Kapitola 12

Přibližné usuzování

Fuzzy logika v užším smyslu podle Zadeha usiluje o formalizaci *přibližného usuzování*: odvozování s vágními pravidly typu „JE-LI teplota vysoká, PAK ventil hodně přivři“. V této kapitole ukážeme, že jádrem takového odvozování je aparát, který už dávno máme – skládání **L**-relací. Celou cestu od pravidel k číselnému akčnímu zásahu pak projdeme na miniaturním regulátoru topení.

12.1 Veličiny a fuzzy pravidla

Základním pojmem je veličina: dvojice (X, D_X), kde X je jméno a D_X neprázdná množina hodnot – teplota s oborem $[-30, 50]$, věk s oborem $\{0, \ldots, 120\}$, otevření ventilu s oborem $[0, 100]$. Aplikace fuzzy logiky neustále pracují s výrazy tvaru „X je A“, kde A je fuzzy podmnožina D_X – „teplota je vysoká“, „věk je střední“ – a s fuzzy pravidly

$$\text{„JE-LI } X \text{ je } A\text{, PAK } Y \text{ je } B\text{“}$$

pro veličiny (X, D_X) a (Y, D_Y) a fuzzy množiny $A \in L^{D_X}$, $B \in L^{D_Y}$.

Jak pravidlo reprezentovat matematicky? Vztah mezi hodnotami dvou veličin je binární **L**-relace na $D_X \times D_Y$ – a nabízejí se dvě přirozená čtení:

$R^{\text{imp}}_{A \Rightarrow B}(u, v) = A(u) \to B(v)$ (implikační čtení),

$R^{\text{conj}}_{A \Rightarrow B}(u, v) = A(u) \otimes B(v)$ (konjunktivní čtení, Mamdaniho).

Implikační čtení bere pravidlo jako *omezení*: dvojice (u, v) je přípustná do stupně, v němž z $A(u)$ plyne $B(v)$. Konjunktivní čtení

bere pravidlo jako *datový bod*: dvojice je doložená do stupně, v němž je u typickým vstupem a v typickým výstupem. První čtení dává horní odhad skutečného vztahu, druhé dolní – a obě mají v praxi své místo.

12.2 Kompoziční pravidlo inference

Známe-li vztah $R \in L^{D_X \times D_Y}$ mezi veličinami a aktuální (třeba nepřesně známou) hodnotu X popsanou fuzzy množinou $A^* \in L^{D_X}$, co můžeme říct o Y? Zadehovo kompoziční pravidlo inference (*compositional rule of inference*, CRI) odpovídá:

$$B^* = A^* \circ R, \qquad \text{tj.} \qquad B^*(v) = \bigvee_{u \in D_X} \big(A^*(u) \otimes R(u,v)\big),$$

kde A^* čteme jako unární relaci. CRI je tedy obraz fuzzy množiny při relaci – skládání z kapitoly 4 – a jeho základní vlastnosti plynou přímo odtud.

Věta 12.1: vlastnosti CRI

Nechť $A, A^* \in L^{D_X}$, $B \in L^{D_Y}$ a $R \in L^{D_X \times D_Y}$.

1. CRI je monotonní: z $A_1^* \subseteq A_2^*$ a $R_1 \subseteq R_2$ plyne $A_1^* \circ R_1 \subseteq A_2^* \circ R_2$.
2. Pro implikační čtení platí $A \circ R^{\mathrm{imp}}_{A \Rightarrow B} \subseteq B$; je-li A normální, nastává rovnost.
3. Pro konjunktivní čtení platí $A \circ R^{\mathrm{conj}}_{A \Rightarrow B} \subseteq B$; je-li A normální, nastává rovnost.

Důkaz

(1) je monotonie skládání z kapitoly 4.
(2) Pro každé v je $\big(A \circ R^{\mathrm{imp}}\big)(v) = \bigvee_u A(u) \otimes (A(u) \to B(v)) \le B(v)$ – každý člen je „modus ponens“ a nepřesáhne $B(v)$. Je-li A normální, zvolme u_0 s $A(u_0) = 1$; příslušný člen je $1 \otimes (1 \to B(v)) = B(v)$, takže supremum je přesně $B(v)$.
(3) Podle distributivity je $\big(A \circ R^{\mathrm{conj}}\big)(v) = \big(\bigvee_u A(u)^2\big) \otimes B(v) \le B(v)$ a pro normální A je $\bigvee_u A(u)^2 = 1$.

