slovy: $\text{Sym}(R)$ je stupeň, v němž je pravda, že „kdykoli x souvisí s y , souvisí také y s x “, a $\text{Tra}(R)$ je stupeň, v němž „ze souvislosti x s y a y se z plyne souvislost x se z “. Následující lemma potvrzuje, že plný stupeň dává přesně podmínky známé z kapitoly 4.

Lemma 5.1

Pro binární L-relaci R na X platí:

1. $\text{Ref}(R) = 1$, právě když $R(x, x) = 1$ pro všechna $x \in X$;
2. $\text{Sym}(R) = 1$, právě když $R(x, y) = R(y, x)$ pro všechna $x, y \in X$;
3. $\text{Tra}(R) = 1$, právě když $R(x, y) \otimes R(y, z) \leq R(x, z)$ pro všechna $x, y, z \in X$.

Speciálně L-ekvivalence jsou přesně L-relace, jejichž stupně reflexivity, symetrie i tranzitivity jsou rovny 1.

Důkaz

Infimum je rovno 1, právě když jsou 1 všechny jeho členy, a $a \rightarrow b = 1$, právě když $a \leq b$ (kapitola 2). Odtud ihned plynou body (1) a (3). V bodě (2) dostáváme, že $\text{Sym}(R) = 1$, právě když $R(x, y) \leq R(y, x)$ pro všechna x, y ; protože nerovnost platí i pro dvojici y, x , je to totéž jako rovnost $R(x, y) = R(y, x)$.

Stupně vlastností lze vyjádřit pomocí pojmů, které už máme: stupňované inkluze, stupňované rovnosti, inverzní relace a skládání.

Věta 5.2: ekvivalentní vyjádření vlastností

Pro binární L -relaci R na X platí

$$\begin{aligned}\text{Ref}(R) &= S(\text{id}_X, R), \\ \text{Sym}(R) &= S(R, R^{-1}) = (R \approx R^{-1}), \\ \text{Tra}(R) &= S(R \circ R, R).\end{aligned}$$

Důkaz

U reflexivity rozepíšme $S(\text{id}_X, R) = \bigwedge_{x,y \in X} (\text{id}_X(x,y) \rightarrow R(x,y))$. Pro $x \neq y$ je člen roven $0 \rightarrow R(x,y) = 1$, a v infimu se tedy neprojeví; pro $x = y$ je roven $1 \rightarrow R(x,x) = R(x,x)$. Zbývá tedy $\bigwedge_x R(x,x) = \text{Ref}(R)$.

U symetrie je $S(R, R^{-1}) = \bigwedge_{x,y} (R(x,y) \rightarrow R^{-1}(x,y)) = \bigwedge_{x,y} (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) = \text{Sym}(R)$. Přeznačením $x \leftrightarrow y$ vidíme, že týž stupeň má i $S(R^{-1}, R)$, takže $\text{Sym}(R) = S(R, R^{-1}) \wedge S(R^{-1}, R) = (R \approx R^{-1})$.

U tranzitivity využijeme vztah $(\bigvee_i a_i) \rightarrow b = \bigwedge_i (a_i \rightarrow b)$ (Věty 2.14 a 2.15):

$$\begin{aligned}S(R \circ R, R) &= \bigwedge_{x,z} \left(\left(\bigvee_y R(x,y) \otimes R(y,z) \right) \rightarrow R(x,z) \right) \\ &= \bigwedge_{x,z} \bigwedge_y ((R(x,y) \otimes R(y,z)) \rightarrow R(x,z)) = \text{Tra}(R).\end{aligned}$$

Poznámka

Klasická tranzitivita se dá zapsat jako $R \circ R \subseteq R$ a věta říká, že stupeň tranzitivity je přesně stupeň inkluze $R \circ R \vee R$. Symetrie je zase stupňovaná rovnost R a R^{-1} . Stupně vlastností tedy definují L -množiny na množině všech binárních L -relací na X .

