

Kapitola 9

Fuzzy relační rovnice

Vraťme se k příkladu s pacienty, symptomy a nemocemi z kapitoly 4: známe-li symptomy pacientů a lékařskou znalost o tom, které symptomy provázejí které nemoci, diagnózy spočítáme složením. Známe-li naopak symptomy pacientů a jejich *diagnózy* a chceme z takových dat získat lékařskou znalost, dostáváme obrácenou úlohu, která vede na *fuzzy relační rovnice*. Základním nástrojem bude adjunkce, tentokrát mezi skládáními $\circ$ a $\triangleleft$ z kapitoly 4.

9.1 Formulace úlohy

Budeme řešit rovnice tvaru

$$A \circ R = B,$$

kde $A \in L^{X \times Y}$ a $B \in L^{X \times Z}$ jsou dány a neznámou je L -relace $R \in L^{Y \times Z}$. V diagnostickém čtení: X jsou pacienti, Y symptomy a Z nemoci; A říká, kdo má jaké symptomy, B kdo má jaké nemoci, a hledáme lékařskou znalost R – které symptomy ukazují na které nemoci. (Druhá varianta, s danou znalostí R a neznámou A , se na tuto převede inverzí; viz cvičení 2.)

Začneme dvěma jednoduchými příklady. Necht' L je standardní Łukasiewiczova algebra a všechny množiny jsou jednoprvkové, takže relace jsou prostě čísla. Rovnice $0.3 \otimes r = 0.8$ nemá řešení: levá strana nikdy nepřesáhne 0.3. Řešení tedy *nemusí existovat*. A rovnice o jednom pacientu a dvou symptomech

$$\max(r_1, 0.9 \otimes r_2) = 0.8$$

(tj. $A = (1, 0.9)$, $B = (0.8)$) má řešení celou řadu: všechna (r_1, r_2) s $r_1 = 0.8$, $r_2 \leq 0.9$ a všechna (r_1, r_2) s $r_2 = 0.9$, $r_1 \leq 0.8$. Řešení tedy

nemusí být jednoznačné. Všimněme si ale, že existuje největší řešení $(0.8, 0.9)$ a dvě minimální, $(0.8, 0)$ a $(0, 0.9)$.

9.2 Největší řešení

Struktura množiny řešení z posledního příkladu je obecná. Základem je následující lemma, obdoba adjunkce mezi $\otimes$ a $\rightarrow$ pro skládání relací.

Lemma 9.1: adjunkce skládání

Pro $A \in L^{X \times Y}$, $R \in L^{Y \times Z}$ a $B \in L^{X \times Z}$ platí

$$A \circ R \subseteq B \quad \text{právě když} \quad R \subseteq A^{-1} \triangleleft B.$$

Důkaz

Inkluze $A \circ R \subseteq B$ znamená, že pro všechna x, z je $\bigvee_y A(x, y) \otimes R(y, z) \leq B(x, z)$, což je totéž jako $A(x, y) \otimes R(y, z) \leq B(x, z)$ pro všechna x, y, z . Podle adjunkce mezi $\otimes$ a $\rightarrow$ je to dále totéž jako $R(y, z) \leq A(x, y) \rightarrow B(x, z)$ pro všechna x, y, z , tedy jako

$$R(y, z) \leq \bigwedge_{x \in X} (A(x, y) \rightarrow B(x, z)) = (A^{-1} \triangleleft B)(y, z).$$

Relace $\hat{R} = A^{-1} \triangleleft B$ je tedy *největší* relace, jejíž složení s A nepřesáhne B . Rozepsání

$$\hat{R}(y, z) = \bigwedge_{x \in X} (A(x, y) \rightarrow B(x, z))$$

má diagnostické čtení: symptom y ukazuje na nemoc z ve stupni, v němž *každý* pacient se symptomem y má nemoc z . Jde o opatrný závěr z dostupných dat, obdobně jako u slovního čtení skládání $\triangleleft$ v kapitole 4.

