Dolní omezení délky rezolučního zamítnutí

Tvrzení 1: Nechť R je rezoluční zamítnutí formule F. Nechť ℓ je literál vyskytující se v F. Potom existuje resoluční zamítnutí R' formule $F\{\ell=1\}$, jehož klausule neobsahují $\ell, \bar{\ell}$ a $|R'| \leq |R| - |F_\ell|$, kde F_ℓ je množina klauzulí formule F, které neobsahují ℓ.

Důkaz: Nechť $R = C_1, \dots, C_t = \square$, $R' = C_1', \dots, C_t'$

Postupnost R' vytvoříme tak, že pro každou $C_i \in R$ vytvoříme C_i', nebo C_i' vynecháme ~~(tj. do R' dáváme postupně C_i', případně R' neobsahuje upravenou C_i').~~ ~~Bude platit~~ Pokud C_i' není vynechána, bude platit $C_i' \subseteq C_i$. ~~Pro Kaz tlaše~~ Navíc R' bude resoluční zamítnutí, tj. $C_i' \in F\{\ell=1\}$, nebo je získána pomocí resolučního kroku z předchozích klausulí v R'.

Pokud $C_i' \subseteq C_i$, pro každé α máme: $C_i'\alpha = 1$ implikuje $C_i\alpha = 1$.
Protože $C_t' \subseteq C_t = \square$, končí R' prázdnou klausulí.

Pravidla úprav: [Předp., že už máme $C_1', \dots, C_{i-1}'$]

1. Pokud $C_i \in F$ a $\ell, \bar{\ell} \notin C_i$, pak $C_i' = C_i$
2. Pokud $C_i \in F$ a $\bar{\ell} \in C_i$, pak $C_i' = C_i - \{\bar{\ell}\}$
3. Pokud $\ell \in C_i$, je C_i' vynechána
4. Pokud $C_i = r(y, C_j, C_k)$, $C_j', C_k' \in R'$ a $y \in C_j$, $\bar{y} \in C_k$. Potom $C_i' = r(y, C_j', C_k')$.
5. Pokud $C_i = r(y, C_j, C_k)$, $C_j', C_k' \in R'$ a $y \notin Var(C_j')$. Potom $C_i' = C_j'$.
6. Pokud $C_i = r(y, C_j, C_k)$; $C_j' \notin R'$, protože byla vynechána v kolu 3.
   Tedy $\ell \in C_j$ a $\ell \notin C_i$ (jinak bychom skončili v kroku 3). Musíme tedy mít $y \in Var(\ell)$.
   Proto $\bar{\ell} \in C_k$ a $\bar{\ell} \in C_k'$; Buď $\bar{\ell}$ vypadlo z C_k v kroku 2, pokud $C_k \in F$; nebo jeden z předků C_k obsahoval $\bar{\ell}$, ale to vypadlo v kroku 2 pro tohoto předka.
   Nastavíme $C_i' = C_k'$.

Po provedení úprav z R' vynecháme opakující se klausule. Všechny vynechané klausule i ty, které jsme vyhodili při odstraněním opakujících se klausulí, korespondují s klausulí obsahující v R literál ℓ.

$\boxtimes$

Označíme $[n] = \{1, 2, \dots n\}$.

Dirichletův princip: Neexistuje bijekce mezi $[n]$ a $[n-1]$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Populárně: $[n]$ … holuby
$[n-1]$ … díry v holubníku

n holubů se nedá přiřadit $n-1$ dírám tak, aby v každé byl nejvýše jeden.

