UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
KATEDRA MATEMATICKÉ INFORMATIKY

NUMERICKÉ METODY - NUMERICKÁ INTEGRACE

Gaussovy kvadraturní vzorce

Prosinec 2000

Jan Outrata
Informatika, III. ročník

Gaussovy kvadraturní vzorce

Newton-Cotesovy kvadraturní vzorce s $n+1$ evidistantními uzly integrují polynomy až do $(n+1)$-ního stupně. Uvažujeme-li ale interpolační kvadraturní vzorce (1) s obecným rozložením uzlů $x_i,\ i=0,1,\ldots,n$ na intervalu $< a,b >$, lze při vhodných x_i zdvojnásobit algebraický řád vzorce na $2n+1$. Uzly x_i musí být kořeny jistých ortogonálních polynomů. Tyto vzorce vyšší přesnosti se potom nazývají *Gaussovy kvadraturní vzorce.*

$$\int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dx \tag{2}$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Vlastnosti Gaussových kvadraturních vzorců

Je dokázáno, že žádný interpolační kvadraturní vzorec s $n+1$ uzly nemůže integrovat přesně všechny polynomy $(2n+2)$-hého stupně.

Gaussovy kvadraturní vzorce mají nejvyšší možný algebraický řád.

Při $n \to \infty$ tvoří konvergentní kvadraturu. Konvergence k přesné hodnotě integrálu je tím rychlejší, čím hladší je funkce f. Konvergece platí i pro po částech spojité funkce.

V tabulkách a na počítačích bývají uchovávány hodnoty koeficientů $w_i^{(0)}$ a $x_i^{(0)}$ pro interval $< -1,1 >$. Pro obecný interval $< a,b >$ použijeme substituci

$$w_i = \frac{b-a}{2} w_i^{(0)}, \qquad x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i^{(0)}, \qquad i=0,1,\ldots,n \tag{3}$$

Uzly x_i jsou rozloženy na $< a,b >$ symetricky a váhy w_i jsou symetrické: $w_i = w_{n-i} > 0,\ i=0,1,\ldots,n$ (vlastnost ortogonálních polynomů).

Gaussovy kvadraturní vzorce pro interval $< -1,1 >$

Soustava polynomů $\{Q_n\}$ ortogonálních na intervalu $< -1,1 >$ s vahou $\omega(x) \equiv 1$ jsou Legendrovy polynony (4). Vezmeme-li za uzly kvadraturního vzorce jejich kořeny, dostáváme *Legender-Gaussovy kvadraturní vzorce.*

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j}[(x^2-1)^j], \qquad j=1,2,\ldots \tag{4}$$

Chyba Legender-Gaussova kvadraturního vzorce pro interval $< -1,1 >$ s $n+1$ uzly je $d_{n+1} f^{2n+2}(\xi)$, kde $\xi \in (-1,1)$, a

$$d_{n+1} = \frac{2^{2n+2}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[2(n+1)!]^3}$$

Gaussovy vzorce se rovněž dají použít ve složených vzorcích. Rozdělíme interval $< a,b >$ na intervaly $< a_j, b_j >,\ j=1,2,\ldots,m,\ (a_1=a, b_m=b, b_j=a_{j+1})$ takové, že $b_j - a_j = h,\ j=1,2,\ldots,m$ [všechny dílčí intervaly mají stejnou délku a $m=(b-a)/h$].

Použijeme-li na každém dílčím intervalu týž Gaussův vzorec s $n+1$ uzly, pak podle (3) dostáváme složený kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_i^{(0)} f\left(a_j + \frac{h}{2} + \frac{hx_i^{(0)}}{2}\right),$$

kde $w_i^{(0)},\ x_i^{(0)},\ i = 0, 1, \ldots, n$ jsou opět koeficienty a uzly pro interval $< -1, 1 >$.

Chyba Gaussova složeného kvadraturního vzorce pro interval $< a, b >$ s $n+1$ uzly je

$$\frac{b-a}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n+2} d_{n+1} f^{2n+2}(\xi),$$

kde $\xi \in < a, b >$.

Použití Gaussových vzorců

Koeficienty a uzly Gaussových kvadraturních vzorců jsou složitější než u vzorců např. Newton-Cotesových, ale zato pro dostatečně hladké funkce dávají při stejné vynaložené práci nejpřesnější výsledek.

Pokud lze odhadnout řád (počet uzlů) pro požadovanou přesnost, je nejlepší použít Gaussovy vzorce, např. pro posloupnost integrálů.

Nelze-li počet kroků odhadnout, postupuje se tak, že se zvyšujeme algebraický řád použitého vzorce až do požadované přesnosti. Protože ale funkční hodnoty použité ve vzorci s méně uzly nelze použít ve vzorci s více uzly, je výpočet pracnější. Proto je lepší pro výpočet hodnoty jednoho integrálu z hladké funkce použít jinou metodu.

Příklad

$$\int_0^{0,8} \frac{sinx}{x} dx$$

Použijeme základní Gaussův kvadraturní vzorec se třemi uzly ($n = 2$). Pomocí kořenů x_i polynomu (4) (pro $j = 3$) vypočteme váhy w_i z (2) (pro interval $< -1, 1 >$) (nebo zjistíme z tabulek či počítače) a obojí transformujeme na interval $< 0; 0, 8 >$ pomocí (3):

i	0	1	2
x_i	$0,0901613323$	$0,4$	$0,7098386677$
w_i	$\frac{20}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{20}{90}$

$$\int_0^{0,8} \frac{sinx}{x} dx \approx \frac{20}{90} f(0,0901613323) + \frac{32}{90} f(0,4) + \frac{20}{90} f(0,7098386677) \doteq 0,7720957994$$

Skutečná hodnota integrálu je:

$$\int_0^{0,8} \frac{sinx}{x} dx \doteq 0,7720957855$$