Rezoluce

def: [resoluční pravidlo]

Nechť C_1, C_2 jsou klausule a x je proměnná taková, že $x \in C_1$, $\bar{x} \in C_2$.

Potom resolučním pravidlem odvodíme klausuli $r(x, C_1, C_2) = (C_1 - \{x\}) \cup (C_2 - \{x\})$,

které říkáme resolventa; klausule C_1, C_2 označujeme jako rodiče resolventy.

(při použití $r(x, C_1, C_2)$ budeme předpokládat, že x, C_1, C_2 splňují nutný předpoklad z 1. řádku)

Tvrzení Pro každé ohodnocení α platí pokud $(C_1 \wedge C_2)\alpha = 1$, pak $r(x, C_1, C_2)\alpha = 1$.

Důkaz: Pokud $(C_1 \wedge C_2)\alpha = 1$, pak α splní aspoň jeden literál v obou klausulích, přičemž to není ~~v obou klausulích literál proměnné x~~ dvojice literálů x_1 a $\bar{x}_1$.

Jeden z pravdivých literálů tedy zůstane v $r(x, C_1, C_2)$.

∎

def: Nechť F je formule. Rezoluční zamítnutí F je posloupnost klausulí

$$R = C_1, C_2, \dots, C_t = \square$$

(□ je speciální značení pro prázdnou klausuli $\emptyset$)

taková, že pro $i = 1, 2, \dots, t$ je buď $C_i \in F$, nebo $C_i = r(x, C_j, C_k)$ pro $j, k < i$.

Délka resolučního zamítnutí je $t - |F|$ (tedy předpokládáme, že klausule z F dáme na začátek posloupnosti.)

Př. $F = (x \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z)$

Potom resolučním zamítnutím je [vynecháme klausule F na začátku]

$r(z, (x \vee \bar{z}), (x \vee y \vee z)) = (x \vee y)$,

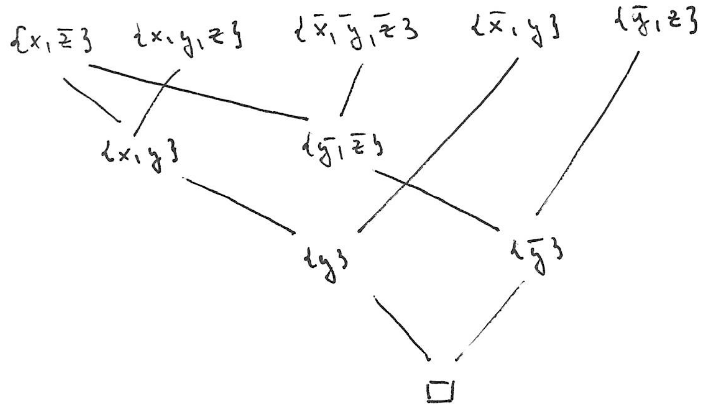
$r(x, (x \vee \bar{z}), (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})) = (\bar{y} \vee \bar{z})$,

$r(x, (x \vee y), (\bar{x} \vee y)) = (y)$

$r(z, (\bar{y} \vee \bar{z}), (\bar{y} \vee z)) = (\bar{y})$

$r(y, (y), (\bar{y})) = \square$

Zachyceno pomocí stromu:



Tvrzení 2: [korektnost rezoluce]

Pokud existuje rezoluční zamítnutí F, pak F není splnitelná.

Důkaz:

Nechť $R = C_1, C_2, \dots, C_t = \square$ je rezoluční zamítnutí F.

Pokud $F\alpha = 1$, pak pro $\forall C \in F$ platí $C\alpha = 1$. Z Tvrzení 1 pak (indukcí) plyne, že $C_i\alpha = 1$ pro všechna $i = 1, \dots t$. Ovšem $\square\alpha = 0$ pro všechny α, a tedy ~~F~~ α takové, že $F\alpha = 1$ neexistuje.

∎

Tvrzení 3: Nechť F je formule a u je literál vyskytující se ve formuli F. Nechť R je resoluční zamítnutí $F\{u=1\}$. Potom existuje posloupnost klauzulí R', která odpovídá definici resolučního zamítnutí F, ovšem s tou výjimkou, že může končit klauzulí $\{\bar{u}\}$.

Důkaz: Ke každé klauzuli $C \in F$ existuje v $F\{u=1\}$ klausule $C - \{\bar{u}\}$. V R do takovýchto klausulí doplníme $\bar{u}$ zpět a dostaneme tak začátek R'. Poté v R' děláme resoluční kroky podle R. Když je provést, nevyskytuje se v nich proměnná literálu u. Pouze může v resolventách přibýt literál $\bar{u}$.

