Matematická analýza I a II
(pro učitelské obory)

Stanislav Trávníček
Pavel Calábek
Jaroslav Švrček

Matematická analýza I a II
(pro učitelské obory)

Stanislav Trávníček
Pavel Calábek
Jaroslav Švrček

Obsah

Úvod

Učební text „Matematická analýza I a II(pro učitelské obory)“ je určen především posluchačům prvního ročníku učitelských kombinací s matematikou na Přírodovědecké fakultě UP v Olomouci – v rámci bakalářského studijního programu. Skriptum vzniklo přepracováním studijní opory, kterou vytvořil první z autorů této publikace jako doplněk ke stejnojmenné přednášce.

Aktualizovaný a částečně doplněný učební text obsahuje 15 kapitol, jejichž obsah pokrývá veškerou problematiku základního kurzu matematické analýzy v prvním ročníku výše uvedených studijních oboru, tj. úvod do diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné.

Na tomto místě bychom chtěli vyjádřit naše vřelé poděkování oběma recenzentům – prof. RNDr. Svatoslavu Staňkovi, CSc., a doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc., za jejich cenné připomínky, jimiž přispěli ke zkvalitnění celého učebního textu.

Dále autoři děkují Mgr. Bohuslavu Strakovi, posluchači PřF, za pečlivou kontrolu všech uvedených příkladů a cenné připomínky vedoucí k vylepšení aktuální verze textu.

Vydání této publikace bylo podpořeno projektem „A-Mat-Net, síť pro transfer znalostí v aplikované matematice“, č. CZ.1.07/2.4.00/17.0100.

Autoři

Olomouc, září 2017

Kapitola 1
Číselná osa, supremum a infimum

1.1 Základní číselné množiny

Uvedeme nejprve přehled základních číselných množin a jejich označení. V celém textu budeme pracovat s následujícími množinami, jejichž vlastnosti jsou probírány už na střední škole:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je množina všech *přirozených* čísel. Přirozená čísla používáme např. jako pořadová čísla, třeba při zápisu členů posloupnosti:
$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ je množina *celých nezáporných čísel.* Těmito čísly je vyjádřen počet prvků konečných množin. Později uvidíme výhody použití čísel z $\mathbb{N}_0$ jako indexů členů nekonečných mocninných řad: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech *celých* čísel. Celá čísla používáme např. pro zápisy vztahující se k periodičnosti funkcí; např. funkce $y = \operatorname{cotg} x$ není definována pro $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné (celé) číslo.

$\mathbb{Q}$ – množina všech čísel *racionálních.* Racionální číslo je definováno jako číslo, které lze vyjádřit ve tvaru $\frac{k}{n}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. Podle potřeby lze takový zlomek uvést na *základní tvar*, kde čitatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná. Racionální čísla se používají např. při konstrukci některých méně obvyklých matematických objektů (viz dále). Množina $\mathbb{Q}$ je na číselné ose hustě uspořádána, mezi každými dvěma racionálními čísly leží další racionální číslo (např. jejich aritmeticky průměr). Racionální čísla lze zapsat i jako čísla desetinná. Jejich desetinný (dekadický) rozvoj je ukončený nebo periodický, dostaneme jej ze zlomku $\frac{k}{n}$ dělením. Obrácený postup je již náročnější.

Příklad 1

Racionální číslo $a = 1{,}5\overline{72}$ zapište ve tvaru zlomku.

Návod: První způsob řešení vychází z toho, že periodická část desetinného rozvoje čísla a je geometrická řada. Platí tedy

$$a = 1{,}5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \ldots = \frac{3}{2} + \frac{72}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \ldots = \frac{173}{110}.$$

Ve druhém způsobu řešení zapíšeme

$$a = 1{,}5\overline{72}$$
$$100a = 157{,}2\overline{72},$$

odkud po odečtení první rovnice od druhé dostaneme $99a = 155{,}7$, a tedy $a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}$.