$\Rightarrow$ Pigeon-hole principle.

každé přiřazení holubů do n-1 děr můžeme zachytit do matice

$$\begin{array}{c|c} & \text{Díry} \\ \hline \text{Holubi} & \begin{bmatrix} \quad & & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

řádek i, sloupec j = $\begin{cases} 1 & \text{holub } i \text{ je v díře } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Na každém řádku alespoň jedna hodnota 1: každý holub je někde
v každém sloupci je nejvýše jedna 1: v díře nejvýše jeden holub

V matici si představíme proměnné: x_{ij} (pro $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n-1$)

Pro $i = 1, \dots, n$ uvažme formuli: $P_i = \bigvee_{j=1}^{n-1} x_{ij}$

Pro $j = 1, \dots, n-1$ uvažme formuli: $H_j = \bigwedge_{i \neq i'} (\overline{x_{ij}} \vee \overline{x_{i'j}})$

$$PH_n = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} P_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n-1}\right) H_j$$

Formule PH_n je splnitelná pk. můžeme n holubů dát do $n-1$ děr. Je to kontradikce.

Intuitivně: přiřazením jednoho holuba do jedné díry dostaneme problém s o jednoho méně holuby. (odebereme jednoho holuba a jednu díru).

Formálně: pro ohodnocení $\alpha = \{x_{ij} = 1;\ x_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i,\ x_{ij'} = 0$ pro $j' \neq j\}$ ozn. $SET(x_{ij} = 1)$

platí (po případném přečíslování indexů u proměnných), ~~případn~~

$$PH_n\alpha = PH_{n-1}.$$

def: Ohodnocení α je k-kritické, pokud $P_k\alpha = 0$, ale $(PH_n - P_k)\alpha = 1$.
[Intuice: každý z holubů $[n] - \{k\}$ je právě v jedné díře]

pozorování: Nechť α je k-kritické ohodnocení. Pokud pro ~~ohodnocení~~ $k' \neq k$ a $\forall j \in [n-1]$ prohodíme ohodnocení x_{kj} a $x_{k'j}$, dostaneme k'-kritické ohodnocení, $\alpha' = \text{switch}(\alpha, k, k')$.
Přitom existuje $l \in [n-1]$ tak, že $(x_{k'l})\alpha = 1$ a $(x_{k'l})\alpha' = 0$; $(x_{kl})\alpha = 0$ a $(x_{kl})\alpha' = 1$.

Obrázek:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} \quad\quad & l & \quad\quad \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} k \\ \\ k' \end{array} & \begin{bmatrix} 000\ldots & 0 & \ldots 000 \\ & & \\ 000\ldots & 1 & \ldots 000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nechť C je klausule. Potom C^+ je klausule, kterou dostaneme z C tak, že výskyt každého literálu $\overline{x_{ij}}$ (tj. negativního) nahradíme literály $x_{i'j}$ pro $i \neq i'$. C^+ je tzv. rozšířená klausule. C^+ je rozšíření C.

Pozorování: Pro kritické ohodnocení α a libovolnou klausuli C platí: $C\alpha = 1$ pk $C^+\alpha = 1$.

Důkaz:

Označme $\mathbf{X}_{ij} = \bigvee \{ x_{i'j} \mid i' \neq i \}$.

~~pokud $\alpha(x_{ij}) = 1$, potom Pokud $C\alpha = 0$ ...~~

Pokud $C\alpha = 0$, máme $\alpha(\overline{x_{ij}}) = 0$ a tedy $\alpha(x_{ij}) = 1$. Odtud $\mathbf{X}_{ij}\alpha = 0$, protože v každé díře může být nejvýše jeden holub (důsledek Fk' H_i).

Pokud $C\alpha = 1$ a $(\overline{x_{ij}})\alpha = 1$, pak $\alpha(x_{ij}) = 0$ a $\mathbf{X}_{ij}\alpha = 1$, protože v každé díře musí být alespoň jeden holub (důsledek ~~předpokladu~~ $(H_n - P_k)\alpha = 1$.).

∎

Tvrzení 2 Každé resoluční zamítnutí PH_n obsahuje klausuli C tak, že $|C^+| > \frac{2n^2}{9}$

Důkaz: Nechť $BAD(C) = \{ k \mid \text{ex. } k\text{-kritické ohodnocení } \alpha \text{ tak, že } C\alpha = 0 \}$.

