

Kapitola 8

Princip rozšíření, fuzzy čísla a fuzzy aritmetika

Jak aplikovat obyčejnou funkci $f: X \rightarrow Y$ na fuzzy množinu? Odpovědí je Zadehův princip rozšíření. Na něm pak postavíme fuzzy čísla – fuzzy množiny na reálné ose modelující neurčité hodnoty typu „asi pět“ – a počítání s nimi.

8.1 Princip rozšíření

Obraz množiny A při zobrazení f je v klasické teorii množina $\{f(x) \mid x \in A\}$: prvek y do něj patří, právě když *existuje* $x \in A$ s $f(x) = y$. Obrat „existuje“ čteme stupňovaně supremem – a víc není potřeba.

Definice 8.1: princip rozšíření

Nechť $f: X \rightarrow Y$. **Obraz** L-množiny $A \in L^X$ při f je L-množina $f(A) \in L^Y$,

$$f(A)(y) = \bigvee_{\substack{x \in X \\ f(x)=y}} A(x),$$

a **vzor** L-množiny $B \in L^Y$ je L-množina $f^{-1}(B) \in L^X$ daná předpisem $f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$.

(Supremum prázdné množiny je 0; prvky mimo obor hodnot f mají v obrazu stupeň 0.) Předpisu pro obraz se říká **princip rozšíření** (*extension principle*): dovoluje libovolnou funkci „rozšířit“ z prvků

na L -množiny. Nejde přitom o nic jiného než o speciální případ skládání relací z kapitoly 4: chápeme-li f jako ostrou relaci $R_f \in L^{X \times Y}$ s $R_f(x, y) = 1$ právě pro $y = f(x)$, je $f(A) = A \circ R_f$ (a $f^{-1}(B) = R_f \circ B$, čteme-li A, B jako unární relace).

Věta 8.1: vlastnosti obrazů a vzorů

Nechť $f: X \rightarrow Y$, $A, A_i \in L^X$ a $B, B_i \in L^Y$ ($i \in I$). Pak

1. $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ a $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$, přičemž inkluze může být ostrá;
2. $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$, $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$ a $f^{-1}(a \rightarrow B) = a \rightarrow f^{-1}(B)$, $f^{-1}(a \otimes B) = a \otimes f^{-1}(B)$ pro každé $a \in L$;
3. $S(A_1, A_2) \leq S(f(A_1), f(A_2))$ a $S(B_1, B_2) \leq S(f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2))$;
4. $f({}^a A) \subseteq {}^a(f(A))$ pro každé $a \in L$; rovnost platí, je-li supremum v definici obrazu vždy dosaženo (například pro konečné X).

Důkaz

(1) První rovnost je záměna suprem; u průniků máme pro každé j inkluzi $f(\bigcap_i A_i) \subseteq f(A_j)$ z monotonie obrazu. Ostrost: pro f konstantní a ostré množiny A_1, A_2 neprázdné a disjunktní je $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, ale $f(A_1) \cap f(A_2) \neq \emptyset$.

(3) Pro každé y je

$$\begin{aligned} f(A_1)(y) \otimes S(A_1, A_2) &= \bigvee_{f(x)=y} (A_1(x) \otimes S(A_1, A_2)) \\ &\leq \bigvee_{f(x)=y} A_2(x) = f(A_2)(y), \end{aligned}$$

což po adjunkci a infimu přes y dává první nerovnost; druhá je zřejmá z $f^{-1}(B_i)(x) = B_i(f(x))$.

(4) Je-li $x \in {}^a A$, pak $f(A)(f(x)) \geq A(x) \geq a$, tedy $f(x) \in {}^a(f(A))$. Naopak $y \in {}^a(f(A))$ znamená $\bigvee_{f(x)=y} A(x) \geq a$; je-li supremum dosaženo v nějakém x_0 , je $x_0 \in {}^a A$ a $y = f(x_0) \in f({}^a A)$.

Bod (2) je snadné cvičení 3 – vzor je „dosazení“, a komutuje proto se vším.

Podle bodu (3) je rozšíření f monotonní ve stupních – podobné vstupy dávají podobné obrazy, v souladu s kapitolou 7. Malý příklad: pro $X = \{1, 2, 3\}$ a $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$ je

$$f(\{0.7/1, 0.4/2, 0.5/3\}) = \{0.7/a, 0.5/b\}.$$

Rozšiřovat můžeme i funkce více proměnných; tam se do hry dostává otázka, jak skloubit stupně jednotlivých argumentů.

Definice 8.2: princip rozšíření pro dvě proměnné

Nechť $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$. Pro $A_1 \in L^{X_1}$ a $A_2 \in L^{X_2}$ definujeme $f(A_1, A_2) \in L^Y$ předpisem

$$f(A_1, A_2)(y) = \bigvee_{\substack{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \\ f(x_1, x_2) = y}} (A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)).$$

Poznámka: proč $\wedge$, a ne $\otimes$?

Zadehův původní princip rozšíření užívá minimum a my se ho přidržíme, protože jen s $\wedge$ platí věta o řezech, o kterou celou fuzzy aritmetiku opřeme. Nad obecným residuovaným svazem se nabízí i $\otimes$ -verze (stupně argumentů se násobí); je menší nebo rovna té naší a v literatuře se s ní také pracuje.

