

Kapitola 7

Podobnost a kompatibilita

L-ekvivalence modelují podobnost a nerozlišitelnost. V této kapitole se budeme ptát, jak podobnost spolupracuje s ostatními pojmy, které jsme vybudovali: kdy L-množina „respektuje“ podobnost prvků, jak ji na to nejúsporněji doplnit a proč operace s L-množinami zachovávají podobnost svých argumentů. Tím mimo jiné splníme slib z kapitoly 4: ukážeme, že na přesných hodnotách stupňů příslušnosti „záleží jen spojitě“ – malá změna vstupů změní výsledky jen málo. Na závěr předvedeme, jak podobnost umožňuje slepit plně podobné prvky a universum tím zmenšit.

7.1 Estenzionalita a estenzionální obal

Mějme na universu X L-ekvivalenci $\approx$. Chceme-li, aby L-množiny na X podobnost prvků braly vážně, měly by podobným prvkům přiřazovat podobné stupně příslušnosti: je-li x v A a y je podobné x , mělo by i y být v A – přinejmenším v odpovídajícím stupni. Přesně to říká následující definice; jako obvykle ji vyslovíme ve stupních.

Definice 7.1: estenzionalita

Nechť $\approx$ je L-ekvivalence na X . **Stupeň estenzionality** L-množiny $A \in L^X$ vzhledem k $\approx$ je

$$\text{Ext}_{\approx}(A) = \bigwedge_{x,y \in X} ((A(x) \otimes (x \approx y)) \rightarrow A(y)).$$

Je-li $\text{Ext}_{\approx}(A) = 1$, tj. platí-li $A(x) \otimes (x \approx y) \leq A(y)$ pro všechna $x, y \in X$, nazývá se A **extenzionální** (též **kompatibilní**) vzhledem k $\approx$.

Vzhledem k ostré rovnosti je extenzionální každá L -množina; podmínka začne být zajímavá až pro bohatší podobnosti. Užitečné je následující přeformulování: extenzionalita znamená, že stupeň příslušnosti se mezi podobnými prvky nemění více, než dovoluje jejich podobnost.

Lemma 7.1

$A \in L^X$ je extenzionální vzhledem k $\approx$, právě když pro všechna $x, y \in X$ platí

$$(x \approx y) \leq (A(x) \leftrightarrow A(y)).$$

Důkaz

Podle adjunkce je podmínka $A(x) \otimes (x \approx y) \leq A(y)$ ekvivalentní $(x \approx y) \leq A(x) \rightarrow A(y)$. Extenzionalita ji požaduje pro všechny dvojice, tedy i pro dvojici y, x ; se symetrií $\approx$ dohromady dostáváme právě $(x \approx y) \leq (A(x) \rightarrow A(y)) \wedge (A(y) \rightarrow A(x)) = (A(x) \leftrightarrow A(y))$. Obrácení je zřejmé.

Příklad 7.2

Nechť $X = \{x, y, z\}$, L je standardní Łukasiewiczova algebra a $\approx$ má jedničky na diagonále, $(x \approx y) = 0.9$, $(y \approx z) = 0.7$ a $(x \approx z) = 0.6$ (snadno ověříme, že jde o L -ekvivalenci). L -množina $A = \{1/x, {}^{0.9}/y, {}^{0.4}/z\}$ extenzionální není:

$$A(x) \otimes (x \approx z) = 1 \otimes 0.6 = 0.6 \not\leq 0.4 = A(z).$$

Porušení je ale jen částečné – nejhorší dvojice dávají $0.6 \rightarrow 0.4 = 0.8$, takže $\text{Ext}_{\approx}(A) = 0.8$.

Neextenzionální L -množinu můžeme extenzionální „dodělat“: prvku y přidělíme vše, co si vynutí podobnost s ostatními prvky.