Věta říká, že na *přesně odpovídajícím* vstupu ($A^* = A$) vydají obě čtení závěr B – pravidlo funguje, jak má. Rozdíl se projeví na vstupech částečně odpovídajících. Pro ostrý vstup $A^* = \{1/u_0\}$ vyjde

$$B^*(v) = A(u_0) \to B(v) \qquad \text{resp.} \qquad B^*(v) = A(u_0) \otimes B(v) :$$

implikační čtení závěr *rozšíří* (naředí ho směrem k „nevím“, tedy k celé D_Y), konjunktivní ho *sníží* (utlumí jeho stupně). Dodejme ještě robustnost: protože skládání zachovává podobnost (kapitola 7), je

$$(A_1^* \approx A_2^*) \otimes (R_1 \approx R_2) \leq (A_1^* \circ R_1) \approx (A_2^* \circ R_2)$$

– podobné vstupy a podobná pravidla vedou na podobné závěry. Pro regulátor, jehož vstupy pocházejí z měření, je to podstatné.

12.3 Fuzzy regulátor

Fuzzy regulátor je předpis, který z naměřené hodnoty vstupní veličiny vyrobí akční zásah pomocí báze pravidel

$$\text{JE-LI } X \text{ je } A_i, \text{ PAK } Y \text{ je } B_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Výpočet probíhá ve třech krocích:

1. Fuzzifikace: naměřenou hodnotu $u_0 \in D_X$ reprezentujeme fuzzy množinou A^* (nejčastěji ostrým singletonem $\{1/u_0\}$).
2. Inference: bázi pravidel složíme do jediné relace, konjunktivně nebo implikačně,

   $$R^{\text{MAMD}} = \bigcup_i (A_i \otimes B_i) \qquad \text{či} \qquad R^{\text{RULES}} = \bigcap_i (A_i \to B_i),$$

   a spočítáme $B^* = A^* \circ R$.
3. Defuzzifikace: fuzzy závěr B^* převedeme na jedinou hodnotu $v_0 \in D_Y$. Nejužívanější je těžiště (*center of gravity*, na konečném oboru)

   $$v_0 = \frac{\sum_{v \in D_Y} v \cdot B^*(v)}{\sum_{v \in D_Y} B^*(v)},$$

   alternativou střed maxim (průměr hodnot s maximálním stupněm).

Sjednocení v R^{MAMD} čteme „ozve se každé pravidlo, které se vstupu aspoň trochu týká“; průnik v R^{RULES} čteme „všechna pravidla současně omezují“. Mamdaniho konjunktivní varianta převládá v regulaci, implikační je věrnější logickému čtení pravidel.

První fuzzy regulátor sestavili Ebrahim Mamdani a jeho doktorand Sedrak Assilian v polovině 70. let na Queen Mary College v Londýně: řídili jím laboratorní parní stroj a pravidla získali od zkušeného operátora. Mamdani (1942–2010), rodák z Tanzanie a pozdější profesor Imperial College, se proslavil právě tímto „vedlejším“ experimentem – konjunktivní čtení pravidel dnes nese jeho jméno. Od 80. let fuzzy regulátory pronikly do průmyslu i spotřební elektroniky (vzpomeňme okrajovou poznámku o Japonsku v kapitole 1).

