

Kapitola 6

Fuzzy uspořádání a uzávěrové operátory

Podobnost už modelovat umíme – L-ekvivalencemi. V této kapitole se budeme věnovat druhému velkému typu relací: uspořádáním, která modelují vztahy typu „být menší“, „být horší“ či „být obsažen“. Jedno takové stupňované uspořádání už dlouho známe: je jím inkluze S na L-množinách. Na ni pak navážeme pojmem uzávěrového operátoru – konstrukce z minulé kapitoly (reflexivní a symetrický uzávěr) budou jeho zvláštními případy a hlavní věta kapitoly ukáže, čemu uzávěrové operátory odpovídají: uzávěrovým systémům.

6.1 Fuzzy uspořádání

Klasické uspořádání je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická relace. První dvě vlastnosti umíme stupňovaně z minulé kapitoly; zbývá antisymetrie: z $R(x, y)$ a $R(y, x)$ plyne $x = y$. Doslovné převzetí by ale bylo ve fuzzy světě příliš tvrdé – požadovalo by, aby si žádné dva různé prvky nebyly „oboustranně podobné“. Přirozenější je antisymetrii vztáhnout k L-ekvivalenci: jsou-li x a y v relaci oběma směry, nemusejí být totožné, ale musejí být *podobné*.

Definice 6.1: L-uspořádání

Nechť $\approx$ je L-ekvivalence na množině X . Binární L-relace R na X se nazývá **L-uspořádání** (též **fuzzy uspořádání**) vzhle-

dem k $\approx$, pokud pro všechna $x, y, z \in X$ platí

$$\begin{aligned} (x \approx y) &\leq R(x, y) && (\approx\text{-reflexivita}), \\ R(x, y) \wedge R(y, x) &\leq (x \approx y) && (\text{antisymetrie}), \\ R(x, y) \otimes R(y, z) &\leq R(x, z) && (\text{tranzitivita}). \end{aligned}$$

Trojici $\langle X, \approx, R \rangle$ pak říkáme **fuzzy uspořádaná množina**.

Protože $x \approx x = 1$, plyne z $\approx$ -reflexivity obyčejná reflexivita $R(x, x) = 1$. Podmínky spolu souvisejí ještě těsněji:

Lemma 6.1

Je-li R L -uspořádání vzhledem k $\approx$, pak $R \cap R^{-1} = \approx$.

Důkaz

Nerovnost $R(x, y) \wedge R(y, x) \leq (x \approx y)$ je přímo antisymetrie. Naopak z $\approx$ -reflexivity a symetrie $\approx$ máme $(x \approx y) \leq R(x, y)$ i $(x \approx y) = (y \approx x) \leq R(y, x)$, tedy $(x \approx y) \leq R(x, y) \wedge R(y, x)$.

Slovy: uspořádání v sobě podobnost „nese“ – L -ekvivalenci $\approx$ z něj zpětně vyčteme jako obousměrnou část $R \cap R^{-1}$. To je věrná obdoba klasického faktu, že z uspořádání $\leq$ dostaneme rovnost jako $\leq \cap \geq$.

Příklad 6.2

(1) Stupňovaná inkluze je fuzzy uspořádání: $\langle L^X, \approx, S \rangle$ je fuzzy uspořádaná množina. Vskutku, $(A \approx B) \leq S(A, B)$ a $S(A, B) \wedge S(B, A) = (A \approx B)$ platí přímo podle definice $\approx$ z kapitoly 4 a tranzitivita $S(A, B) \otimes S(B, C) \leq S(A, C)$ je jednou z vlastností podmnožinovitosti ve stupních dokázaných tamtéž.

(2) Také struktura pravdivostních hodnot sama je fuzzy uspořádaná: $\langle L, \leftrightarrow, \rightarrow \rangle$ je fuzzy uspořádaná množina. Ověření tří podmínek z vlastností residua a biresidua (kapitola 2) přenecháváme jako cvičení 1. Ostatně příklad (1) je „mocninou“ příkladu (2): hodnoty $(A \rightarrow B)(x)$ agregujeme infimem do $S(A, B)$.

Vztah ke klasickým uspořádáním je nejtěsnější, když $\approx$ nedovolí plnou podobnost různých prvků:

Věta 6.3

Nechť R je L -uspořádání vzhledem k L -rovnosti $\approx$ na X . Pak 1-řez ${}^1R = \{\langle x, y \rangle \mid R(x, y) = 1\}$ je (klasické) uspořádání na X .