Definice 7.2: extenzionální obal

Extenzionální obal L -množiny $A \in L^X$ vzhledem k L -ekvivalenci $\approx$ je L -množina $C_{\approx}(A)$ daná předpisem

$$C_{\approx}(A)(y) = \bigvee_{x \in X} (A(x) \otimes (x \approx y)).$$

Věta 7.3: o extenzionálním obalu

$C_{\approx}(A)$ je nejmenší extenzionální L -množina obsahující A . Navíc je $C_{\approx}$ L -uzávěrový operátor na X ; jeho pevné body jsou přesně extenzionální L -množiny.

Důkaz

Obsahuje A : $A(y) = A(y) \otimes (y \approx y) \leq C_{\approx}(A)(y)$.

Je extenzionální: distributivita $\otimes$ přes suprema a tranzitivita $\approx$ dávají

$$\begin{aligned} C_{\approx}(A)(y) \otimes (y \approx z) &= \bigvee_x (A(x) \otimes (x \approx y) \otimes (y \approx z)) \\ &\leq \bigvee_x (A(x) \otimes (x \approx z)) = C_{\approx}(A)(z). \end{aligned}$$

Nejmenší: je-li B extenzionální a $A \subseteq B$, pak $A(x) \otimes (x \approx y) \leq B(x) \otimes (x \approx y) \leq B(y)$, takže $C_{\approx}(A) \subseteq B$.

Uzávěrový operátor: extenzivitu už máme. Monotonie ve stupních: pro každé y je

$$\begin{aligned} C_{\approx}(A_1)(y) \otimes S(A_1, A_2) &= \bigvee_x (A_1(x) \otimes S(A_1, A_2) \otimes (x \approx y)) \\ &\leq C_{\approx}(A_2)(y), \end{aligned}$$

neboť $A_1(x) \otimes S(A_1, A_2) \leq A_2(x)$; adjunkce a infimum přes y dají $S(A_1, A_2) \leq S(C_{\approx}(A_1), C_{\approx}(A_2))$. Idempotence: $C_{\approx}(A)$ je extenzionální nadmnožina sebe sama, takže z již dokázané minimality je $C_{\approx}(C_{\approx}(A)) = C_{\approx}(A)$. Pevné body: je-li A extenzionální, je nejmenší extenzionální nadmnožinou sama sebe, tedy $C_{\approx}(A) = A$; obráceně je každý pevný bod extenzionální, protože $C_{\approx}(A)$ extenzionální je.

Podle věty o korespondenci z kapitoly 6 tedy extenzionální L -množiny tvoří L -uzávěrový systém – jsou uzavřeny na průniky a posuny (přímé ověření je cvičení 3). V příkladu 7.2 vyjde obal $C_{\approx}(A) = \{^1/x, ^{0.9}/y, ^{0.6}/z\}$: prvek z si stupeň 0.6 vynutil podobností s x .

Poznámka: kompatibilní relace

Stejnou myšlenku použijeme i pro binární **L**-relace. Relace $R \in L^{X \times Y}$ je **kompatibilní** s **L**-ekvivalencemi $\approx^X$ na X a $\approx^Y$ na Y , pokud

$$R(x, y) \otimes (x \approx^X x') \otimes (y \approx^Y y') \leq R(x', y')$$

pro všechna $x, x' \in X$ a $y, y' \in Y$. Nejde o nic nového: předpis $(\langle x, y \rangle \approx \langle x', y' \rangle) = (x \approx^X x') \otimes (y \approx^Y y')$ definuje **L**-ekvivalenci na $X \times Y$ (cvičení 5) a kompatibilita R je přesně extenzionalita R vzhledem k ní. Vše z této sekce – obal i uzávěrové vlastnosti – se tedy na relace přenáší beze změny.

Odkud se **L**-ekvivalence berou? Často právě z **L**-množin: máme-li soubor vlastností (**L**-množin) $\mathcal{A} \subseteq L^X$, můžeme prohlásit dva prvky za podobné do té míry, do jaké se shodují ve všech vlastnostech souboru.