$\mathbb{R}$ – množina všech čísel *reálných*, je pro základní kurs matematické analýzy základní číselnou množinou (pokud není řečeno jinak, budeme rozumět pod pojmem číslo vždy číslo reálné). Dostaneme ji tak, že vhodným způsobem zavedeme iracionální čísla. Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose: je to přímka, na níž zvolíme bod O jako obraz čísla 0 (počátek číselné osy) a bod J jako obraz čísla 1, a pomocí těchto dvou bodů pak na ní zobrazujeme všechna reálná čísla; body na číselné ose označujeme zpravidla přímo zobrazovanými čísly.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ vznikají dvě otázky:
— zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
— zda zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu je bijekce, tj. zda také naopak i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Věta 1.1.1

Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Důkaz: (sporem) Předpokládejme, že není splněno tvrzení věty, tj. že $\exists r \in \mathbb{Q}$: $r^2 = 2$. Číslo r je zřejmě kladné; vyjádříme je zlomkem v základním tvaru $r = \frac{p}{q}$, tedy p, q jsou čísla nesoudělná a platí $rq = p$. Umocníme: $r^2q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2$, odtud p^2 je sudé, což nastane, právě když p je sudé. Tedy $p = 2k$, odtud $2q^2 = 4k^2$, a proto $q^2 = 2k^2$, takže q je sudé. Odtud plyne, že zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma. To je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru.

Bez iracionálních čísel (tj. v množině $\mathbb{Q}$) bychom tak např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce (neměla by délku). Existuje tedy potřeba čísel, která nejsou racionální a která jsme nazvali iracionální.

Logika rozšiřování číselných oborů říká, že nový druh čísel zavádíme pomocí čísel již dříve definovaných. Při zavádění čísel reálných (tedy vlastně iracionálních, jen ta jsou nová) lze postupovat tak, že definujeme tzv. *řez* v množině $\mathbb{Q}$ jako každý rozklad množiny $\mathbb{Q}$ na dvě třídy, dolní a horní, kde tedy každé racionální číslo patří právě do jedné z těchto tříd a každé číslo z horní třídy je větší než každé číslo z dolní třídy. Iracionální číslo pak ztotožníme s takovým řezem, kde v dolní třídě není největší prvek a v horní třídě není prvek nejmenší. Např. číslo $\sqrt{2}$ je dáno řezem v $\mathbb{Q}$, kde do dolní třídy patří všechna čísla záporná a ta x z nezáporných, pro něž je $x^2 < 2$, do horní třídy patří všechna zbývající racionální čísla. S podrobnostmi toho přístupu se seznámíte v přednáškách z algebry ve třetím ročníku, kdy budete probírat Dedekindovy řezy; tam se také seznámíte s jiným přístupem pomocí Cantorovy teorie fundamentálních posloupností.

Množinu všech iracionálních čísel označíme $\mathbb{Q}'$; je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ a $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. Všimněme si dekadického rozvoje: racionální čísla mají dekadický rozvoj ukončený nebo periodický, iracionální čísla mají svůj dekadický rozvoj neukončený a neperiodický; pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π), ale není to pravidlo.

Příklad 2

Napište dekadický rozvoj takového iracionálního čísla, u něhož dovedeme jednoduše určit číslici na libovolném místě rozvoje.

Návod: Uvažujte například číslo 1,101001000100001 . . . , kde jedničky v desetinné části jsou po řadě odděleny $1, 2, 3, 4, \ldots$ nulami. Zjistěte, jaké číslice jsou na 990. a 1000. desetinném místě. [1 a 0]

O množinách $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}'$ říkáme, že jsou husté v množině $\mathbb{R}$ reálných čísel, což znamená, že mezi libovolnými dvěma reálnými čísly leží alespoň jedno číslo racionální a též alespoň jedno číslo iracionální.

Důležitá cesta k poznání množiny $\mathbb{Q}'$ vede přes *mohutnosti množin.* Zatímco množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti), tak množina $\mathbb{R}$ (tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má *mohutnost kontinua.*

$\mathbb{C}$ – množina všech čísel *komplexních*; komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.

Platí: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Základní vlastnosti číselných množin

O relacích a operacích v číselných množinách a o jejich přirozeném uspořádání pojednává podrobně algebra. Avšak i v matematické analýze se zabýváme mnoha významnými číselnými množinami. Při vyšetřování číselných množin využíváme jejich vlastnosti, o nichž dále pojednáme.

Definice 1.2.1

Množina M se nazývá *shora omezená*, právě když $\exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leqq L$. Toto číslo L se nazývá *horní odhad* (resp. horní závora).

Množina M se nazývá *zdola omezená*, právě když $\exists K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geqq K$. Toto číslo K se nazývá *dolní odhad* (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá *omezená*, právě když je omezená shora i zdola.

Příklad 1

Kolik horních (dolních) odhadů má číselná množina? Vyjádřete, co znamená, že daná množina M není omezená shora, zdola, že není omezená. Co znamená, že číslo B není horním odhadem dané množiny?