Hned vidíme, $|BAD(P_i)| = 1$ pro všechna $i \in [1,n]$; $|BAD(H_j)| = 0$ pro všechna $j \in [n-1]$; $|BAD(\square)| = n$. Dále $|BAD(r(y, C_1, C_2))| \leq |BAD(C_1)| + |BAD(C_2)|$ platí pro všechny klausule C_1, C_2 a proměnnou y: toto plyne z korektnosti rezoluce.

Tedy v každém rezolučním zamítnutí existuje klauzule C tak, že

(1) $$\frac{n}{3} < |BAD(C)| \leq \frac{2n}{3}$$

Vybereme $i \in BAD(C)$ a $j \notin BAD(C)$ a i-kritické ohodnocení α tak, že $C\alpha = 0 = C^+\alpha$.
Pro $\alpha' = \text{switch}(\alpha, i, j)$ dostaneme $C\alpha' = C^+\alpha' = 1$. Protože C^+ obsahuje pouze pozitivní ~~proměnné~~ literály, musí existovat právě jedna proměnná, která je α' ohodnocena nově na 1; je to x_{ik}, kde $k \in [n-1]$ je takové, že $\alpha(x_{jk}) = 1$: víme tak, že $x_{ik} \in C^+$.

Konstrukci z předchozího odstavce zopakujeme pro všechny dvojice (i,j) $i \in BAD(C)$, $j \notin BAD(C)$: vždy dostaneme unikátní proměnnou která je v C^+. Pro fixní i a měnící se j dostáváme různá x_{ik}, α je totiž kritické ohodnocení.

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} k_1 & k_2 \end{matrix} \\
\begin{matrix} \vdots \\ i \\ j_1 \\ j_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & \vdots \\ \vdots & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

← kritické ohodnocení: mimo řádek i (samé 0) je v každém řádku i sloupci jedna 1.

Máme tak tedy $|C^+| \geq |BAD(C)| \cdot (n - |BAD(C)|) \geq \frac{2n^2}{9}$

∎

Věta 1 Délka resolučního zamítnutí PH_n je ~~exp. závislá na n~~ ji alespoň exponenciálně dlouhá vzhledem k n

Důkaz: Uvažujme resoluční zamítnutí R.

Klauzuli $C \in R$ označíme za velkou, pokud $|C^+| \geq \frac{n^2}{10}$.

Předp. že R obsahuje S velkých klausulí (představme si S závislé na n)

~~Těchto~~ Rozšíření S klausulí obsahuji dohromady alespoň $\frac{n^2}{10} \cdot S$ literálů, tj. existuji proměnná, která se vyskytuje v alespoň $S/10$ z nich. Označme ji x_{ij}.

Nechť $\alpha = SET(x_{ij} = 1)$ [viz strana 2]

Podle tvrzení 1 existuje resoluční zamítnutí R' fle $PH_n \alpha = PH_{n-1}$, které obsahuje nejvýše $9/10\ S$ velkých klausulí ($1/10\,S$ odpadne ohodnocením $x_{ij} = 1$)

Předchozí krok zopakujeme $\sim \log_{10/9} S$ krát a dostaneme rezoluční zamítnutí R'' fle $PH_{n'}$ ($n' \leq n - \log_{10/9} S$) bez velkých klausulí.

Podle Tvrzení 2 tak máme

$$\frac{2n'^2}{9} < \frac{n^2}{10}$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{2 \cdot (n - \log_{10/9} S)^2}{9} < \frac{n^2}{10}$$

Odkud odvodíme [technická část ji vynechána], že S ji exponenciální fce.

Ověřit to můžeme např. tak, že uvážíme nerovnost $\frac{2(n - c \cdot n)^2}{9} < \frac{n^2}{10}$.

Promítne se to potom do exp. fce $(10/9)^{c \cdot n}$.