Dodatek k přednášce *Gaussovy kvadraturní vzorce*

Gaussovy kvadraturní vzorce pro interval $< -1, 1 >$

Soustava polynomů $\{\varphi_n\}$ ortogonálních na intervalu $< -1, 1 >$ s vahou $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ jsou Čebyševovy polynony (1). Vezmeme-li za uzly kvadraturního vzorce jejich kořeny, dostáváme *Čebyšev-Gaussovy kvadraturní vzorce.*

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \qquad \varphi_j(x) = \cos(j \arccos x), \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Kořeny těchto polynomů (a tedy uzly kvadraturního vzorce) jsou dány vztahem

$$x_s = \cos\left(\frac{2s+1}{j}\frac{\pi}{2}\right), \qquad s = 0, 1, \ldots, j-1$$

a váhy $w_s = \frac{\pi}{j}$, $s = 0, 1, \ldots, j-1$. Kvadraturní vzorec má tedy tvar

$$\int_1^{-1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \;\approx\; \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{2i+1}{n}\frac{\pi}{2}\right).$$

Chyba Čebyšev-Gaussova kvadraturního vzorce pro interval $< -1, 1 >$ s n uzly je

$$\frac{\pi f^{(2n)}(\xi)}{2^{2n-1}(2n)!}$$

kde $\xi \in (-1, 1)$.