Věta 7.4: Leibnizova L-ekvivalence

Pro $\mathcal{A} \subseteq L^X$ definujeme

$$(x \approx_{\mathcal{A}} y) = \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} (A(x) \leftrightarrow A(y)).$$

Pak $\approx_{\mathcal{A}}$ je **L**-ekvivalence na X , každá $A \in \mathcal{A}$ je vzhledem k ní extenzionální a $\approx_{\mathcal{A}}$ je *největší* **L**-ekvivalence s touto vlastností.

Důkaz

Reflexivita a symetrie plynou z $a \leftrightarrow a = 1$ a symetrie biresidua; tranzitivita z $(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leq (a \leftrightarrow c)$ (kapitola 2), protože infima tuto nerovnost zachovají. Extenzionalita každé $A \in \mathcal{A}$ plyne z Lemmatu 7.1: přímo z definice je $(x \approx_{\mathcal{A}} y) \leq A(x) \leftrightarrow A(y)$. Je-li konečně E **L**-ekvivalence, vzhledem k níž jsou všechny $A \in \mathcal{A}$ extenzionální, dává totéž lemma $E(x, y) \leq A(x) \leftrightarrow A(y)$ pro každou $A \in \mathcal{A}$, tedy $E \subseteq \approx_{\mathcal{A}}$.



Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Rodák z Lipska, povoláním právník a diplomat ve službách hannoverského dvora, patří k posledním učencům, kteří obsáhli vědění své doby vcelku. Nezávisle na Newtonovi vybudoval infinitezimální počet – a je to právě jeho zápis $\int$ a dx , který po-

užíváme dodnes –, sestrojil mechanickou kalkulačku zvládající všechny čtyři početní úkony, propracoval dvojkovou soustavu a stál u zrodu Pruské akademie věd, jejímž byl prvním prezidentem (1700).

V logice snil o *characteristica universalis*, univerzálním pojmovém písmu, a o kalkulu, který by učené spory rozhodoval výpočtem – „Calculemus!“, počítejme. Symbolická logika 19. století začala tento sen naplňovat.

Zásadu *identity nerozlišitelných* – věci, které se neliší žádnou vlastností, jsou totožné – formuloval v *Monadologii* a hájil v korespondenci se Samuelem Clarkem. Leibnizova L-ekvivalence z této kapitoly nerozlišitelnost neprohlašuje, ale *měří*.

Leibnizova L-ekvivalence je základem mnoha aplikací: prvky (pacienty, výrobky, dokumenty) popíšeme L-množinami jejich vlastností a podobnost z popisu spočítáme. V kapitole 10 se s toutéž myšlenkou potkáme u formální konceptuální analýzy.

7.2 Zachovávání podobnosti

V kapitole 4 jsme si položili otázku, do jaké míry záleží na přesných hodnotách stupňů příslušnosti. Ted' na ni můžeme odpovědět: operace s L-množinami zachovávají podobnost svých argumentů. Nahradíme-li vstupy podobnými vstupy, budou i výsledky podobné – a víme přesně, v jakém stupni nejméně.

Věta 7.5: operace zachovávají podobnost

Pro $A_1, A_2, B_1, B_2 \in L^X$ a binární L-relace $R_1, R_2 \in L^{X \times Y}$, $S_1, S_2 \in L^{Y \times Z}$ platí

$$(A_1 \approx A_2) \wedge (B_1 \approx B_2) \leq ((A_1 \cap B_1) \approx (A_2 \cap B_2)), \quad (\cap)$$

$$(A_1 \approx A_2) \wedge (B_1 \approx B_2) \leq ((A_1 \cup B_1) \approx (A_2 \cup B_2)), \quad (\cup)$$

$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq ((A_1 \otimes B_1) \approx (A_2 \otimes B_2)), \quad (\otimes)$$

$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq ((A_1 \rightarrow B_1) \approx (A_2 \rightarrow B_2)), \quad (\rightarrow)$$

$$(R_1 \approx R_2) \otimes (S_1 \approx S_2) \leq ((R_1 \circ S_1) \approx (R_2 \circ S_2)), \quad (\circ)$$

$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq (S(A_1, B_1) \leftrightarrow S(A_2, B_2)). \quad (S)$$

Nerovnosti $(\cap)$ a $(\cup)$ platí i pro průniky a sjednocení libovolných systémů s infimem $\bigwedge_i (A_i \approx B_i)$ na levé straně.

