Kapitola 11

Agregační operátory

T-normy z kapitoly 3 jsou jen jednou z rodin funkcí, jimiž se v praxi slučují stupně. Při vícekriteriálním rozhodování často nechceme ani přísnou konjunkci, v níž rozhoduje nejslabší kritérium, ani velkorysou disjunkci, v níž rozhoduje nejsilnější – ale něco mezi nimi: průměry a jejich zobecnění. V této kapitole pracujeme na $L = [0, 1]$ a slučovací funkce popíšeme jako celek.

11.1 Agregační funkce

Definice 11.1: agregační funkce

Agregační funkce (n-ární, $n \geq 2$) je funkce $\mathrm{A}\colon [0,1]^n \to [0,1]$, která

- je neklesající v každém argumentu,
- splňuje hraniční podmínky $\mathrm{A}(0,\ldots,0) = 0$ a $\mathrm{A}(1,\ldots,1) = 1$.

Agregační funkce se nazývá symetrická, nezávisí-li na pořadí argumentů, a idempotentní, pokud $\mathrm{A}(x,\ldots,x) = x$ pro každé $x \in [0,1]$.

Definice je záměrně velmi volná – zachycuje jen to nejnutnější: lepší vstupy nesmějí dát horší výstup a jednomyslné krajní hodnoty se musí zachovat. Vejdou se do ní t-normy, jejich duální t-konormy, průměry i mnoho dalšího. Kde v této krajině leží idempotentní funkce, říká následující pozorování.

Lemma 11.1

Agregační funkce A je idempotentní, právě když pro všechna $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ platí

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Idempotentním agregačním funkcím se proto říká průměrové.

Důkaz

Označme $m = \min_i x_i$ a $M = \max_i x_i$. Je-li A idempotentní, dává monotonie $m = \mathrm{A}(m, \ldots, m) \leq \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{A}(M, \ldots, M) = M$. Obráceně z nerovností plyne $x \leq \mathrm{A}(x, \ldots, x) \leq x$.

Krajinu tedy můžeme zhruba rozdělit takto: pod minimem leží *konjunktivní* agregace (mezi nimi t-normy), nad maximem *disjunktivní* (t-konormy) a mezi nimi průměrové funkce. T-normy známe; jejich zrcadlové protějšky si teď doplníme.

Definice 11.2: t-konorma

T-konorma je binární operace ∇ na $[0,1]$, která je komutativní, asociativní, neklesající v obou argumentech a má neutrální prvek 0.

Věta 11.2: dualita

Je-li $\otimes$ t-norma, pak předpis

$$a \nabla b = 1 - \big((1-a) \otimes (1-b)\big)$$

definuje t-konormu (a naopak, se zaměněnými rolemi). Dvojici $\langle \otimes, \nabla \rangle$ říkáme duální pár.

Důkaz

Přímočará kontrola: komutativita a asociativita se převodem $a \mapsto 1-a$ zachovají, monotonie se dvojím obrácením také a z neutrality jedničky pro $\otimes$ plyne $a \nabla 0 = 1 - ((1-a) \otimes 1) = a$. (Podrobnosti cvičení 1.)

Duálními protějšky tří základních t-norem jsou:

t-norma	duální t-konorma	
minimum	$\max(a,b)$	(Gödel)
součin ab	$a+b-ab$	(pravděpodobnostní součet)
$\max(0,\ a+b-1)$	$\min(1,\ a+b)$	(Łukasiewicz)

Poznámka: fuzzy komplementy

Dualita používá *standardní komplement* $n(a) = 1-a$. Obecně je fuzzy komplement nerostoucí funkce $n\colon [0,1] \to [0,1]$ s $n(0) = 1$ a $n(1) = 0$; k involutivním komplementům ($n(n(a)) = a$) patří například Sugenova třída $n_\lambda(a) = (1-a)/(1+\lambda a)$ pro $\lambda > -1$. Každý involutivní komplement dává vlastní verzi duality. Pozor: standardní komplement je něco jiného než residuová negace $\neg a = a \to 0$ z kapitoly 2 – ty dvě splývají právě v Łukasiewiczově případě.

11.2 Průměry a OWA operátory

Nejznámější průměrovou agregací je vážený průměr

$$\mathrm{W}_{\mathbf{w}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

s vahami $w_i \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$: váha w_i vyjadřuje důležitost i-tého *kritéria*. Yager v roce 1988 navrhl přiřazovat váhy nikoli kritériím, ale *pořadím* hodnot.

