Kapitola 10

Galoisovy konexe a formální konceptuální analýza

Tabulka dat – objekty v řádcích, atributy ve sloupcích, v políčkách stupně, v nichž objekt atribut má – je binární **L**-relace mezi objekty a atributy. V této kapitole ukážeme, že každá taková tabulka indukuje dvojici zobrazení mezi **L**-množinami objektů a **L**-množinami atributů: *Galoisovu konexi*. Její pevné body jsou *formální pojmy* – dvojice (extent, intent) zobecňující klasické pojetí pojmu – a uspořádány tvoří úplný svaz, *pojmový svaz* dat. Využijeme přitom výsledky z kapitol 6 a 7: složeniny šipkových operátorů budou přesně **L**-uzávěrové operátory.

10.1 Galoisovy konexe indukované L-relací

Formální **L**-kontext je trojice $\langle X, Y, I \rangle$, kde X je množina *objektů*, Y množina *atributů* a $I \in L^{X \times Y}$ **L**-relace; $I(x, y)$ čteme „objekt x má atribut y ve stupni $I(x, y)$“.

Definice 10.1: šipkové operátory

Pro **L**-kontext $\langle X, Y, I\rangle$ definujeme zobrazení $^{\uparrow}\colon L^X \to L^Y$ a $^{\downarrow}\colon L^Y \to L^X$ předpisy

$$A^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x\in X} \big(A(x) \to I(x,y)\big),$$
$$B^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{y\in Y} \big(B(y) \to I(x,y)\big).$$

Slovy: $A^{\uparrow}(y)$ je stupeň, v němž *každý* objekt z A má atribut y – tedy **L**-množina atributů *společných* objektům z A. Duálně $B^{\downarrow}$ je **L**-množina objektů majících *všechny* atributy z B. S konstrukcí tohoto typu jsme se potkali už v minulé kapitole: sloupce největšího řešení $\widehat{R} = A^{-1}\triangleleft B$ relační rovnice z kapitoly 9 jsou přesně hodnoty šipkových operátorů diagnostických dat.

Obě šipky spolu souvisejí jediným vztahem, z něhož pak plyne všechno ostatní.

Jméno je poctou Évaristu Galoisovi: korespondence mezi podgrupami a podtělesy z jeho teorie je prototypem všech Galoisových konexí. Obecný pojem ale pojmenoval až Øystein Ore (1944); sám Galois (1811–1832), který zemřel ve dvaceti letech po souboji, se o svazech nikdy nedozvěděl – vznikly o století později.

Definice 10.2: fuzzy Galoisova konexe

Dvojice zobrazení $f\colon L^X \to L^Y$ a $g\colon L^Y \to L^X$ se nazývá fuzzy Galoisova konexe mezi X a Y, pokud pro všechny $A \in L^X$ a $B \in L^Y$ platí

$$S\big(A,\ g(B)\big) = S\big(B,\ f(A)\big).$$

Věta 10.1

Dvojice $\langle^{\uparrow},^{\downarrow}\rangle$ je fuzzy Galoisova konexe. Platí totiž

$$S\big(A, B^{\downarrow}\big) = \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} \big((A(x)\otimes B(y)) \to I(x,y)\big)$$
$$= S\big(B, A^{\uparrow}\big).$$

Důkaz

Rozepišme levou stranu; využijeme vztah $a \to (b \to c) = (a \otimes b) \to c$ (kapitola 2):

$$\begin{aligned} S(A, B^{\downarrow}) &= \bigwedge_x \Big(A(x) \to \bigwedge_y \big(B(y) \to I(x,y) \big) \Big) \\ &= \bigwedge_{x,y} \big(A(x) \to (B(y) \to I(x,y)) \big) \\ &= \bigwedge_{x,y} \big((A(x) \otimes B(y)) \to I(x,y) \big). \end{aligned}$$

Prostřední výraz je díky komutativitě $\otimes$ symetrický v rolích A a B (a obou šipek), takže stejným výpočtem je roven i $S(B, A^{\uparrow})$.