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme *největší prvek* množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně *nejmenší prvek* množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Příklad 2

Určete největší a nejmenší prvek množin

$$M_1 = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots\right\}, \ M_2 = \left\{\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}, \dots\right\}, \ M_3 = \left\{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Návod: Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

K nejdůležitějším číselným množinám patří *intervaly.*

Definice 1.2.2

Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leqq x \leqq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice 1.2.3

Množinu $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqq a\}$ nazýváme *neomezený interval*. Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$. Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Příklad 3

Definujte interval, který zprava uzavřený a zleva otevřený. Definujte interval, který je naopak zprava otevřený a zleva uzavřený (tzv. *polouzavřený* nebo *polootevřený interval*).

Někdy uvažujeme též *degenerované intervaly*: $\langle a, a\rangle = \{a\}$, $(a, a) = \emptyset$ (prázdná množina). Pojmem interval budeme však dále vždy rozumět nedegenerovaný interval. Jestliže J je interval s koncovými body a, b (např. $J = (a, b\rangle$), pak $|J| = |b - a|$ značí délku tohoto intervalu.

Definice 1.2.4

Absolutní hodnota (*modul*) čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geqq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta 1.2.1 (vlastnosti absolutní hodnoty)

Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

a) $|a| \geqq 0$, přičemž $|a| = 0$, právě když $a = 0$,
b) $|-a| = |a|$,
c) $|a + b| \leqq |a| + |b|$,
d) $|a - b| \geqq |a| - |b|$,
e) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
f) pro $b \neq 0$ je $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Vlastnost c) (trojúhelníkovou nerovnost) můžeme zobecnit (užitím principu matematické indukce vzhledem k n):

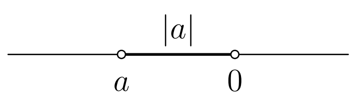
c') Pro všechny n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

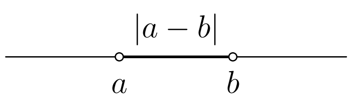
$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

nebo zkráceně

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \,.$$

Geometrický význam absolutní hodnoty: $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy, $|a - b| = |b - a|$ vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.





Příklad 4

V oboru reálných čísel řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x - 3| < 2$,
b) $2|x + 2| - 3|x| - 2x \geqq 4$,
c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}\,|x + 1| - \frac{3}{4}\,|x - 2| = 0$.

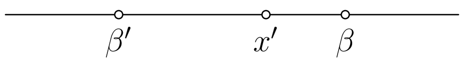
1.3 Supremum a infimum

Definice 1.3.1

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme *supremum* množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

1. Pro všechna $x \in M$ platí $x \leqq \beta$,
2. Pro každé $\beta' < \beta$ existuje $x' \in M$ tak, že platí $x' > \beta'$.

Vlastnost 1. znamená, že β je horní odhad, vlastnost 2. říká, že β je ze všech horních odhadů nejmenší, tedy: $\sup M$ je *nejmenší horní odhad* (závora) množiny M. Ovšem z definice nijak neplyne, že takový nejmenší horní odhad existuje.



Definice 1.3.2

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme *infimum* množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

1. Pro všechna $x \in M$ platí $x \geqq \alpha$,
2. Pro každé $\alpha' > \alpha$ existuje $x' \in M$ tak, že platí $x' < \alpha'$.

Vlastnost 1. znamená, že α je dolní odhad, vlastnost 2. říká, že α je ze všech dolních odhadů největší, tedy: $\inf M$ je *největší dolní odhad* (závora) množiny M. Z definice opět nijak neplyne, že takový největší dolní odhad existuje.

Příklad 1

Určete $\sup M$ a $\inf M$ pro množinu $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$.

NÁVOD: Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r. Dále $\inf M = \dfrac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M.

Tedy: supremum a infimum množiny mohou, ale nemusí být prvky této množiny. Pokud $\sup M$ je prvkem množiny M, je jejím největším prvkem; podobně pro $\inf M$. Také naopak, pokud má M největší prvek, je to současně $\sup M$; podobně pro nejmenší prvek.

Věta 1.3.1 (o existenci suprema a infima)

Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.
Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Tuto větu budeme považovat za axiom vyjadřující základní vlastnost číselné osy. Tedy: existuje bijekce množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu – každé reálné číslo lze zobrazit na číselné ose a každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla. Říkáme též: *číselná osa je spojitá*. Pojmy „číslo“ a „bod číselné osy“ považujeme za synonyma a říkáme např. „bod x_0“ místo „číslo x_0“ apod.