Příklad 5.3

Nechť $X = \{x, y, z\}$, L je standardní Łukasiewiczova algebra a R je dána tabulkou

R	x	y	z
x	1	0.8	0.3
y	0.6	1	0.5
z	0.3	0.7	1

Zjevně $\text{Ref}(R) = 1$. Stupeň symetrie je infimum hodnot $R(x,y) \rightarrow R(y,x)$ přes všechny dvojice; nejmenší vyjde pro

dvojice $\langle x, y \rangle$ a $\langle z, y \rangle$:

$$\text{Sym}(R) = (0.8 \rightarrow 0.6) \wedge (0.7 \rightarrow 0.5) = 0.8.$$

Výpočtem $R \circ R$ zjistíme, že $R \circ R \subseteq R$, takže $\text{Tra}(R) = S(R \circ R, R) = 1$: relace R je tranzitivní. Nad Gödelovou algebrou by však tatáž tabulka dala jiné hodnoty – například

$$\begin{aligned} (R \circ R)(z, x) &\geq R(z, y) \otimes R(y, x) \\ &= \min(0.7, 0.6) = 0.6 \not\leq 0.3 = R(z, x), \end{aligned}$$

takže $\text{Tra}(R) = 0.6 \rightarrow 0.3 = 0.3$ (žádná další trojice nedá menší hodnotu). Stupně vlastností – stejně jako v příkladu s L-ekvivalencí v kapitole 4 – závisejí na volbě struktury pravdivostních hodnot.

Poznámka: další vlastnosti

Stejným způsobem lze stupňovaně zavést i další vlastnosti známé z klasických relací, například **ireflexivitu** a **asymetrii**:

$$\text{Irr}(R) = \bigwedge_{x \in X} \neg R(x, x),$$

$$\text{Asy}(R) = \bigwedge_{x, y \in X} (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)).$$

Jinak je tomu u *antisymetrie*: její stupňovaná verze vyžaduje srovnávat prvky ve stupních, tedy L-ekvivalenci na X . Vráťme se k ní proto až u fuzzy uspořádání v kapitole 6.

5.2 Uzávěry vzhledem k vlastnostem

Relace získané z dat předepsané vlastnosti obvykle nemají. Změříme-li podobnost dvojic výrobků, nemusí vyjít ani symetrická (porovnávání podle katalogu nemusí být souměrné), natož tranzitivní. Ptáme se, jak danou L-relaci *co nejméně* zvětšit, aby požadovanou vlastnost získala.

Definice 5.3: uzávěr

Nechť V je vlastnost L-relací (například reflexivita). **Uzávěr** L-relace R na X vzhledem k V je nejmenší L-relace R' na X taková, že $R \subseteq R'$ a R' má vlastnost V (pokud taková nejmenší L-relace existuje).

Uzávěr obecně existovat nemusí. Existuje ale vždy, když je vlastnost zachována libovolnými průniky a když ji má plná relace (konstantně rovná 1): pak je uzávěrem průnik všech nadrelací s danou vlastností a tento průnik je díky plné relaci průnikem neprázdného systému. Naše tři vlastnosti obojí splňují; zachovávání průniky říká přesně následující věta.

Věta 5.4: vlastnosti a průniky

Pro binární L-relace R_i ($i \in I$) na X platí

$$\begin{aligned}\text{Ref}\left(\bigcap_i R_i\right) &= \bigwedge_i \text{Ref}(R_i), \\ \text{Sym}\left(\bigcap_i R_i\right) &\geq \bigwedge_i \text{Sym}(R_i), \\ \text{Tra}\left(\bigcap_i R_i\right) &\geq \bigwedge_i \text{Tra}(R_i).\end{aligned}$$

Důkaz

První rovnost je jen záměna pořadí infim: $\text{Ref}(\bigcap_i R_i) = \bigwedge_x \bigwedge_i R_i(x, x) = \bigwedge_i \bigwedge_x R_i(x, x)$.

U tranzitivity označme $R = \bigcap_i R_i$ a $t = \bigwedge_i \text{Tra}(R_i)$. Podle adjunkce stačí pro libovolná x, y, z ukázat $t \otimes R(x, y) \otimes R(y, z) \leq R(x, z)$, tedy že levá strana je pod $R_j(x, z)$ pro každé $j \in I$. To ale platí: $t \leq \text{Tra}(R_j)$, $R(x, y) \leq R_j(x, y)$ a $R(y, z) \leq R_j(y, z)$, takže

$$t \otimes R(x, y) \otimes R(y, z) \leq \text{Tra}(R_j) \otimes R_j(x, y) \otimes R_j(y, z) \leq R_j(x, z),$$

kde poslední nerovnost je adjunkovaný tvar definice $\text{Tra}(R_j)$. Nerovnost pro symetrii se dokáže stejným postupem (cvičení).