Důkaz

Dokážeme $(\cap)$ a (S) ; ostatní případy jsou cvičení 2 (u $(\circ)$ pomůže věta o skládání a podmnožinovitosti z kapitoly 4).

$(\cap)$ Položme $s = S(A_1, A_2) \wedge S(B_1, B_2)$; zjevně $s \geq (A_1 \approx A_2) \wedge (B_1 \approx B_2)$. Pro každé x je

$$(A_1 \cap B_1)(x) \otimes s \leq (A_1(x) \otimes s) \wedge (B_1(x) \otimes s) \leq A_2(x) \wedge B_2(x),$$

tedy $s \leq S(A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2)$. Symetricky pro opačný směr; obě nerovnosti dají $(\cap)$.

(S) Podle tranzitivity podmnožinovitosti ve stupních (kapitola 4) je

$$S(A_2, A_1) \otimes S(A_1, B_1) \otimes S(B_1, B_2) \leq S(A_2, B_2),$$

a protože $(A_1 \approx A_2) \leq S(A_2, A_1)$ a $(B_1 \approx B_2) \leq S(B_1, B_2)$, dostáváme adjunkcí

$$(A_1 \approx A_2) \otimes (B_1 \approx B_2) \leq S(A_1, B_1) \rightarrow S(A_2, B_2).$$

Záměnou rolí indexů 1 a 2 dostaneme i opačnou implikaci a obě dohromady dají biresiduum.

Věta je přesným vyjádřením „spojitosti“ teorie fuzzy množin vůči stupňům: jsou-li stupně příslušnosti určeny jen přibližně – což je v praxi vždy – liší se výsledky všech dosud zavedených konstrukcí od „správných“ nejvýše tak, jak se liší vstupy. Všimněme si také, že u operací definovaných pomocí $\otimes$ vystupuje na levé straně $\otimes$: skládáním se nepřesnosti mohou násobit, přesně jak jsme to viděli u mocnin relací v kapitole 6.

7.3 Faktorizace podle podobnosti

Jsou-li si dva prvky podobné ve stupni 1, žádná extenzionální L-množina je nerozliší. Nabízí se je slepit – universum tím zmenšíme a o nic nepřijdeme. Vyjdeme z pozorování, že plná podobnost je ostrá ekvivalence.

Lemma 7.6

Pro L-ekvivalenci $\approx$ na X je 1-řez $^1 \approx$ (klasická) ekvivalence na X .

Důkaz

Reflexivita a symetrie jsou zřejmé; tranzitivita: z $(x \approx y) = (y \approx z) = 1$ plyne $1 = (x \approx y) \otimes (y \approx z) \leq (x \approx z)$.

Označme $[x] = \{y \in X \mid (x \approx y) = 1\}$ třídu prvku x podle $\approx$ a $X/\approx = \{[x] \mid x \in X\}$ příslušnou faktorovou množinu.

Věta 7.7: faktorizace

Předpis

$$([x] \approx [y]) = (x \approx y)$$

je korektní (nezávisí na volbě reprezentantů) a definuje **L**-rovnost na $X/\approx$. Je-li dále $A \in L^X$ extenzionální, je předpis $A([x]) = A(x)$ korektní a definuje **L**-množinu na $X/\approx$, extenzionální vzhledem k této **L**-rovnosti.

Důkaz

Korektnost: necht' $[x] = [x']$ a $[y] = [y']$, tedy $(x \approx x') = (y \approx y') = 1$. Dvojím užitím tranzitivity

$$(x \approx y) = (x' \approx x) \otimes (x \approx y) \otimes (y \approx y') \leq (x' \approx y'),$$

a symetricky $(x' \approx y') \leq (x \approx y)$; hodnoty se tedy shodují. Reflexivita, symetrie a tranzitivita na faktoru plynou ihned z těchto vlastností $\approx$ na X . **L**-rovnost: je-li $([x] \approx [y]) = 1$, pak $(x \approx y) = 1$, tedy $y \in [x]$ a $[x] = [y]$.