Příklad 12.2: miniregulátor topení

Zvolme Gödelovu strukturu na $[0,1]$ (tj. $\otimes = \wedge = \min$; dostaneme klasický Mamdaniho regulátor max–min). Tep-

lota má obor $D_X = \{15, 20, 25\}$ (°C), otevření ventilu $D_Y = \{0, 50, 100\}$ (%). Pravidla:

JE-LI teplota nízká, PAK ventil otevřený;
JE-LI teplota vysoká, PAK ventil zavřený,

kde

$$N = \{^{1}/15,\ ^{0.5}/20\}, \qquad O = \{^{0.5}/50,\ ^{1}/100\},$$
$$H = \{^{0.5}/20,\ ^{1}/25\}, \qquad Z = \{^{1}/0,\ ^{0.5}/50\}.$$

Relace $R^{\mathrm{MAMD}} = (N \otimes O) \cup (H \otimes Z)$ vyjde tabulkou

R^{MAMD}	0	50	100
15	0	0.5	1
20	0.5	0.5	0.5
25	1	0.5	0

Naměříme-li teplotu 15, dá CRI se singletonem $B^* = R^{\mathrm{MAMD}}(15, \cdot) = \{^{0.5}/50,\ ^{1}/100\}$ a těžiště

$$v_0 = \frac{50 \cdot 0.5 + 100 \cdot 1}{0.5 + 1} \doteq 83:$$

topíme naplno, jen mírně brzděni opatrným pravidlem. Při teplotě 20 je $B^* = \{^{0.5}/0,\ ^{0.5}/50,\ ^{0.5}/100\}$ a těžiště $v_0 = 50$ – obě pravidla se ozvala stejně a výsledek je kompromis.

12.4 Vícerozměrné vstupy a Takagi–Sugenovy systémy

Skutečný regulátor málokdy vystačí s jedinou vstupní veličinou – topení řídíme podle teploty a její změny. Pravidla pak mají tvar

„JE-LI X_1 je A_1 a X_2 je A_2, PAK Y je B“

a na náš aparát se převedou snadno: dvojici veličin (X_1, X_2) chápeme jako jedinou veličinu s oborem $D_{X_1} \times D_{X_2}$ a antecedent jako fuzzy množinu na něm, obvykle $(A_1 \times A_2)(u_1, u_2) = A_1(u_1) \wedge A_2(u_2)$ (používá se i $\otimes$). Pro ostrý vstup (u_1, u_2) je pak stupeň aktivace pravidla $A_1(u_1) \wedge A_2(u_2)$ a vše ostatní běží jako dosud.

Druhou velkou rodinu fuzzy systémů navrhli Tomohiro Takagi a Michio Sugeno (1985). Takagi–Sugenův systém ponechává fuzzy antecedenty, ale konsekventy nahrazuje obyčejnými funkcemi:

$$\text{JE-LI } X \text{ je } A_i, \text{ PAK } y = f_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

a výstup pro ostrý vstup x počítá jako vážený průměr

$$y(x) = \frac{\sum_i A_i(x)\, f_i(x)}{\sum_i A_i(x)}.$$

Odpadá tím celá defuzzifikace – výstup je číslo rovnou – a systém lze číst jako *plynulé přepínání* mezi jednoduchými (typicky lineárními) zákony řízení: kde platí A_i naplno, vládne f_i, na přechodech se zákony prolnou.

Příklad 12.3

Na oboru $[0, 6]$ uvažujme pravidla „JE-LI x malé, PAK $y = 2x$“ a „JE-LI x velké, PAK $y = x + 3$“, kde „malé“ (M) klesá lineárně z 1 v bodě 0 na 0 v bodě 4 a „velké“ (V) roste lineárně z 0 v bodě 2 na 1 v bodě 6. Pro $x = 2$ je $M(2) = 0.5$, $V(2) = 0$, takže $y(2) = f_1(2) = 4$: vládne první zákon. Pro $x = 3$ je $M(3) = V(3) = 0.25$ a $y(3) = \frac{6+6}{2} = 6$ – oba zákony se v bodě 3 shodují, takže přechod je hladký. Výsledná funkce $y(x)$ spojitě interpoluje mezi přímkami $2x$ a $x + 3$.

Poznámka: proč se používají

Takagi–Sugenovy systémy dnes v průmyslu převažují: výstup se počítá levně, lineární konsekventy se dají identifikovat z dat metodami lineární regrese a po vrstvách se z nich staví i neuro-fuzzy systémy. S dostatečně jemnou bází pravidel navíc fuzzy systémy (Mamdaniho i Takagi–Sugenovy) aproximují libovolnou spojitou funkci na kompaktu s libovolnou přesností – tzv. věty o univerzální aproximaci z 90. let.