Důkaz

Reflexivita: $R(x, x) = 1$. Tranzitivita: z $R(x, y) = R(y, z) = 1$ plyne $1 = R(x, y) \otimes R(y, z) \leq R(x, z)$. Antisymetrie: z $R(x, y) = R(y, x) = 1$ plyne $(x \approx y) = 1$, a protože $\approx$ je L -rovnost, je $x = y$.

Pro obecné a -řezy analogie neplatí – tranzitivita se může po cestě ztratit (cvičení 6).

6.2 L-uzávěrové operátory

V minulé kapitole jsme uzávěry počítali „po jedné relaci“. Ted’ se na tutéž situaci podíváme jako na celek: uzávěr je *zobrazení* $C: L^X \rightarrow L^X$, které L -množině přiřadí její uzavřenou verzi. Jaké vlastnosti od takového zobrazení čekáme? Výsledek má vstup obsahovat, zvětšení vstupu nemá zmenšit výstup a opakované uzavírání už nemá nic přidat. Prostřední podmínku – monotonii – přitom můžeme díky předchozí sekci vyslovit stupňovaně: vzhledem k fuzzy uspořádání S .

Definice 6.2: L-uzávěrový operátor

Zobrazení $C: L^X \rightarrow L^X$ se nazývá **L-uzávěrový operátor** na X , pokud pro všechny $A, B \in L^X$ platí

$$\begin{aligned} A &\subseteq C(A) && \text{(extenzivita),} \\ S(A, B) &\leq S(C(A), C(B)) && \text{(monotonie ve stupních),} \\ C(C(A)) &= C(A) && \text{(idempotence).} \end{aligned}$$

L -množiny s $C(A) = A$ nazýváme **pevné body** operátoru C ; jejich množinu značíme $\text{fix}(C)$.

S uzavěrovými operátory se potkáme v celé matematice: topologický uzávěr (axiomatizoval jej Kazimierz Kuratowski, 1922), lineární a konvexní obal, generovaná podgrupa – a v logice operátor důsledků, jímž Alfred Tarski (1930) zachytil samotný pojem dedukce.

Monotonie ve stupních říká: nakolik je A obsaženo v B , natolik je $C(A)$ obsaženo v $C(B)$. Volbou $S(A, B) = 1$ z ní plyne obyčejná monotonie ($A \subseteq B$ implikuje $C(A) \subseteq C(B)$); je však opravdu silnější, jak uvidíme níže.

Příklad 6.4

Binární L -relace na X jsou L -množiny na universu $X \times X$, takže reflexivní a symetrický uzávěr z kapitoly 5 jsou zobrazování $L^{X \times X} \rightarrow L^{X \times X}$ – a jsou to L -uzávěrové operátory. U reflexivního uzávěru $C(R) = R \cup \text{id}_X$ je extenzivita i idempotence zřejmá a monotonie ve stupních plyne z nerovnosti $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \geq S(A_1, B_1) \wedge S(A_2, B_2)$ (cvičení 3) volbou $A_2 = B_2 = \text{id}_X$. U symetrického uzávěru $C(R) = R \cup R^{-1}$ se navíc použije $S(R_1^{-1}, R_2^{-1}) = S(R_1, R_2)$ z lemmatu o inverzních relacích (kapitola 4).

Poznámka: tranzitivní uzávěr stupňovanou monotonií nemá

Tranzitivní uzávěr $R \mapsto R^+$ je extenzivní, idempotentní a monotonní vzhledem k $\subseteq$ – ale monotonií *ve stupních* nesplňuje. Skládání totiž stupně inkluze násobí ($S(R_1, R_2) \otimes S(S_1, S_2) \leq S(R_1 \circ S_1, R_2 \circ S_2)$, kapitola 4), takže pro mocniny máme jen $S(R_1^{\circ n}, R_2^{\circ n}) \geq S(R_1, R_2)^n$ a s rostoucím n se odhad zhoršuje. Že jde o skutečné selhání, a nikoli jen o slabost odhadu, ukazuje numerický protipříklad ve cvičení 4. Tranzitivní uzávěr je tedy uzávěrovým operátorem jen v ostrém, nikoli ve stupňovaném smyslu.

6.3 L -uzávěrové systémy a pevné body

V kapitole 5 vznikaly uzávěry vždy stejným receptem: uzavřené objekty byly zachovány průniky, a uzávěr byl proto průnikem všech uzavřených nadobjektů. Teď systémy „uzavřených“ L -množin popíšeme obecně. Kromě průniků budeme potřebovat ještě jednu operaci: **posuny**. Pro $a \in L$ a $B \in L^X$ označme $a \rightarrow B$ L -množinu danou předpisem $(a \rightarrow B)(x) = a \rightarrow B(x)$ (a podobně $a \otimes B$).