Věta 9.2: Sanchezova věta

Rovnice $A \circ R = B$ má řešení, právě když je jejím řešením $\hat{R} = A^{-1} \triangleleft B$. V tom případě je $\hat{R}$ **největší řešení** a navíc s každým řešením R je řešením i každá L-relace R' s $R \subseteq R' \subseteq \hat{R}$.

Důkaz

Je-li R řešení, pak $A \circ R \subseteq B$, takže $R \subseteq \hat{R}$ podle Lemmatu 9.1. Skládání je monotonní (kapitola 4), a proto

$$B = A \circ R \subseteq A \circ \hat{R} \subseteq B,$$

kde poslední inkluze je opět Lemma 9.1 (pro $\hat{R} \subseteq \hat{R}$). Tedy $A \circ \hat{R} = B$: existuje-li řešení, je jím i $\hat{R}$, a to největší. Stejný argument s $R \subseteq R' \subseteq \hat{R}$ dá $B = A \circ R \subseteq A \circ R' \subseteq A \circ \hat{R} = B$.

Sanchezova věta dává i praktický postup: spočítáme $\hat{R}$ a dosadíme. Vyjde-li $A \circ \hat{R} = B$, máme největší řešení; nevyjde-li, řešení neexistuje a žádné další kandidáty zkoušet nemusíme.

Příklad 9.3

Nechť L je standardní Łukasiewiczova algebra, $X = \{p_1, p_2\}$ jsou pacienti, $Y = \{s_1, s_2\}$ symptomy a $Z = \{n\}$ jediná nemoc. Data:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Největší kandidát vyjde

$$\hat{R}(s_1, n) = (1 \rightarrow 0.8) \wedge (0.4 \rightarrow 0.5) = 0.8 \wedge 1 = 0.8,$$

$$\hat{R}(s_2, n) = (0.9 \rightarrow 0.8) \wedge (1 \rightarrow 0.5) = 0.9 \wedge 0.5 = 0.5.$$

Zkouška: $(A \circ \hat{R})(p_1, n) = \max(1 \otimes 0.8, 0.9 \otimes 0.5) = \max(0.8, 0.4) = 0.8$ a $(A \circ \hat{R})(p_2, n) = \max(0.4 \otimes 0.8, 1 \otimes 0.5) = \max(0.2, 0.5) = 0.5$. Rovnice tedy řešení má a $\hat{R}$ je její největší řešení: symptom s_1 ukazuje na nemoc ve stupni 0.8, symptom s_2 ve stupni 0.5.

Větu o největším řešení publikoval Elie Sanchez v roce 1976 [SAN-CHEZ76]; motivací mu byla lékařská diagnostika. Fuzzy relační rovnice jsou od té doby samostatným tématem se stovkami prací.

Poznámka: minimální řešení

Množina všech řešení má podle Sanchezovy věty jediný největší prvek $\hat{R}$ a skládá se z intervalů mezi minimálními řešeními a $\hat{R}$; minimálních řešení může být mnoho (viz jednořádkový příklad v první sekci). Na konečných univerzech minimální řešení vždy existují a dají se najít kombinatorickým rozbořem, kterých dvojic (y, z) je v supremech skutečně potřeba; jejich počet však může s velikostí universí růst exponenciálně. Podrobný popis najde čtenář v [KLIR95], kapitole 6.

9.3 Soustavy rovnic a přibližná řešení

Každý pacient (řádek A a B) představuje jednu rovnici a hledáme relaci R vyhovující všem. Obecně: **soustava relačních rovnic** je systém

$$A_i \circ R = B_i, \quad i \in I,$$

s jednou neznámou R . Sanchezova věta se přenáší beze změny: stačí kandidáty jednotlivých rovnic protnout.

Věta 9.4: o soustavách

Soustava $A_i \circ R = B_i$ ($i \in I$) má řešení, právě když je jejím řešením

$$\hat{R} = \bigcap_{i \in I} (A_i^{-1} \triangleleft B_i),$$

a v tom případě je $\hat{R}$ její největší řešení.

