Teoretická informatika 2
Zápočtové úlohy

Zkratky:
TS Turingův stroj
CFG Bezkontextová gramatika (Context Free Grammar)
KA Konečný automat
NTS Nedeterministický Turingův stroj

Úloha č. 1 [Dvořák J.]
Uvažme TS s přechodovou funkcí tvaru: $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{P, NÁVRAT\}$. Pokyn $NÁVRAT$ je pokynem pro skok čtecí hlavy nad nejlevější políčko pásky. Ukažte, že takto definovaný TS má stejnou výpočetní sílu jako běžný TS.

Úloha č. 2 [Outrata J.]
Dokažte, že následující jazyk je rekurzivní:
$L = \{\langle G\rangle;\ G \text{ je CFG nad } \Sigma = \{0, 1\} \text{ taková, že } \{1\}^* \cap L\{G\} \neq \emptyset\}$.

Úloha č. 3
Nechť C je jazyk. Dokažte, že C je částečně rekurzivní, právě když existuje rekurzivní jazyk D takový, že $C = \{x; \exists y : \langle x, y\rangle \in D\}$.

Úloha č. 4 [Kuchař M.]
Dokažte, že následující jazyk je rekurzivní:
$L = \{\langle M\rangle;\ M \text{ je KA, který přijímá } w^R, \text{ právě když přijímá } w\}$.

Úloha č. 5
Rozmyslete si problém testování, zda má zadaný zásobníkový automat nějaký nedosažitelný stav, tj. stav, do nějž se nedostane při zpracování žádného vstupního slova. Zformulujte tento problém pomocí jazyka a dokažte, že tento jazyk je rekurzivní.

Úloha č. 6
Nechť $J = \{w; w = 0x \text{ pro nějaké } x \in A_{TS} \text{ nebo } w = 1y \text{ pro nějaké } y \in \Sigma^* \setminus A_{TS}\}$. Dokažte, že ani J, ani $\Sigma^* \setminus J$ nejsou částečně rekurzivní.

Úloha č. 7
Bez použití Riceovy věty dokažte, že jazyk
$\{\langle T\rangle;\ T \text{ je TS takový, že } w \in L(T) \Leftrightarrow w^R \in L(T)\}$ není rekurzivní.

Úloha č. 8
Rozmyslete si problém testování, zda má daný TS nějaký nedosažitelný stav. Zformulujte tento problém pomocí jazyka a dokažte, že tento jazyk není rekurzivní.

Úloha č. 9 [Konečný L.]
Rozmyslete si problém testování, zda se 2-páskový TS pokusí někdy zapsat neprázdný symbol na svou druhou pásku. Zformulujte tento problém pomocí jazyka a dokažte, že tento jazyk není rekurzivní.

Úloha č. 10 [Szydlowsky T.]
Bez použití Riceovy věty dokažte, že množina $\{\langle T\rangle;\ T \textit{ je TS a } L(T)=\emptyset\}$ není rekurzivní.

Úloha č. 11
Bez použití Riceovy věty dokažte, že množina
$\{\langle T_1,T_2\rangle;\ T_1,\ T_2 \textit{ jsou ekvivalentní TS - tj. takové, že } L(T_1)=L(T_2)\}$ není rekurzivní.

Úloha č. 12 [Polák R.]
Ukažte, že ke každému NTS T lze sestrojit NTS T', který může provést v každé nekoncové konfiguraci právě dva výpočetní kroky (tj. každý strom konfigurací je binární strom) a který přijímá tentýž jazyk jako T. Navíc existuje malé $k \in \mathbb{N}$ takové, že T přijímá vstupní slovo w v t výpočetních krocích $\Leftrightarrow$ T' přijímá w v $k.t$ krocích výpočtu.

Úloha č. 13 [Růžičková K.]
Dokažte, že následující jazyk je NP-úplný:
$L=\{\langle T,w,1^k\rangle;\ T \textit{ je NTS přijímající slovo } w \textit{ v čase } k\}$.

Úloha č. 14
Dokažte, že následující jazyk je NP-úplný:
$L=\{\langle S,C\rangle;$ *S je konečná množina a* $C=\{C_1,\ldots,C_k\}$*, kde* $k\in N$*, je taková množina podmnožin S, že prvky S lze rozdělit do dvou skupin (např. ČERVENÁ a MODRÁ) tak, aby žádná množina* C_i *neobsahovala prvky pouze z jedné skupiny*$\}$.

Úloha č. 15 [Dulka R.]
Dokažte, že následující jazyk je z třídy P:
$L=\{\langle A\rangle;\ A \textit{ je konečný automat takový, že } L(A)=\Sigma^*\}$.