L-množiny: pro extenzionální A a $(x \approx x') = 1$ dává extenzionalita $A(x) = A(x) \otimes 1 \leq A(x')$ i obráceně, tedy $A(x) = A(x')$ a předpis je korektní. Extenzionalita na faktoru je pak jen přepisem extenzionality na X .

Faktorizací se tedy každá podobnost stane **L**-rovností: plně podobné prvky splynou a extenzionální **L**-množiny přejdou na faktor beze ztráty informace. Neextenzionální **L**-množiny na faktor obecně nepřejdou – právě proto je extenzionalita tou správnou podmínkou „slučitelnosti s podobností“.

Příklad 7.8

Vraťme se k **L**-ekvivalenci E z příkladu na konci kapitoly 4: na $X = \{x, y, z, u\}$ nad standardní Łukasiewiczovou algebrou byla dána tabulkou

E	x	y	z	u
x	1	0.9	0.8	1
y	0.9	1	0.7	0.9
z	0.8	0.7	1	0.8
u	1	0.9	0.8	1

a nebyla **L**-rovnost, protože $E(x, u) = 1$ pro $x \neq u$. Třídy podle ${}^1E$ jsou $[x] = \{x, u\}$, $[y] = \{y\}$ a $[z] = \{z\}$ a indukovaná **L**-relace na X/E ,

$$([x] \approx [y]) = 0.9, \quad ([x] \approx [z]) = 0.8, \quad ([y] \approx [z]) = 0.7,$$

už **L**-rovnost je – v souladu s pozorováním z kapitoly 4, že restrikce E na $\{x, y, z\}$ je **L**-rovnost.

Cvičení

1. Pro **L**-ekvivalenci $\approx$ z Příkladu 7.2 a **L**-množinu

$$A = \{^{0.3}/x, \ ^1/y, \ ^{0.5}/z\}$$

spočítejte $\text{Ext}_{\approx}(A)$ a extenzionální obal $C_{\approx}(A)$ (nad standardní Łukasiewiczovou algebrou).

2. Dokažte zbývající nerovnosti Věty 7.5: $(\cup)$, $(\otimes)$, $(\rightarrow)$ a $(\circ)$.
3. Dokažte přímo (bez věty o korespondenci), že extenzionální **L**-množiny vzhledem k $\approx$ tvoří **L**-uzávěrový systém: jsou uzavřeny na libovolné průniky i na posuny $a \rightarrow A$.
4. Nechť $X = \{x, y, z\}$ a $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, kde

$$A_1 = \{^1/x, \ ^{0.8}/y, \ ^{0.2}/z\}, \quad A_2 = \{^{0.6}/x, \ ^{0.6}/y, \ ^{0.9}/z\}.$$

Nad standardní Łukasiewiczovou algebrou spočítejte Leibnizovu **L**-ekvivalenci $\approx_{\mathcal{A}}$.

5. Dokažte, že předpis $(\langle x, y \rangle \approx \langle x', y' \rangle) = (x \approx^X x') \otimes (y \approx^Y y')$ z poznámky o kompatibilních relacích definuje **L**-ekvivalenci na $X \times Y$.
6. Ukažte, že extenzionální obal jednoprvkové **L**-množiny $\{^1/x\}$ je **L**-množina $(x \approx \cdot)$, a odvoďte, že

$$C_{\approx}(A) = \bigcup_{x \in X} (A(x) \otimes C_{\approx}(\{^1/x\})) :$$

obal je sjednocením „tříd“ jednotlivých prvků vážených stupni příslušnosti.

7. Najděte **L**-ekvivalenci $\approx$ a neextenzionální **L**-množinu A tak, aby předpis $A([x]) = A(x)$ z Věty 7.7 korektní nebyl.