8.2 Fuzzy čísla

V této a následující sekci pracujeme se standardní strukturou na $L = [0, 1]$ a universum je reálná osa $\mathbb{R}$. Chceme modelovat neurčitě hodnoty: „asi pět“, „zhruba mezi dvěma a třemi“. Taková fuzzy množina by měla mít alespoň jeden typický prvek (stupeň 1), její stupně by měly od typických hodnot k oběma stranám klesat a neurčitost by neměla sahát do nekonečna. Přesně to zachycuje následující definice; formulujeme ji pomocí řezů, s nimiž jsme se naučili zacházet v kapitole 4. **Nosičem** fuzzy množiny A rozumíme množinu $\{x \mid A(x) > 0\}$.

Definice 8.3: fuzzy číslo

Fuzzy číslo je fuzzy množina $A \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ taková, že

- A je **normální**: $A(x) = 1$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$,
- pro každé $\alpha \in (0, 1]$ je řez ${}^{\alpha}A$ uzavřený interval,
- nosič A je omezený.

Řezy budeme značit ${}^{\alpha}A = [a_{\alpha}, b_{\alpha}]$.

Podmínka na řezy má názorný geometrický obsah. Řekneme, že fuzzy množina A na $\mathbb{R}$ je **fuzzy konvexní**, pokud $A(\lambda x + (1 -$

$\lambda)y) \geq A(x) \wedge A(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in [0, 1]$ – mezi dvěma body stupeň nikdy neklesne pod menší z krajních stupňů.

Lemma 8.2

Fuzzy množina A na $\mathbb{R}$ je fuzzy konvexní, právě když je každý její řez ${}^{\alpha}A$ ($\alpha > 0$) interval. Uzavřenost všech řezů je pak ekvivalentní horní polospojivosti funkce A .

Důkaz

Je-li A fuzzy konvexní, $u, v \in {}^{\alpha}A$ a w leží mezi nimi, pak $A(w) \geq A(u) \wedge A(v) \geq \alpha$, takže řez je konvexní podmnožina $\mathbb{R}$, tedy interval. Naopak necht' jsou všechny řezy intervaly; pro x, y položme $\alpha = A(x) \wedge A(y)$. Pro $\alpha = 0$ není co dokazovat; jinak $x, y \in {}^{\alpha}A$, a tedy i každý bod mezi nimi leží v ${}^{\alpha}A$, což je přesně fuzzy konvexnost. Druhé tvrzení je standardní fakt z analýzy (horní polospojitost = uzavřenost množin $\{x \mid A(x) \geq \alpha\}$) a nebudeme je dokazovat.

Příklad 8.3

(1) **Trojúhelníkové fuzzy číslo** (a, b, c) , kde $a \leq b \leq c$, je dáno předpisem

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b], \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{pro } x \in [b, c], \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(krajní případy $a = b$ či $b = c$ čteme jako skok). Jeho řezy jsou

$${}^{\alpha}(a, b, c) = [a + \alpha(b-a), c - \alpha(c-b)]$$

(cvičení 1). Trojúhelníkové číslo $(1, 2, 3)$ je rozumný model hodnoty „asi 2“.

(2) **Lichoběžníkové fuzzy číslo** (a, b, c, d) roste na $[a, b]$, na $[b, c]$ je rovno 1 a na $[c, d]$ klesá – model pro „zhruba mezi b a c “. V části literatury se mu říká *fuzzy interval* a slovo *fuzzy číslo* se vyhrazuje pro případ, kdy stupně 1 nabývá jediný bod.

(3) Ostré číslo r ztotožníme s fuzzy číslem $\{^1/r\} = (r, r, r)$; ostrý interval $[a, b]$ s lichoběžníkem (a, a, b, b) . Fuzzy čísla tedy zobecňují čísla i intervaly zároveň.

8.3 Fuzzy aritmetika

Aritmetické operace jsou funkce $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a tak je princip rozšíření přenesen na fuzzy čísla sám od sebe:

$$(A \oplus B)(z) = \bigvee_{x+y=z} (A(x) \wedge B(y)),$$

a podobně $A \ominus B$ (přes $x - y = z$) a $A \odot B$ (přes $x \cdot y = z$). Počítat přímo z definice je nepohodlné; naštěstí se vše dá převést na počítání s intervaly. Připomeňme [intervalovou aritmetiku](#):

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [\min P, \max P], \quad P = \{ac, ad, bc, bd\}. \end{aligned}$$

Věta 8.4: fuzzy aritmetika po řezech

Pro fuzzy čísla A, B a každé $\alpha \in (0, 1]$ platí

$$\alpha(A \oplus B) = \alpha A + \alpha B,$$

a obdobně pro $\ominus$ a $\odot$. Výsledky $A \oplus B$, $A \ominus B$ a $A \odot B$ jsou opět fuzzy čísla.