Poznámka

U symetrie a tranzitivity může být nerovnost ostrá. Vezměme na $X = \{x, y\}$ relace $R_1 = \{\langle x, y \rangle\}$ a $R_2 = \{\langle y, x \rangle\}$ (ostré, tj. s hodnotami 0 a 1). Obě jsou zcela nesymetrické, $\text{Sym}(R_1) = \text{Sym}(R_2) = 0$, ale jejich průnikem je prázdná relace, která je symetrická ve stupni 1. Pro existenci uzávěrů je ale podstatný právě dokázaný směr: průnik relací s danou vlastností má opět tuto vlastnost.

Systém L-relací uzavřený na libovolné průniky, který obsahuje plnou relaci, je *uzávěrový systém* – a předpis $R \mapsto \text{Cl}_V(R)$ je *uzávěrový operátor* (studenti předmětu KMI/FKA oba pojmy znají z ostřejšího případu). Uzávěrovým operátorům a systémům ve fuzzy podobě se budeme soustavně věnovat v kapitole 6.

Reflexivní a symetrický uzávěr umíme napsat rovnou.

Věta 5.5: reflexivní a symetrický uzávěr

Uzávěrem L -relace R na X vzhledem k reflexivitě je $R \cup \text{id}_X$ a vzhledem k symetrii $R \cup R^{-1}$.

Důkaz

Relace $R \cup \text{id}_X$ obsahuje R , je reflexivní a každá reflexivní nadrelace R'' relace R splňuje $\text{id}_X \subseteq R''$, tedy $R \cup \text{id}_X \subseteq R''$. Relace $R \cup R^{-1}$ obsahuje R a je symetrická, protože podle lematu o inverzních relacích z kapitoly 4 je $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R$. Je-li R'' symetrická nadrelace relace R , pak z $R \subseteq R''$ plyne $R^{-1} \subseteq (R'')^{-1} = R''$, takže $R \cup R^{-1} \subseteq R''$.

Poznámka: stupňované uzávěry

Vlastnosti máme zavedené ve stupních, a tak se můžeme ptát i po nejmenší nadrelaci, která je a -reflexivní (a -symetrická, a -tranzitivní) pro předepsané $a \in L$. Odpovědi vypadají takto: a -reflexivní uzávěr je $R \cup (a \otimes \text{id}_X)$, a -symetrický je $R \cup (a \otimes R^{-1})$ a a -tranzitivní je $R \cup \bigcup_{n \geq 1} (a^n \otimes R^{\circ(n+1)})$, kde $R^{\circ n}$ jsou mocniny zavedené v následující sekci. Pro $a = 1$ dostaneme uzávěry z této kapitoly. Důkazy přenecháváme jako náročnější cvičení.

5.3 Tranzitivní uzávěr a mocniny relací

Zbývá uzávěr tranzitivní. Jednoduchý explicitní vzorec pro něj neexistuje, lze jej však vyjádřit jako sjednocení mocnin relace. Pozorování, že naměřená podobnost tranzitivní obvykle není, je staré přes sto let.



Henri Poincaré

Henri Poincaré (1854–1912)

Francouzský matematik, fyzik a filozof vědy, rodák z Nancy, bývá označován za posledního univerzalistu: publikoval práce snad ve všech oblastech soudobé matematiky. Založil algebraickou topologii (*analysis situs*), při studiu problému tří těles narazil na citlivou závislost na počátečních podmínkách – zárodek pozdější teorie chaosu – a jeho práce o elektrodynamice patří k bezprostředním předchůdcům speciální teorie relativity.

Pro nás je podstatný jeho postřeh z knihy *La Science et l'Hypothèse* (Věda a hypotéza, 1902): ve fyzikálním kontinuu lze naměřit

$A = B$ a $B = C$, a přesto $A < C$ – smyslová nerozlišitelnost není tranzitivní. Tento jev modelují **L**-ekvivalence; tranzitivní uzávěr je nejmenší tranzitivní **L**-relace, která taková naměřená data obsahuje.

Poincarého jméno nese i slavná domněnka o trojrozměrné sféře z roku 1904, dokázaná Grigorijem Perelmanem až o sto let později. Jeho bratranec Raymond Poincaré byl prezidentem Francie. Henri Poincaré byl členem akademie věd a roku 1908 byl zvolen i do Francouzské akademie, tedy „mezi nesmrtelné“, jako spisovatel.