Důkaz

Relace R splňuje $A_i \circ R \subseteq B_i$ pro všechna i , právě když $R \subseteq A_i^{-1} \triangleleft B_i$ pro všechna i (Lemma 9.1), tedy právě když $R \subseteq \hat{R}$. Zbytek je stejný jako v důkazu Sanchezovy věty: je-li R řešení soustavy, pak pro každé i

$$B_i = A_i \circ R \subseteq A_i \circ \hat{R} \subseteq B_i,$$

takže $\hat{R}$ je řešení, a to největší.

Vzorec pro $\hat{R}$ z minulé sekce je tohoto tvaru: infimum $\bigwedge_x$ probíhá přes pacienty, tedy přes jednořádkové rovnice.

Nemá-li soustava (či rovnice) řešení, má kandidát $\hat{R}$ přesto význam: podle Lemmatu 9.1 je $A \circ \hat{R} \subseteq B$ a mezi všemi relacemi s touto vlastností je $A \circ \hat{R}$ největší. Relace $\hat{R}$ tedy nikdy nedignostikuje víc, než data připouštějí, a ze všech takových relací se k B přibližuje nejtěsněji. To vede k měření řešitelnosti ve stupních.

Věta 9.5: stupeň řešitelnosti

Položme $\sigma = S(B, A \circ \hat{R})$, kde $\hat{R} = A^{-1} \triangleleft B$. Pak $(B \approx A \circ \hat{R}) = \sigma$ a rovnice $A \circ R = B$ má řešení, právě když $\sigma = 1$.

Důkaz

$Z A \circ \hat{R} \subseteq B$ je $S(A \circ \hat{R}, B) = 1$, takže $(B \approx A \circ \hat{R}) = S(B, A \circ \hat{R}) = \sigma$. Je-li $\sigma = 1$, pak $B \subseteq A \circ \hat{R}$, dohromady $A \circ \hat{R} = B$ a rovnice řešení má; obráceně má-li řešení, je jím $\hat{R}$ (Sanchezova věta) a $\sigma = 1$.

Číslo σ říkáme **stupeň řešitelnosti** rovnice. V úvodním příkladu $0.3 \otimes r = 0.8$ je $\hat{r} = 0.3 \rightarrow 0.8 = 1$, $0.3 \otimes 1 = 0.3$ a $\sigma = 0.8 \rightarrow 0.3 = 0.5$: rovnice je „řešitelná napůl“. Soustavné studium stupňů řešitelnosti a přibližných řešení rozvinul zejména S. Gottwald; další metody (včetně numerických) shrnuje [KLIR95].

9.4 Rovnice s infimovým skládáním

Dosud jsme skládali supremovou kompozicí $\circ$. Diagnózu jsme ale v kapitole 4 uměli číst i implikačně, kompozicí $\triangleleft$: pacient má nemoc do stupně, v němž *každý* jeho symptom na nemoc ukazuje. I toto čtení vede na rovnici, tentokrát

$$A \triangleleft R = B$$

s neznámou $R \in L^{Y \times Z}$. Teorie je duální k předchozí: roli suprem převezmou infima a roli největšího řešení nejmenší.

Lemma 9.6: duální adjunkce

Pro $A \in L^{X \times Y}$, $R \in L^{Y \times Z}$ a $B \in L^{X \times Z}$ platí

$$B \subseteq A \triangleleft R \quad \text{právě když} \quad A^{-1} \circ B \subseteq R.$$

Důkaz

Inkluze $B \subseteq A \triangleleft R$ znamená $B(x, z) \leq A(x, y) \rightarrow R(y, z)$ pro všechna x, y, z , což je podle adjunkce totéž jako $A(x, y) \otimes B(x, z) \leq R(y, z)$, tedy jako $(A^{-1} \circ B)(y, z) = \bigvee_x (A(x, y) \otimes B(x, z)) \leq R(y, z)$.

Věta 9.7: duální Sanchezova věta

Rovnice $A \triangleleft R = B$ má řešení, právě když je jejím řešením $\tilde{R} = A^{-1} \circ B$. V tom případě je $\tilde{R}$ **nejmenší řešení** a s každým řešením R je řešením i každá L-relace R' s $\tilde{R} \subseteq R' \subseteq R$.