Definice 6.3: L -uzávěrový systém

Systém $\mathcal{S} \subseteq L^X$ se nazývá **L -uzávěrový systém** na X , pokud

- je uzavřen na průniky: pro libovolný podsystém $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{S}$ je $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{S}$ (speciálně pro $I = \emptyset$ obsahuje $\mathcal{S}$ plnou L -množinu X),
- je uzavřen na posuny: pro každé $A \in \mathcal{S}$ a $a \in L$ je $a \rightarrow A \in \mathcal{S}$.

Uzávěrovému systému přiřadíme operátor „stupňovaného průniku všech nadmnožin“: položíme

$$C_S(A) = \bigcap_{B \in S} (S(A, B) \rightarrow B).$$

Slovy: x patří do $C_S(A)$ ve stupni, v němž je pravda, že *pro každou* L-množinu B systému platí: *je-li* A obsažena v B , *pak* x patří do B . V ostrém případě je to přesně průnik všech nadmnožin z S ; stupňovaná verze místo výběru nadmnožin váží všechny členy systému stupněm inkluze. Následující věta – hlavní výsledek kapitoly – říká, že tím dostáváme přesně všechny L-uzávěrové operátory.

Věta 6.5: uzavěrové operátory a uzavěrové systémy

1. Pro každý L-uzávěrový operátor C na X je $\text{fix}(C)$ L-uzávěrový systém na X .
2. Pro každý L-uzávěrový systém S na X je C_S L-uzávěrový operátor na X a $\text{fix}(C_S) = S$.
3. Pro každý L-uzávěrový operátor C na X je $C_{\text{fix}(C)} = C$.

Přiřazení $C \mapsto \text{fix}(C)$ a $S \mapsto C_S$ jsou tedy vzájemně inverzní bijekce mezi L-uzávěrovými operátory a L-uzávěrovými systémy na X .

Důkaz

(1) *Průniky*: necht' $A_i \in \text{fix}(C)$ a $A = \bigcap_i A_i$. Z monotonie (stačí obyčejná) je $C(A) \subseteq C(A_i) = A_i$ pro každé i , tedy $C(A) \subseteq A$; s extenzivitou $C(A) = A$. *Posuny*: necht' $B \in \text{fix}(C)$ a $a \in L$. Z adjunkce je $a \otimes (a \rightarrow B(x)) \leq B(x)$, tedy $a \leq S(a \rightarrow B, B)$. Monotonie ve stupních dává

$$a \leq S(a \rightarrow B, B) \leq S(C(a \rightarrow B), C(B)) = S(C(a \rightarrow B), B),$$

což adjunkcí znamená $a \otimes C(a \rightarrow B)(x) \leq B(x)$, tedy $C(a \rightarrow B) \subseteq a \rightarrow B$. Opačná inkluze je extenzivita.

(2) *Extenzivita*: přímo z definice stupně inkluze je $A(x) \otimes S(A, B) \leq B(x)$, tedy $A \subseteq S(A, B) \rightarrow B$ pro každé B , a proto $A \subseteq C_S(A)$. Zaznamenejme si dále, že z $C_S(A) \subseteq S(A, B) \rightarrow B$ plyne adjunkcí

$$S(A, B) \leq S(C_S(A), B) \quad \text{pro každé } B \in S. \quad (*)$$

Monotonie ve stupních: pro $B \in S$ dává tranzitivita stupňované inkluze a (*)

$$C_S(A_1)(x) \otimes S(A_1, A_2) \otimes S(A_2, B) \leq C_S(A_1)(x) \otimes S(A_1, B) \leq B(x).$$

Dvojím užitím adjunkce odtud $S(A_1, A_2) \leq C_S(A_1)(x) \rightarrow (S(A_2, B) \rightarrow B(x))$; infimum přes všechna $B \in \mathcal{S}$ a $x \in X$ dá $S(A_1, A_2) \leq S(C_S(A_1), C_S(A_2))$. *Idempotence*: pro $B \in \mathcal{S}$ je podle (*)

$$C_S(C_S(A))(x) \otimes S(A, B) \leq C_S(C_S(A))(x) \otimes S(C_S(A), B) \leq B(x),$$

kde druhá nerovnost je (*) pro vstup $C_S(A)$. Tedy $C_S(C_S(A)) \subseteq S(A, B) \rightarrow B$ pro každé B , a proto $C_S(C_S(A)) \subseteq C_S(A)$; opačná inkluze je extenzivita. *Pevné body*: pro $B \in \mathcal{S}$ je $C_S(B) \subseteq S(B, B) \rightarrow B = 1 \rightarrow B = B$, tedy $B \in \text{fix}(C_S)$. Naopak každý pevný bod $A = C_S(A) = \bigcap_B (S(A, B) \rightarrow B)$ je průnikem posunů L -množin z $\mathcal{S}$, a leží tedy v $\mathcal{S}$.