Intervalová aritmetika je starší než fuzzy množiny: Ramon E. Moore ji v 60. letech rozpracoval pro spolehlivé odhady zaokrouhlovacích chyb počítačů (kniha *Interval Analysis*, 1966). Fuzzy čísla ji zobecňují – jsou to vlastně intervaly s měkkými okraji, navrstvené po řezech.

Důkaz

Dokážeme tvrzení pro $\oplus$; pro $\ominus$ a $\odot$ probíhá důkaz stejně (stačí spojitost příslušné operace).

„ $\supseteq$ “: pro $x \in \alpha A$ a $y \in \alpha B$ je $(A \oplus B)(x + y) \geq A(x) \wedge B(y) \geq \alpha$.

„ $\subseteq$ “: nechť $z \in \alpha(A \oplus B)$, tedy $\bigvee_x (A(x) \wedge B(z - x)) \geq \alpha$. Funkce $g(x) = A(x) \wedge B(z - x)$ je horní polospojité (Lemma 8.2) a mimo omezený nosič A je nulová; podle známé věty z analýzy proto svého suprema nabývá v nějakém bodě x_0 . Pak $A(x_0) \geq \alpha$ i $B(z - x_0) \geq \alpha$, takže $z = x_0 + (z - x_0) \in \alpha A + \alpha B$.

Zbytek: řezy $A \oplus B$ jsou součty uzavřených omezených intervalů, tedy uzavřené intervaly; normalita plyne z řezu $\alpha = 1$ a omezenost nosiče z omezeností nosičů A a B . Výsledek je proto fuzzy číslo.

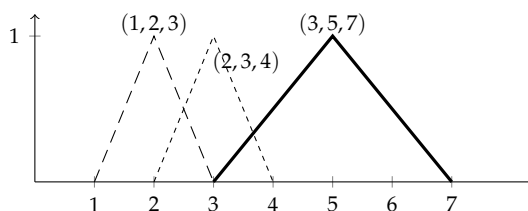
Příklad 8.5

„Asi dva plus asi tři je asi pět.“ Řezy trojúhelníkových čísel závisejí na α lineárně a součet dvou lineárních funkcí je opět lineární; z Věty 8.4 proto plyne (podrobný výpočet je

cvičení 2), že trojúhelníková čísla se sčítají po složkách:

$$(a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Speciálně $(1, 2, 3) \oplus (2, 3, 4) = (3, 5, 7)$:



U násobení už to neplatí – součin trojúhelníkových čísel trojúhelníkový není (cvičení 5).

Poznámka: pozor, není to grupa

Struktura $\oplus$ je komutativní a asociativní a ostrá nula $(0, 0, 0)$ je jejím neutrálním prvkem (cvičení 6) – fuzzy čísla s $\oplus$ tedy tvoří komutativní monoid. Grupu však nikoli: například pro $A = (1, 2, 3)$ je

$$A \ominus A = (-2, 0, 2),$$

nikoli ostrá nula – „asi dva minus asi dva“ je „asi nula“, s neurčitostí obou operandů sečtenou. Šířky nosičů se totiž při $\oplus$ i $\ominus$ sčítají: neurčitost se výpočtem kumuluje a nikdy sama od sebe nezmizí. Z téhož důvodu nemusí mít rovnice $A \oplus X = B$ řešení, je-li A „širší“ než B (cvičení 7).

Na fuzzy číslech stojí Zadehovy *lingvistické proměnné* (1975): proměnné, jejichž hodnoty nejsou čísla, ale slova – „malá“, „asi pět“, „vysoká“ – interpretovaná fuzzy množinami na číselném oboru. Vráťme se k nim u přibližného usuzování v kapitole 12.

Cvičení

1. Odvoďte vzorec pro řezy trojúhelníkového fuzzy čísla z Příkladu 8.3 a rozmyslete, jak vypadají řezy lichoběžníkového čísla (a, b, c, d) .
2. Spočítejte po řezech $(1, 2, 3) \oplus (2, 3, 4)$ a $(1, 2, 3) \ominus (1, 2, 3)$.
3. Dokažte bod (2) Věty 8.1.
4. Pro $f(x) = x^2$ a $A = (-1, 0, 1)$ spočítejte obraz $f(A)$. Ukažte, že $f(A)(y) = 1 - \sqrt{y}$ pro $y \in [0, 1]$ – obraz trojúhelníkového čísla tedy nemusí být trojúhelníkový, fuzzy číslo to však je.

5. Ukažte, že $(1, 2, 3) \odot (1, 2, 3)$ není trojúhelníkové fuzzy číslo: spočítejte jeho řez pro $\alpha = 0.5$ a srovnejte s řezem trojúhelníkového čísla $(1, 4, 9)$.
6. Ověřte, že pro ostrá čísla splývá $\oplus$ s obyčejným sčítáním a že $A \oplus (0, 0, 0) = A$ pro každé fuzzy číslo A .
7. Ukažte, že rovnice $A \oplus \mathcal{X} = B$ má pro $A = (1, 2, 3)$ a $B = (2, 4, 6)$ řešení $\mathcal{X} = (1, 2, 3)$, zatímco pro $A = (0, 2, 4)$ a $B = (1, 2, 3)$ žádné řešení nemá. (Nápověda: porovnejte šířky řezů.)