Střední výraz se opět dobře čte: je to stupeň, v němž každý objekt z A má každý atribut z B.

Věta 10.2: vlastnosti šipkových operátorů

Pro $A, A_1, A_2 \in L^X$ a $B \in L^Y$ platí

1. $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$ a $B \subseteq B^{\downarrow\uparrow}$,
2. $S(A_1, A_2) \leq S\big(A_2^{\uparrow}, A_1^{\uparrow}\big)$ (antitonie ve stupních; duálně pro $^{\downarrow}$),
3. $A^{\uparrow\downarrow\uparrow} = A^{\uparrow}$ a $B^{\downarrow\uparrow\downarrow} = B^{\downarrow}$,
4. složenina $C(A) = A^{\uparrow\downarrow}$ je **L**-uzávěrový operátor na X (a duálně $B \mapsto B^{\downarrow\uparrow}$ na Y).

Důkaz

(1) Podle Věty 10.1 je $S(A, A^{\uparrow\downarrow}) = S(A^{\uparrow}, A^{\uparrow}) = 1$.
(2) Z (1) a tranzitivity stupňované inkluze je $S(A_1, A_2) = S(A_1, A_2) \otimes S(A_2, A_2^{\uparrow\downarrow}) \leq S(A_1, A_2^{\uparrow\downarrow})$, což se podle Věty 10.1 (s $B = A_2^{\uparrow}$) rovná $S(A_2^{\uparrow}, A_1^{\uparrow})$.
(3) Inkluze $A^{\uparrow} \subseteq A^{\uparrow\downarrow\uparrow}$ je (1) pro $B = A^{\uparrow}$. Obráceně: z (1) je $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$, takže (2) s $S(A, A^{\uparrow\downarrow}) = 1$ dává $S(A^{\uparrow\downarrow\uparrow}, A^{\uparrow}) = 1$.
(4) Extenzivita je (1), idempotence plyne z (3) a monotonie ve stupních složením dvou antitonií z (2): $S(A_1, A_2) \leq S(A_2^{\uparrow}, A_1^{\uparrow}) \leq S(A_1^{\uparrow\downarrow}, A_2^{\uparrow\downarrow})$.

Podle věty o korespondenci z kapitoly 6 tedy pevné body složeniny $^{\uparrow\downarrow}$ tvoří **L**-uzávěrový systém – jsou uzavřeny na průniky a posuny.

10.2 Formální pojmy a pojmový svaz

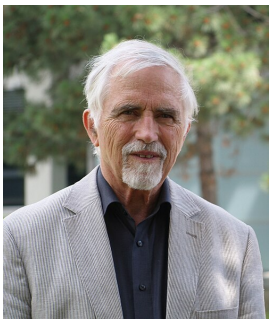
Dvojice extent–intent pochází z tradiční logiky: už *Logika z Port-Royalu* (1662) rozlišovala *rozsah* pojmu (které věci pod něj spadají) a jeho *obsah* (které znaky ho tvoří). Formální konceptuální analýza dala tomuto starému rozlišení přesný matematický obsah.

Definice 10.3: formální pojem

Formální pojem **L**-kontextu $\langle X, Y, I\rangle$ je dvojice $\langle A, B\rangle$, kde $A \in L^X$, $B \in L^Y$, $A^{\uparrow} = B$ a $B^{\downarrow} = A$. **L**-množina A se nazývá extent a B intent pojmu. Množinu všech formálních pojmů kontextu značíme $\mathcal{B}(X, Y, I)$ a uspořádáme ji předpisem

$$\langle A_1, B_1\rangle \leq \langle A_2, B_2\rangle \quad \text{právě když} \quad A_1 \subseteq A_2.$$

Formální pojem je tedy dvojice, která se „uzavírá sama do sebe“: extent je přesně množina objektů majících všechny atributy intentu a intent přesně množina atributů společných objektům extentu. Podmínka $A_1 \subseteq A_2$ je ekvivalentní $B_2 \subseteq B_1$ (cvičení 1): obecnější pojem má více objektů a méně znaků – přesně jako „savec“ a „pes“.