Definice 5.4: mocniny L-relace

Mocniny binární **L**-relace R na X definujeme induktivně:
 $R^{\circ 1} = R$ a $R^{\circ(n+1)} = R^{\circ n} \circ R$.

Protože je skládání $\circ$ asociativní (kapitola 4), platí $R^{\circ m} \circ R^{\circ n} = R^{\circ(m+n)}$. Rozepsáním definice dostaneme názorné vyjádření

$$R^{\circ n}(x_0, x_n) = \bigvee_{x_1, \dots, x_{n-1} \in X} R(x_0, x_1) \otimes R(x_1, x_2) \otimes \dots \otimes R(x_{n-1}, x_n) :$$

mocnina $R^{\circ n}$ měří, jak dobře se lze z x_0 dostat do x_n řetězcem délky n ; stupeň řetězce je $\otimes$ -součin stupňů jeho článků.

Věta 5.6: tranzitivní uzávěr

Uzávěrem **L**-relace R na X vzhledem k tranzitivitě je **L**-relace

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^{\circ n},$$

zvaná **tranzitivní uzávěr** relace R .

Důkaz

Zjevně $R = R^{\circ 1} \subseteq R^+$. Tranzitivitu R^+ ověříme ve tvaru $R^+ \circ R^+ \subseteq R^+$ (Lemma 5.1 a Věta 5.2): podle věty o distributivitě skládání přes sjednocení z kapitoly 4 je

$$R^+ \circ R^+ = \bigcup_{m, n \geq 1} R^{\circ m} \circ R^{\circ n} = \bigcup_{m, n \geq 1} R^{\circ(m+n)} \subseteq R^+.$$

Zbývá minimalita. Nechť T je tranzitivní a $R \subseteq T$. Indukcí ukážeme $R^{\circ n} \subseteq T$ pro všechna n ; pro $n = 1$ je to předpoklad. Skládání je monotonní (z věty o skládání a podmnožinovitosti v kapitole 4, nebo přímo z definice), takže z $R^{\circ n} \subseteq T$ plyne

$$R^{\circ(n+1)} = R^{\circ n} \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T,$$

Hodnoty tranzitivního uzávěru závisí na volbě $\otimes$: u Gödela minima je stupeň řetězce roven nejmenšímu z jeho článků, u Łukasiewiczova $\otimes$ s délkou řetězce rychle klesá. Srovnejte Příklad 5.8 se cvičením 4.

kde poslední inkluze je tranzitivita T . Tedy $R^+ = \bigcup_n R^{\circ n} \subseteq T$.

Na konečné množině stačí v tomto sjednocení konečně mnoho členů: dost dlouhý řetězec musí některým prvkem projít dvakrát a vzniklý cyklus lze vypustit, aniž stupeň řetězce klesne.

Věta 5.7: tranzitivní uzávěr na konečné množině

Má-li X právě $n \geq 1$ prvků, pak

$$R^+ = R \cup R^{\circ 2} \cup \dots \cup R^{\circ n}.$$

Důkaz

Stačí ukázat $R^{\circ k} \subseteq R \cup \dots \cup R^{\circ n}$ pro každé $k > n$. Uvažme řetězec $x_0, x_1, \dots, x_k$ délky $k > n$. Mezi jeho $k+1 > n$ členy se některý prvek opakuje: $x_i = x_j$ pro $i < j$. Vypuštěním úseku $x_{i+1}, \dots, x_j$ vznikne řetězec z x_0 do x_k délky $k - (j - i) < k$, jehož stupeň je $\otimes$ -součinem *podmnožiny* článků původního řetězce – a ten je alespoň takový jako součin všech článků, neboť $a \otimes b \leq a \wedge b$ (kapitola 2). Opakováním této úvahy klesneme na délku nejvýše n . Ke každému řetězci délky k tedy existuje řetězec délky nejvýše n se stejnými krajními body a alespoň stejným stupněm, a proto $R^{\circ k}(x_0, x_k) \leq (R \cup \dots \cup R^{\circ n})(x_0, x_k)$.