∎

Tvrzení 4: Pokud je F nesplnitelná, pak existuje její resoluční zamítnutí.

Důkaz:

Indukce přes $|Var(F)|$.

BASE-CASE: Pokud $|Var(F)| = 1$, je tvrzení triviální: $F = \{\{x\}, \{\bar{x}\}\}$.

INDUCTION STEP: Předp. že tvrzení platí pro menší počet než $|Var(F)| > 1$ proměnných

Z nesplnitelnosti F plyne nesplnitelnost $F\{x=0\}$ a $F\{x=1\}$ pro libovolnou $x \in Var(F)$. Ovšem tyto formule mají o 1 méně proměnných než F a lze aplikovat indukční předpoklad. Nechť R_0 a R_1 jsou resoluční zamítnutí pro $F\{x=0\}$ a $F\{x=1\}$. Aplikujeme tvrzení 3 a dostaneme R_0' a R_1'. Pokud některé z R_0', R_1' končí $\square$, důkaz je hotov. Jinak končí $\{x\}$ a $\{\bar{x}\}$ a jediným rezolučním krokem dostaneme $\square$.

∎

Věta 5 [věta o rezoluci]

Formule F je nesplnitelná právě když existuje její resoluční zamítnutí.

Důkaz: Tvrzení 2 + Tvrzení 4.

∎

Alternativní důkaz Tvrzení 4

Sestrojme množinu G.

1. $G = F$
2. Dokud existují C_1, C_2, x tak, že $r(x, C_1, C_2) \notin G$, nastavíme $G \leftarrow G \cup \{r(x, C_1, C_2)\}$.

Krok 2 jednou musí skončit, protože velikost klausule získané rezolucí je seshora omezená $2 \cdot |Var(F)|$. Řekneme, že G je uzavřená na resoluční kroky, resp. resoluční uzávěr F.

Ukážeme, že pokud $\square \notin G$, pak je F splnitelná. Uděláme to tak, že sestavíme α, které F splní.

1. začneme s α, které neohodnotí žádnou proměnnou
2. vybereme libovolné $x \in Var(G)$.
   Pokud $\{x\} \in G$, pak $\alpha(x) \leftarrow 1$, jinak $\alpha(x) \leftarrow 0$.
3. Nastavíme $G \leftarrow G\{x = \alpha(x)\}$.
4. Opakujeme kroky 2, 3 dokud $G \neq \emptyset$.

Pokud v kroku 2 $\{x\} \in G$, pak $\{\bar{x}\} \notin G$ (jinak by $^{(*)}$ $\square \in G$) a $G\{x=1\} \not\ni \square$, podobně pokud $\{x\} \notin G$ neobsahuje $G\{x=0\}$ klausuli $\square$.
Současně je $G\{x = \alpha(x)\}$ uzavřená na resoluční kroky. Kdyby totiž nebyla, nebyla by uzavřená ani G. Tedy předpoklad (*) výše jsme mohli udělat.

Dále ~~Pokud~~ ~~když~~ $\square \notin G$; ~~znamená to, že~~ právě když neexistuje resoluční zamítnutí F. Tj. pokud neexistuje resoluční zamítnutí F, je F splnitelná.

⊠

Př: $F = \{\{x\}, \{\bar{x}, z\}, \{\bar{x}, y, z\}, \{\bar{y}, \bar{z}\}\}$

$$G = F \cup \{\{z\}, \{y, z\}, \{\bar{x}, \bar{y}\}, \{\bar{x}, z, \bar{z}\}, \{\bar{x}, y, \bar{y}\}, \{\bar{y}\}, \{z, \bar{z}\}, \{y, \bar{y}\}, \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}\}$$

1. $\alpha(x) = 1$, $G\{x=1\} = \{\{z\}, \{y, z\}, \{\bar{y}, \bar{z}\}, \{\bar{y}\}, \{z, \bar{z}\}, \{y, \bar{y}\}\}$
2. $\alpha(y) = 0$ $G\{x=1, y=0\} = \{\{z\}, \{z, \bar{z}\}\}$
3. $\alpha(z) = 1$ $G\{x=1, y=0, z=1\} = \emptyset$.

Výše je začátek obecného algoritmu hledání resolučního zamítnutí: můžeme zkonstruovat resoluční uzávěr F a ověřit, zda je v něm $\square$. Obecně můžeme nedeterministicky zkoušet prodlužovat existující posloupnost formulí, což v deterministickém algoritmu simulujeme backtrackingem. Tam lze uplatnit některá zrychlení, např. nemá smysl používat jako rodiče klausuli, která je tautologií. ~~→ všechny její resolventy jsou také tautologie~~.