(3) Z idempotence je $C(A) \in \text{fix}(C)$ a z extenzivity $S(A, C(A)) = 1$, takže $C_{\text{fix}(C)}(A) \subseteq S(A, C(A)) \rightarrow C(A) = C(A)$. Naopak pro každé $B \in \text{fix}(C)$ je z monotonie ve stupních $S(A, B) \leq S(C(A), C(B)) = S(C(A), B)$, adjunkcí $C(A) \subseteq S(A, B) \rightarrow B$; průnik přes B dá $C(A) \subseteq C_{\text{fix}(C)}(A)$.

Věta je stupňovanou verzí klasické korespondence uzávěrových operátorů a uzávěrových systémů (KMI/FKA). Nová je role posunů: bez nich by korespondence nefungovala – systém uzavřený jen na průniky (jako tranzitivní relace) uzávěrový operátor se stupňovanou monotonií nedává.

S L -uzávěrovými operátory se ještě potkáme: extenzionální obal v kapitole 7 a složeniny šipkových operátorů Galoisových konexí v kapitole 10 jsou jejich nejdůležitější přirozené příklady.

Příklad 6.6

Reflexivní relace na X tvoří L -uzávěrový systém v $L^{X \times X}$: průniky reflexivních relací jsou reflexivní (kapitola 5) a posuny také, neboť $(a \rightarrow R)(x, x) = a \rightarrow 1 = 1$. Příslušný operátor C_S je přesně reflexivní uzávěr $R \mapsto R \cup \text{id}_X$. Podobně symetrické relace $((a \rightarrow R)^{-1} = a \rightarrow R^{-1})$. Naproti tomu tranzitivní relace jsou sice uzavřeny na průniky, ale *nikoli* na posuny (cvičení 5) – což odpovídá tomu, že tranzitivní uzávěr stupňovanou monotonií nemá.

Cvičení

1. Dokažte, že $\langle L, \leftrightarrow, \rightarrow \rangle$ je fuzzy uspořádaná množina (užijte vlastnosti residua a biresidua z kapitoly 2).
2. Nechť $X = \{x, y, z\}$, $\approx$ je ostrá rovnost a R má jedničky na diagonále, $R(x, y) = 0.7$, $R(y, z) = 0.6$, $R(x, z) = 0.4$ a jinde nuly. Ověřte, že nad standardní Łukasiewiczovou algebrou je R L -uspořádání vzhledem k $\approx$, zatímco nad Gödelovou algebrou nikoli.
3. Dokažte nerovnost $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \geq S(A_1, B_1) \wedge S(A_2, B_2)$ a doplňte podrobnosti Příkladu 6.4.

4. Necht' $X = \{x, y\}$, L je standardní Łukasiewiczova algebra a R_1, R_2 mají nuly na diagonále a $R_1(x, y) = R_1(y, x) = 0.9$, $R_2(x, y) = R_2(y, x) = 0.6$. Spočítejte $S(R_1, R_2)$, tranzitivní uzávěry R_1^+, R_2^+ a $S(R_1^+, R_2^+)$; ukažte tak, že tranzitivní uzávěření není monotonní ve stupních.
5. Necht' $X = \{x, y, z\}$, L je standardní Łukasiewiczova algebra a $T(x, y) = T(y, z) = 0.3$, jinde 0. Ověřte, že T je tranzitivní, ale posun $0.5 \rightarrow T$ nikoli. Tranzitivní relace tedy netvoří L -uzávěrový systém.
6. Najděte L -uspořádání R vzhledem k ostré rovnosti a $a \in L$ tak, aby a -řez ${}^aR$ nebyl tranzitivní. (Nápověda: stačí tři prvky, standardní Łukasiewiczova algebra a $R(x, y) = R(y, z) = 0.7$, $R(x, z) = 0.4$.)
7. Dokažte, že pro L -uzávěrový operátor C a libovolné L -množiny $A_i \in L^X$ ($i \in I$) platí $C(\bigcap_i C(A_i)) = \bigcap_i C(A_i)$ – průnik uzavřených L -množin je tedy uzavřený i podle operátoru samotného.