Příklad 5.8

Nechť $X = \{x, y, z\}$, L je standardní Łukasiewiczova algebra a R popisuje „cyklus“ $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$:

R	x	y	z	R^+	x	y	z
x	0	0.8	0	x	0	0.8	0.5
y	0	0	0.7	y	0.2	0	0.7
z	0.5	0	0	z	0.5	0.3	0

Druhá mocnina má jediné nenulové hodnoty $R^{\circ 2}(x, z) = 0.8 \otimes 0.7 = 0.5$, $R^{\circ 2}(y, x) = 0.7 \otimes 0.5 = 0.2$ a $R^{\circ 2}(z, y) = 0.5 \otimes 0.8 = 0.3$; třetí mocnina je už prázdná relace, protože stupeň celého cyklu je $0.8 \otimes 0.7 \otimes 0.5 = 0$. Podle Věty 5.7 je tedy $R^+ = R \cup R^{\circ 2}$, což dává pravou tabulku. Sami ověřte, že R^+ je tranzitivní, zatímco původní R jen ve stupni $\text{Tra}(R) = 0.5 \rightarrow 0 = 0.5$. Všimněme si také, že R^+ není ani reflexivní, ani symetrická: uzávěr přidává jen hodnoty, které daná vlastnost vyžaduje.

Kombinací všech tří uzávěrů dostaneme nejmenší L-ekvivalenci obsahující danou L-relaci.

Věta 5.9: nejmenší L-ekvivalence

Pro každou binární L-relaci R na X je

$$E_R = (R \cup R^{-1} \cup \text{id}_X)^+$$

nejmenší L-ekvivalence obsahující R .

Důkaz

Označme $Q = R \cup R^{-1} \cup \text{id}_X$. Relace $E_R = Q^+$ je tranzitivní podle Věty 5.6 a reflexivní, protože $\text{id}_X \subseteq Q \subseteq Q^+$. Symetrie: Q je symetrická ($Q^{-1} = R^{-1} \cup R \cup \text{id}_X = Q$) a mocniny symetrické relace jsou symetrické – podle věty o skládání a inverzní relaci z kapitoly 4 je $(Q^{on})^{-1} = (Q^{-1})^{on} = Q^{on}$ – a protože inverze komutuje se sjednoceními, je symetrická i Q^+ . Relace E_R je tedy L-ekvivalence obsahující R .

Je-li E libovolná L-ekvivalence s $R \subseteq E$, pak z reflexivity $\text{id}_X \subseteq E$ a ze symetrie $R^{-1} \subseteq E^{-1} = E$, dohromady $Q \subseteq E$. Z minimality tranzitivního uzávěru (Věta 5.6) dostáváme $E_R = Q^+ \subseteq E$.

Poznámka: na pořadí uzávěrů záleží

Ve větě se uzávěry skládají v pořadí symetrický a reflexivní nejprve, tranzitivní nakonec. Toto pořadí nelze zaměnit: tranzitivní uzávěr symetrie i reflexivitu zachovává (to jsme právě dokázali), ale symetrický uzávěr tranzitivitu zachovávat nemusí, protože symetrizace může v relaci vytvořit cyklus. Příklad je ve cvičení 5.

Cvičení

1. Nechť L je standardní Łukasiewiczova algebra a Q na $X = \{x, y, z\}$ je dána tabulkou

Q	x	y	z
x	1	0.6	0.2
y	0.9	1	0.5
z	0.2	0.4	1

Spočítejte $\text{Ref}(Q)$, $\text{Sym}(Q)$ a $\text{Tra}(Q)$. Jak se výsledky změni nad Gödelovou algebrou?

2. Dokažte zbývající část Věty 5.4: $\text{Sym}(\bigcap_i R_i) \geq \bigwedge_i \text{Sym}(R_i)$.
3. Ukažte, že pro ireflexivitu a asymetrii platí obdoba Věty 5.4 (s nerovností $\geq$). Existují uzávěry vzhledem k těmto vlastnostem?
4. Spočítejte tranzitivní uzávěr relace R z Příkladu 5.8 nad Gödelovou algebrou a výsledek porovnejte s Łukasiewiczovým: co se stane s diagonálou?
5. Necht' $R = \{\langle x, y \rangle\}$ je ostrá relace na $X = \{x, y\}$. Ukažte, že R je tranzitivní, ale její symetrický uzávěr $R \cup R^{-1}$ tranzitivní není. Kde by selhal důkaz Věty 5.9, kdybychom tranzitivní uzávěr provedli před symetrickým?
6. Dokažte: je-li R reflexivní, pak $R \subseteq R^{\circ 2} \subseteq R^{\circ 3} \subseteq \dots$ a na množině o n prvcích je $R^+ = R^{\circ n}$.
7. Dokažte vzorce pro stupňované uzávěry z poznámky na konci druhé sekce (alespoň pro a -reflexivitu a a -symetrii).