Poznámka: co jsme vynechali

Skutečné regulátory mají spojité obory, desítky pravidel a pečlivě laděné tvary fuzzy množin; jádro výpočtu je ale přesně to předvedené. Nedokazovali jsme také, že jde o korektní *logické* odvozování; tomu je věnována kapitola 7 Hájkovy knihy [Hájek98] a skripta předmětu KMI/FUZ, kde se CRI analyzuje prostředky predikátové fuzzy logiky.

Cvičení

1. V Příkladu 12.2 spočítejte B^* a těžiště pro naměřenou teplotu 25.
2. Pro tutéž bázi pravidel sestavte implikační relaci $R^{\text{RULES}} = (N \to O) \cap (H \to Z)$ (nad Gödelovou strukturou), spočítejte

závěry pro teploty 15, 20 a 25 a porovnejte s konjunktivní variantou.

3. Doplňte podrobnosti důkazu Věty 12.1: proč v bodě (3) platí $\bigvee_u (A(u)^2 \otimes B(v)) = (\bigvee_u A(u)^2) \otimes B(v)$ a proč pro normální A je $\bigvee_u A(u)^2 = 1$?

4. Odvoďte nerovnost o robustnosti CRI z věty o zachovávání podobnosti z kapitoly 7.

5. V Příkladu 12.2 určete pro teploty 15 a 20 výsledek defuzzifikace středem maxim a srovnejte s těžištěm. Kdy dávají obě metody stejný výsledek?

6. Rozšiřte miniregulátor o pravidlo „JE-LI teplota střední, PAK ventil pootevřený“ s vhodně zvolenými fuzzy množinami a přepočítejte závěr pro teplotu 20.

7. V Takagi–Sugenově systému z Příkladu 12.3 spočítejte výstupy pro $x = 1$, $x = 2.5$ a $x = 5$.

8. Pravidlo „JE-LI teplota nízká a vlhkost vysoká, PAK ...“ vyhodnocujeme pro teplotu se stupněm $N = 0.5$ a vlhkost se stupněm $V = 0.8$. Určete stupeň aktivace antecedentu při čtení $\wedge$ a při čtení $\otimes$ (nad standardní Łukasiewiczovou algebrou) a rozmyslete, čím se obě čtení liší pro pravidla s mnoha podmínkami.

Kapitola 13

Výhled

Závěrečná kapitola krátce představí čtyři směry, kterými teorie fuzzy množin pokračuje za rámec tohoto textu, a na závěr odpoví na nejčastější praktickou otázku: odkud se vlastně berou stupně příslušnosti. O systematický výklad nejde; jde jen o ukazatele, kudy se vydat dál.

13.1 Fuzzy shlukování

Shluková analýza hledá v datech skupiny podobných objektů. Klasické algoritmy přiřazují každý bod právě jednomu shluku – a u bodů na rozhraní tím zahazují informaci. Fuzzy shlukování přiřazuje body shlukům ve stupních: nejznámější algoritmus fuzzy c-means (Bezdek, 1981) hledá pro body $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$ středy shluků $v_1, \ldots, v_c$ a stupně příslušnosti $u_{ik} \in [0,1]$ minimalizací účelové funkce

$$J_m = \sum_{i=1}^{c} \sum_{k=1}^{N} u_{ik}^{m} \, \|x_k - v_i\|^2 \qquad \text{za podmínky } \sum_{i=1}^{c} u_{ik} = 1,$$

kde parametr $m > 1$ (*fuzzifikátor*) řídí míru „rozmazání“. Minimalizuje se střídavě: při pevných stupních vyjdou středy jako vážené průměry bodů, při pevných středech se stupně rozdělí nepřímo úměrně vzdálenostem ke středům; obě aktualizace se opakují do ustálení. Výsledné sloupce $(u_{1k}, \ldots, u_{ck})$ jsou fuzzy množiny shluků – a měkké hranice mezi shluky jsou často věrnějším obrazem dat než ostré řezy. Souvislost s naší relační teorií je přitom těsná: matice stupňů indukuje Leibnizovu podobnost bodů (kapitola 7) a shlukování lze obráceně chápat jako hledání $\mathbf{L}$-ekvivalence dobře aproximující danou podobnost.