Úloha č. 16 [Maťašovský M.]
Dokažte, že třída P je uzavřena vzhledem k operaci uzávěru.
(Návod: Pro vstup $y=y_1,\ldots,y_n$, kde $y_i\in\Sigma$, sestavte tabulku určující pro každé $i\le j$, zda podřetěz $y_i,\ldots,y_j\in L^*$.)

Úloha č. 17 [Dvořák M.]
Dokažte, že třída NP je uzavřena vzhledem k operaci uzávěru.

Úloha č. 18
Dokažte, že následující jazyk je z třídy P:
$L = \{\langle G, a, b, k\rangle;\ G\ je\ neorientovaný\ graf\ obsahující\ cestu\ délky\ nejvýše\ k\ vedoucí\ z\ uzlu\ a\ do\ uzlu\ b\}$.

Úloha č. 19 [Kubová I.]
Dokažte, že následující jazyk je NP-úplný:
$L = \{\langle G, a, b, k\rangle;\ G\ je\ neorientovaný\ graf\ obsahující\ cestu\ délky\ nejméně\ k\ vedoucí\ z\ uzlu\ a\ do\ uzlu\ b\}$. K důkazu můžete využít faktu, že jazyk $L_H = \{\langle G, s, t\rangle;\ G\ je\ neorientovaný\ graf\ s\ hamiltnovskou\ cestou\ z\ s\ do\ t\}$ je NP-úplný.

Úloha č. 20
Dokažte, že následující jazyk je NP-úplný:
$L = \{\langle G\rangle;\ G\ je\ neorientovaný\ graf\ mající\ úplný\ podgraf\ s\ nejméně\ \frac{n}{2}\ uzly,\ kde\ n\ udává\ počet\ vrcholů\ G\}$.

Úloha č. 21 [Nepšinský R.]
Dokažte, že každý jazyk z třídy NP lze redukovat v polynomickém čase na jazyk
$L = \{\langle p\rangle;\ p\ je\ polynom\ více\ proměnných\ s\ celočíselným\ kořenem\}$.

Úloha č. 22 [Fojtík D.]
Dokažte, že v případě rovnosti $P = NP$ leží v podtřídě P jazyk
$L = \{\langle G, k\rangle;\ největší\ klika\ v\ neorientovaném\ grafu\ G\ má\ k\ vrcholů\}$
a že existuje algoritmus pracující v polynomickém čase, který ke každému grafu G najde jednu z jeho největších klik.

Úloha č. 23
Dokažte, že pokud pro každý jazyk L s vlastností $(\forall L' \in NP : L' \leq_p L)$ platí $(\forall L'' \in PSPACE : L'' \leq_p L)$, pak je $NP = PSPACE$.

Úloha č. 24 [Sommer M.]
Dokažte, že následující jazyk je z třídy PSPACE:
$L = \{\langle P\rangle;\ P\ je\ stav\ rozehrané\ hry\ piškvorky\ na\ hracím\ plánu\ s\ n \times n\ políčky,\ v\ němž\ má\ hráč\ "X"\ vyhrávající\ strategii\}$.

Úloha č. 25
Dokažte, že následující jazyk je z třídy PSPACE:
$L = \{\langle R, S\rangle;\ R\ a\ S\ jsou\ ekvivalentní\ regulární\ výrazy\}$.

Úloha č. 26
Dokažte, že následující jazyk je z třídy PSPACE:
$L = \{\langle A, s, t\rangle;$ *A je (deterministický) konečný automat, jímž rozpoznávaný jazyk obsahuje posloupnost řetězů* $(s_i)_{i=1}^{k}$ *stejné délky, a že* $s_1 = s$, $s_k = t$ *a* s_i *se liší od* s_{i+1} *v jediném symbolu pro* $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}\}$.
Př. Posloupnost českých slov s uvedenou vlastností: hůl, vůl, vůz, viz, liz, lis.

Úloha č. 27
Dokažte, že následující jazyk je PSPACE-úplný:
$L = \{\langle T, w\rangle;$ *T je TS přijímající vstupní slovo w, aniž by jeho čtecí hlava opustila úsek pásky, na němž je w zapsáno*$\}$.

Úloha č. 28
Sestavte TS T s polynomickou časovou složitostí rozhodující jazyk
$L = \{1^n;$ *n je prvočíslo*$\}$. Popište jej konkrétně, tj. $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_+, q_-)$, kde bude dopodrobna rozepsáno, co která složka znamená. Zdůvodněte, proč tento popis nestačí k prokázání, že problém určení prvočíselnosti je z třídy P. (Tím netvrdíme, že je z třídy P.)

Úloha č. 31 [Kuře M.]
Dokažte, že jazyk
$L = \{\langle T_1, T_2, k\rangle; T_1, T_2$ *jsou TS nad* Σ *takové, že* $L(T_1) \cap L(T_2)$ *obsahuje nejméně k řetězů*$\}$
je částečně rekurzivní, ale není rekurzivní.