Rudolf Wille

Rudolf Wille (1937–2017)

Německý matematik, profesor obecné algebry na Technické univerzitě v Darmstadtu. Vyšel z teorie svazů – oboru tehdy vnímaného jako ryze abstraktní – a programovým článkem *Restructuring lattice theory* (1982) jí vytyčil nový úkol: vrátit svazy lidem, kteří pracují s daty. Odpovědí byla formální konceptuální analýza, v níž úplný svaz není abstraktní strukturou, ale hierarchií pojmů vyčtenou z tabulky.

Inspiraci hledal v pragmatické filozofii Charlese S. Peirce a v tradici pojmové logiky; matematické jádro oboru rozpracoval s darmstadtským kolegou Berndem Ganterem (jejich monografie vyšla německy 1996, anglicky 1999 a je dodnes základní referencí). Kolem Darmstadtu vyrostla celá škola a konceptuální analýza si našla aplikace od průzkumu dat po lingvistiku; Wille sám ji rád uplatňoval i v matematické teorii hudby.

Stupňovanou verzi rozpracovali koncem 90. let Silke Pollandt v Darmstadtu a Radim Bělohlávek v Olomouci – právě jeho pojetí, vybudované nad residuovanými svazy, jsme následovali v této kapitole.

Příklad 10.3

Nechť $L = \{0, 0.5, 1\}$ je tříprvkový Łukasiewiczův řetězec ($0.5 \otimes 0.5 = 0$, $0.5 \to 0.5 = 1$, $1 \to 0.5 = 0.5$), $X = \{o_1, o_2\}$, $Y = \{a, b\}$ a

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejme pojem vygenerovaný objektem o_1, tedy **L**-množinou $A_0 = \{{}^1/o_1\}$:

$$A_0^{\uparrow} = \{{}^1/a,\ {}^{0.5}/b\}, \qquad A_0^{\uparrow\downarrow} = \{{}^1/o_1,\ {}^{0.5}/o_2\}.$$

(Například $A_0^{\uparrow\downarrow}(o_2) = (1 \to 0.5) \wedge (0.5 \to 1) = 0.5$.) Dvojice $\langle \{{}^1/o_1,\ {}^{0.5}/o_2\},\ \{{}^1/a,\ {}^{0.5}/b\} \rangle$ je formální pojem: „věci, které jsou a“ – objekt o_2 mezi ně patří ve stupni 0.5 a atribut b je pro ně charakteristický ve stupni 0.5.

Věta 10.4: pojmový svaz

$\mathcal{B}(X, Y, I)$ s uspořádáním $\leq$ je úplný svaz, zvaný pojmový svaz kontextu $\langle X, Y, I \rangle$. Infima a suprema jsou dána předpisy

$$\bigwedge_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \Big\langle \bigcap_j A_j,\ \big(\bigcup_j B_j\big)^{\downarrow\uparrow} \Big\rangle,$$
$$\bigvee_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \Big\langle \big(\bigcup_j A_j\big)^{\uparrow\downarrow},\ \bigcap_j B_j \Big\rangle.$$

Důkaz

Extenty jsou přesně pevné body **L**-uzávěrového operátoru $^{\uparrow\downarrow}$ (je-li $\langle A, B \rangle$ pojem, je $A^{\uparrow\downarrow} = B^{\downarrow} = A$; je-li naopak $A = A^{\uparrow\downarrow}$, je $\langle A, A^{\uparrow} \rangle$ pojem podle bodu (3) předchozí věty). Podle věty o korespondenci z kapitoly 6 jsou proto uzavřeny na průniky: $\bigcap_j A_j$ je extent a $\langle \bigcap_j A_j, (\bigcap_j A_j)^{\uparrow} \rangle$ je pojem. Je to zjevně největší pojem, jehož extent leží pod všemi A_j – tedy infimum. Vzorec pro jeho intent: šipky převracejí sjednocení na průniky, $(\bigcup_j B_j)^{\downarrow} = \bigcap_j B_j^{\downarrow} = \bigcap_j A_j$ (cvičení 2), takže $(\bigcap_j A_j)^{\uparrow} = (\bigcup_j B_j)^{\downarrow\uparrow}$.
Máme tedy úplný infimový polosvaz s největším prvkem $\langle X, X^{\uparrow} \rangle$, kde X značí plnou **L**-množinu objektů (infimum prázdného systému); suprema pak existují automaticky (supremum systému je infimum množiny všech jeho horních mezí) a duální výpočet s intenty dá uvedený vzorec.