Definice 11.3: OWA operátor

Nechť $\mathbf{w} = (w_1,\dots,w_n)$, $w_i \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$. OWA operátor (*ordered weighted averaging*) s vahami $\mathbf{w}$ je funkce

$$\mathrm{OWA}_{\mathbf{w}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_{\sigma(i)},$$

kde σ je permutace řadící hodnoty sestupně: $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq x_{\sigma(n)}$.

Krajní volby vah dávají známé funkce: $\mathbf{w} = (1,0,\dots,0)$ je maximum, $\mathbf{w} = (0,\dots,0,1)$ minimum a $\mathbf{w} = (\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$ aritmetický průměr; vhodnou volbou dostaneme i medián. Každý OWA operátor je symetrická idempotentní agregační funkce (cvičení 3). Polohu mezi minimem a maximem měří stupeň disjunktivnosti (*orness*)

$$\mathrm{orness}(\mathbf{w}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)\,w_i,$$

který je 1 pro maximum, 0 pro minimum a $\frac{1}{2}$ pro aritmetický průměr.

Příklad 11.3

Uchazeč získal v kritériích odbornost, praxe a jazyky stupně $(0.6,\ 0.9,\ 0.2)$. Hodnotitel používá $\mathbf{w} = (0.5,\ 0.3,\ 0.2)$ – nejvíc váží nejsilnější stránku, ale slabiny nezanedbává. Seřazené hodnoty jsou $(0.9,\ 0.6,\ 0.2)$, takže

$$\mathrm{OWA}_{\mathbf{w}}(0.6,\ 0.9,\ 0.2) = 0.5 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.67,$$

zatímco minimum by dalo 0.2, maximum 0.9 a aritmetický průměr 0.57. Stupeň disjunktivnosti vah je $\mathrm{orness}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(2 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.3) = 0.65$: hodnocení je „spíše optimistické“.

11.3 Kvazi-aritmetické průměry

Aritmetický průměr není jediný rozumný průměr. Obecný recept zní: hodnoty nejprve „přeškáluj“, zprůměruj a výsledek přeškáluj zpět.

Definice 11.4: kvazi-aritmetický průměr

Nechť $\varphi\colon [0,1] \to [-\infty,\infty]$ je spojitá rostoucí funkce a $w_i \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$. Kvazi-aritmetický průměr generovaný funkcí φ je

$$\mathrm{M}_{\varphi,\mathbf{w}}(x_1,\ldots,x_n) = \varphi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i\,\varphi(x_i)\Big).$$

Volba $\varphi(x) = x$ dává vážený aritmetický průměr, $\varphi(x) = \ln x$ geometrický průměr $\prod_i x_i^{w_i}$, $\varphi(x) = 1/x$ harmonický a $\varphi(x) = x^2$ kvadratický. Každý kvazi-aritmetický průměr je symetrická (při stejných vahách) idempotentní agregační funkce (cvičení 8); mezi jmenovanými navíc platí známý řetězec nerovností harmonický $\leq$ geometrický $\leq$ aritmetický $\leq$ kvadratický.

Andrej Kolmogorov a Mitio Nagumo roku 1930 nezávisle dokázali, že spojité, rostoucí, symetrické a idempotentní průměry splňující přirozenou podmínku slučitelnosti různých arit jsou *právě* kvazi-aritmetické průměry. Je to jedna z prvních axiomatických charakterizací v teorii agregace.

Jak moc na volbě agregace záleží, ukazuje malý rozhodovací příklad.

Příklad 11.4: výběrové řízení

Tři uchazeči byli ohodnoceni ve třech kritériích stupni

$$U_1 = (0.6,\ 0.9,\ 0.2), \quad U_2 = (0.5,\ 0.6,\ 0.7), \quad U_3 = (0.9,\ 0.9,\ 0.1).$$

Agregujme minimem, geometrickým a aritmetickým průměrem a optimistickým OWA operátorem s vahami $(0.5,\ 0.3,\ 0.2)$ z Příkladu 11.3:

	min	geometrický	aritmetický	OWA
U_1	0.20	0.48	0.57	0.67
U_2	**0.50**	**0.59**	0.60	0.63
U_3	0.10	0.43	**0.63**	**0.74**

Vítěz (tučně) závisí na zvolené agregaci: opatrná kritéria (minimum, geometrický průměr, který nuly a malé hodnoty tvrdě trestá) vybírají vyrovnaného U_2, kompenzující průměr a optimistické OWA specialistu U_3. Žádný sloupec není „špatně“ – každý odpovídá jiné rozhodovací politice, a tu je třeba zvolit *před* pohledem do tabulky.