(Upravíme-li res. pravidlo tak, aby nepoužívalo tautologií, můžeme stejnými důkazy ukázat jeho korektnost a úplnost.) Dále budeme uvažovat resoluci bez tautologií! (jako rodiče či resolvent)

Omezené formy resoluce

Motivace: zmenšení stromu, který musí algoritmus hledající resoluční zamítnutí projít.

def: P-resoluce: jeden z rodičů v ~~ve~~ každém resolučním kroku musí být klausule s pouze pozitivními literály

Lineární resoluce: v resolučním zamítnutí $C_1, C_2, C_3, \dots \square$ platí pro každé $i > 1$, že C_{i-1} je rodičem C_i.

DP-resoluce: Označme $F_x \subseteq F$ ~~obsahující~~ množinu klausulí obsahujících proměnnou x, R_x množinu klausulí, které dostaneme resolucí přes proměnnou x z F_x. Resoluční krok je potom $F \to (F \cup R_x) - F_x$.

DP-resoluční krok je tak vlastně posloupnost klasických resolučních kroků se specifickou vlastností: jsou přes proměnnou x. Navíc v dalších krocích už klauzule s proměnnou x používat nebudeme.

Tvrzení 6: Je-li F nesplnitelná, existuje její resoluční zamítnutí pomocí P-rezoluce.

Důkaz: Indukcí přes $|\mathrm{var}(F)|$.

BASE CASE: Je-li $|\mathrm{var}(F)| = 0$, pak $F = \{\square\}$.

INDUCTION STEP: Z nesplnitelnosti F plyne nesplnitelnost $F\{x=1\}$, $F\{x=0\}$ pro libovolnou proměnnou x.
Do P-resolučního zamítnutí $F\{x=0\}$, které podle indukčního předpokladu existuje, vrátíme literál x, jako v důkazu Tvrzení 3. Pokud získaná posloupnost končí $\square$, důkaz je u konce. Jinak musí končit $\{x\}$. Protože x je pozitivní literál, všechny resoluční kroky v této posloupnosti jsou platné P-resoluční kroky. Na konec posloupnosti postupně přidáme klausule $r(x, \{x\}, C)$ pro $C \in F$. Tím jsou v posloupnosti všechny klausule z $F\{x=1\}$. [všechny klausule z F se tam dostali vrácením literálu x do $F\{x=0\}$]. Na konec potom připojíme P-rezoluční zamítnutí $F\{x=1\}$, čímž jsme získali P-rezoluční zamítnutí F.

■

Tvrzení 7: Je-li F nesplnitelná, existuje její resoluční zamítnutí pomocí DP-resoluce.

Důkaz: Ukážeme, že F je splnitelná, právě když $(F \cup R_x) - F_x$ je splnitelná. Pak protože nesplnitelnost F implikuje nesplnitelnost $(F \cup R_x) - F_x$, musí jednou ~~cesta~~ DP-resoluce odvodit formuli obsahující $\square$.

Splnitelnost $(F \cup R_x) - F$ plyne ze splnitelnosti F díky ~~[illegible]~~ Tvrzení 1.

Předpokládejme, že $((F \cup R_x) - F_x)\alpha = 1$ pro nějaké ohodnocení α.

Za účelem sporu předpokládejme, že $F\alpha = 0$. Potom existuje klauzule

$C \cup \{x\} \in F_x$ taková, že $(C \cup \{x\})\alpha = 0$. [nebo $C' \cup \{\bar{x}\} \in F$ taková, že $(C' \cup \{\bar{x}\})\alpha = 0$. Tento případ vynecháme, dokazuje se analogicky.]

Nechť $F' \subseteq F_x$ je množina klauzulí obsahujících literál $\bar{x}$.

~~Pro každou klauzuli~~

Množina $\{ r(x, C \cup \{x\}, D) \mid D \in F' \}$ je podmnožinou R_x. Podle předpokladu ovšem $R_x\alpha = 1$, a tedy $F'\alpha = 1$.

Z předpokladu $((F \cup R_x) - F_x)\alpha = 1$ plyne $(F - F_x)\alpha = 1$. Z předchozího odstavce víme, že $F'\alpha = 1$. Tvrzení plyne z toho, že $(F_x - F')\{x = 1\} = 1$, a toho, že α neohodnocuje proměnnou x.

☒

Tvrzení 8: Je-li F nesplnitelná, existuje její rezoluční zamítnutí pomocí lineární rezoluce.

Důkaz: Vynecháme.