Poznámka: hlavní věta konceptuální analýzy

Věta 10.4 je polovinou tzv. *hlavní věty o pojmových svazech*. Druhá polovina charakterizuje, *které* úplné svazy jsou (až na izomorfismus) pojmovými svazy nějakého **L**-kontextu, pomocí vhodných podmínek hustoty – v ostrém případě je to

klasický výsledek Willeho, stupňovanou verzi dokázal Bělohlávek (Annals of Pure and Applied Logic 128, 2004). Její znění i důkaz přesahují rámec tohoto textu.

10.3 Souvislosti a užití

Podobnost z dat. Kontext $\langle X, Y, I \rangle$ přiřazuje každému objektu x řádek tabulky $I(x, \cdot) \in L^Y$. Leibnizova **L**-ekvivalence z kapitoly 7 pak z tabulky vyrobí podobnost objektů

$$(x \approx_I x') = \bigwedge_{y \in Y} \big(I(x,y) \leftrightarrow I(x',y)\big) :$$

dva objekty jsou si podobné do té míry, do jaké se shodují ve všech atributech. Pojmový svaz a podobnost jsou tak dvě tváře téže tabulky; extenty pojmů jsou vzhledem k $\approx_I$ extenzionální (cvičení 5).

Užití. Pojmové svazy slouží k přehledovému zobrazení a dolování znalostí z tabulkových dat: každý uzel svazu je přirozený „shluk“ objektů se společným popisem a hrany zachycují hierarchii obecnějších a speciálnějších pojmů. Ve fuzzy podobě navíc tabulka nemusí být černobílá – stupně dovolují zachytit „spíše ano“ a „tak napůl“. Velikost pojmového svazu ovšem může s daty růst exponenciálně; algoritmy pro jeho výpočet a redukci jsou samostatnou kapitolou oboru.

Cvičení

1. Dokažte, že pro formální pojmy $\langle A_1, B_1 \rangle$ a $\langle A_2, B_2 \rangle$ platí $A_1 \subseteq A_2$, právě když $B_2 \subseteq B_1$.
2. Dokažte, že šipky převracejí sjednocení na průniky: $(\bigcup_j B_j)^{\downarrow} = \bigcap_j B_j^{\downarrow}$, a obdobně pro $^{\uparrow}$. Ukažte dále, že $(a \otimes B)^{\downarrow} = a \to B^{\downarrow}$ pro každé $a \in L$.
3. Spočítejte všechny formální pojmy ostrého kontextu ($L = \{0,1\}$) s objekty $X = \{o_1, o_2\}$, atributy $Y = \{a, b\}$ a relací $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; nakreslete jeho pojmový svaz.
4. V kontextu z Příkladu 10.3 spočítejte $A^{\uparrow}$ a $A^{\uparrow\downarrow}$ pro $A = \{^{0.5}/_{o_1}\}$ a ověřte, že vzniklá dvojice je formální pojem.
5. Dokažte, že extent každého formálního pojmu je extenzionální vzhledem k podobnosti $\approx_I$ z třetí sekce. (Nápověda: užijte Lemma o biresiduu z kapitoly 7 a vyjádření extentu jako $B^{\downarrow}$.)

6. Doplňte podrobnosti důkazu Věty 10.4 a ověřte v něm uvedený vzorec pro suprema.