Důkaz

Je-li R řešení, pak $B \subseteq A \triangleleft R$, takže $\tilde{R} \subseteq R$ podle Lemmatu 9.6. Kompozice $\triangleleft$ je ve druhém argumentu izotonní, a proto

$$B \subseteq A \triangleleft \tilde{R} \subseteq A \triangleleft R = B,$$

kde první inkluze je opět Lemma 9.6 (pro $\tilde{R} \subseteq R$). Tedy $A \triangleleft \tilde{R} = B$; zbytek jako u Sanchezovy věty.

Rozepsání nejmenšího řešení

$$\tilde{R}(y, z) = \bigvee_{x \in X} (A(x, y) \otimes B(x, z))$$

má opět diagnostické čtení: symptom y ukazuje na nemoc z do stupně, v němž *existuje* pacient, který má obojí. Největší řešení $\circ$ -rovnice bylo infimum přes pacienty, nejmenší řešení $\triangleleft$ -rovnice je supremum; obě rovnice jsou navzájem duální.

Příklad 9.8

Nechť L je standardní Łukasiewiczova algebra, jeden pacient má symptomy v stupních $A = (1, 0.9)$ a nemoc ve stupni $B = (0.7)$. Rovnice $A \triangleleft R = B$ zní $r_1 \wedge (0.9 \rightarrow r_2) = 0.7$ a nejmenší kandidát vyjde

$$\tilde{r}_1 = 1 \otimes 0.7 = 0.7, \quad \tilde{r}_2 = 0.9 \otimes 0.7 = 0.6.$$

Zkouška: $0.7 \wedge (0.9 \rightarrow 0.6) = 0.7 \wedge 0.7 = 0.7$; rovnice je řešitelná a $\tilde{R}$ je její nejmenší řešení. Struktura množiny řešení je duální k $\circ$ -případu: jediný *nejmenší* prvek a nad ním intervaly sahající k *maximálním* řešením, zde $(0.7, 1)$ a $(1, 0.6)$ (cvičení 9).

Cvičení

1. Nad standardní Łukasiewiczovou algebrou vyřešte rovnici $A \circ R = B$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.9 \end{pmatrix} :$$

spočítejte $\hat{R}$, proveďte zkoušku a rozhodněte o řešitelnosti. Poté totéž zopakujte nad Gödelovou algebrou.

2. Odvod'te řešení rovnice s neznámou na druhé straně: ukažte, že $A \circ R \subseteq B$ (s neznámou A), právě když $A \subseteq B \triangleright R^{-1}$, a zformulujte obdobu Sanchezovy věty. (Nápověda: použijte $(A \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ A^{-1}$ a Lemma 9.1.)

3. Dokažte, že množina řešení rovnice $A \circ R = B$ je uzavřena na libovolná sjednocení, a odvod'te odtud ještě jednou, že má-li rovnice řešení, má i největší řešení.
4. Nad standardní Łukasiewiczovou algebrou najděte všechna řešení rovnice $\max(r_1, 0.6 \otimes r_2) = 0.4$ a určete největší a minimální řešení.
5. Nad standardní Łukasiewiczovou algebrou uvažujte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $\widehat{R}$, ukažte, že rovnice nemá řešení, a určete její stupeň řešitelnosti.

6. Dokažte Větu 9.4 podrobně: proč je průnik kandidátů jednotlivých rovnic největším společným „podřešením“?
7. Diagnostická relace $\widehat{R}(y, z) = \bigwedge_x (A(x, y) \rightarrow B(x, z))$ připomíná Leibnizovu L-ekvivalenci a šipkové operátory, se kterými se setkáme v kapitole 10. Rozmyslete si slovní čtení všech tří konstrukcí a čím se liší.
8. Nad standardní Łukasiewiczovou algebrou vyřešte rovnici s infimovým skládáním

$$A \triangleleft R = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \end{pmatrix} :$$

spočítejte nejmenší kandidát $\widetilde{R}$ a proved'te zkoušku.

9. Popište všechna řešení rovnice z Příkladu 9.8 a ověřte, že maximální jsou právě $(0.7, 1)$ a $(1, 0.6)$.