11.4 Uninormy a nullnormy

T-normy mají neutrální prvek 1, t-konormy 0. Co když neutrální prvek leží *uvnitř* intervalu? Dostaneme třídu funkcí, které se ke vstupům chovají „obojace“.

Definice 11.5: uninorma, nullnorma

Uninorma je komutativní, asociativní a neklesající operace na $[0,1]$ s neutrálním prvkem $e \in (0,1)$: $x * e = x$. Nullnorma je komutativní, asociativní a neklesající operace na $[0,1]$ s *absorbujícím* prvkem $a \in (0,1)$ ($x * a = a$), která se na $[0,a]$ chová jako t-konorma a na $[a,1]$ jako t-norma.

O struktuře uninorem se ví hodně: na čtverci $[0,e]^2$ se uninorma chová jako (přeškálovaná) t-norma, na $[e,1]^2$ jako t-konorma a na smíšených vstupech leží mezi minimem a maximem (Fodor–Yager–Rybalov 1997; my se spokojíme s příkladem). Interpretovat to lze takto: hodnoty nad e představují kladnou evidenci, hodnoty pod e zápornou; souhlasné vstupy se *posilují* (dvě kladné dají hodnotu vyšší než každá z nich), protichůdné se vyrušují.

Příklad 11.5

Předpis

$$U(x,y) = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

(s konvencí $U(0,1) = U(1,0) = 0$) je uninorma s neutrálním prvkem $e = 0.5$. Vskutku $U(x, 0.5) = \frac{0.5x}{0.5x+0.5(1-x)} = x$; komutativita je zřejmá a asociativitu lze ověřit převodem na sčítání „logaritmických šancí“ $\log \frac{x}{1-x}$. Souhlasné evidence se posilují: $U(0.8, 0.8) = \frac{0.64}{0.64+0.04} \doteq 0.94$, protichůdné se ruší: $U(0.8, 0.2) = 0.5$.

Uninorma z Příkladu 11.5 má svou historii: právě tímto předpisem kombinoval evidenci expertní systém PROSPECTOR (70. léta, vyhledávání ložisek nerostů) a příbuzné kombinování jistot používal lékařský systém MYCIN. Teorii uninorem rozvinuli Yager a Rybalov až v roce 1996 – praxe tu předběhla teorii o dvě desetiletí.

Nejjednodušší nullnorma je useknutý medián $\mathrm{med}(x, y, a)$, viz cvičení 6: malé hodnoty spojuje maximem, velké minimem a výsledek drží u prahu a.

Poznámka: volba agregace je modelovací rozhodnutí

Žádná agregační funkce není „ta správná“. T-normy vyžadují splnění všech kritérií, t-konormy stačí jedno, průměry kompenzují, uninormy posilují souhlas. Volba musí odpovídat povaze úlohy – a je dobré ji umět zdůvodnit, například axiomaticky: mnohé třídy agregačních funkcí jsou charakterizovány malými sadami přirozených podmínek, jak jsme to viděli u t-norem v kapitole 3.

Cvičení

1. Doplňte podrobnosti důkazu Věty 11.2 a ověřte, že duální t-konormou Łukasiewiczovy t-normy je $\min(1, a + b)$.

2. Rozhodněte, které z funkcí min, max, součin, aritmetický průměr a $\mathrm{med}(x, y, 0.5)$ jsou agregační, symetrické, idempotentní.

3. Dokažte, že každý OWA operátor je symetrická idempotentní agregační funkce, a ukažte, že jediný OWA operátor, který je (pro $n = 2$) t-normou, je minimum.

4. Spočítejte $\mathrm{OWA}_{\mathbf{w}}(0.3,\ 0.8,\ 0.5,\ 1)$ pro $\mathbf{w} = (0.4,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.1)$ a určete $\mathrm{orness}(\mathbf{w})$.

5. Ověřte, že U z Příkladu 11.5 je na $[0, 1)^2$ asociativní. (Nápověda: substituce $\ell(x) = \log \frac{x}{1-x}$ převádí U na sčítání.)

6. Dokažte, že $V(x, y) = \mathrm{med}(x, y, a)$ je nullnorma s absorbujícím prvkem a.

7. Spočítejte pro uchazeče z Příkladu 11.4 harmonické průměry a ověřte na těchto datech nerovnost harmonický $\leq$ geometrický $\leq$ aritmetický. Kdo vyhraje?

8. Dokažte, že kvazi-aritmetický průměr $M_{\varphi,\mathbf{w}}$ je pro každou spojitou rostoucí funkci φ agregační funkce a že je idempotentní.