Pojmy supremum a infimum a věta o existenci suprema a infima jsou pro matematickou analýzu velmi důležité. Hrají podstatnou roli v řadě důkazů (viz např. dále 1.4, důkaz věty o vložených intervalech) a při definici dalších důležitých matematických pojmů.

Reálná čísla a realita

Matematika svými prostředky modeluje realitu a přitom používá metody abstrakce: abstrahuje od mnoha vlastností reálných objektů (které mohou být pro realitu velmi významné) a ponechává jen ty, které upotřebí při vytváření matematických modelů. Vytváří tak různé abstraktní objekty, jako je bod, čtverec, číslo, funkce, řada ad. Tyto abstraktní modely jsou velmi vhodné pro popis a studium reality, ale přesto nesmíme zaměňovat model a realitu. V určitých případech se naše reálné představy a zkušenosti dostávají do rozporu s některými matematicky zcela přesně definovanými pojmy a vlastnostmi. Např. v reálném životě není nekonečno, takže některé jeho vlastnosti odporují našim praktickým zkušenostem, třeba to, že nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou pravou částí; např. množina všech lichých přirozených čísel „má týž počet prvků" (tj. stejnou mohutnost) jako množina $\mathbb{N}$. Podobně na základě zkušeností z reálného světa je nepředstavitelné, že $\mathbb{Q}'$ má větší mohutnost než $\mathbb{Q}$ (že iracionálních čísel „je více" než čísel racionálních. Naše zkušenost říká, že když vedle sebe jsou umístěny nějaké objekty, tak mezer mezi nimi je tak nějak stejně jako objektů (plaňkový plot), ale u čísel racionálních a iracionálních je to úplně a nepředstavitelně jinak. Mezi každými dvěma čísly racionálními je alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma čísly iracionálními je alespoň jedno číslo racionální, přičemž těch iracionálních mezi dvěma racionálními je množina mohutnosti kontinua, zatímco racionálních mezi dvěma iracionálními je jen spočetná množina. Definice iracionálních čísel, ať už použijeme jakoukoli metodu, vytváří jen matematický model a nikoli realitu. Spojitost číselné osy, která se skládá z racionálních a iracionálních bodů, si nelze představit; snad i proto, že v reálném světě je to jinak, tam neexistuje žádná přímka a pohodu číselné osy jako dobře fungujícího matematického modelu narušují různé fyzikální částice.

Na počítači se s reálnými čísly pracuje dvěma způsoby: *čísla celá* jsou uložena ve dvojkové soustavě a podle počtu použitých bytů je dán jejich rozsah dostačující pro použití v praxi, výpočty jsou přesné; *desetinná čísla* se ukládají jiným způsobem, a to jen s určitou přesností, která hraje u složitých a rozsáhlých výpočtů velkou roli.

1.4 Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

Věta 1.4.1 (o aritmetickém a geometrickém průměru dvou nezáporných čísel)

Jsou-li a, b libovolná nezáporná reálná čísla, pak jejich aritmetický průměr je větší nebo roven jejich průměru geometrickému, tj.

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab},$$

přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel a, b.

Důkaz: (princip) Zde je vhodný důkaz *přímý*, přičemž vyjdeme z platné nerovnosti $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$, jejíž úpravou dostaneme přímo dané tvrzení.

Příklad 1

Všimněte si slovní formulace věty. Přepište ji do formy převážně symbolické a do formy zcela symbolické.

Předcházející větu lze zobecnit následujícím způsobem, její důkaz zde neuvádíme.

Věta 1.4.2 (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, AG nerovnost)
Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ libovolná nezáporná reálná čísla, potom platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Rovnost nastává, právě když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Věta 1.4.3 (Bernoulliova nerovnost)
Pro každé reálné číslo $h > -1$, kde $h \neq 0$ a pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ platí $(1+h)^n > 1 + nh$.

DŮKAZ: (princip) Užijeme princip *matematické indukce* vzhledem k n. V prvním kroku dokážeme tvrzení pro $n = 2$, tedy

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h,$$

a ve druhém kroku předpokládáme, že pro jisté $n \geqq 2$ platí

$$(1+h)^n > 1 + nh.$$

Obě strany poslední nerovnosti vynásobíme kladným číslem $(1+h)$ a dále na pravé straně vynecháme člen nh^2.

Bernoulliova nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

Věta 1.4.4 (o rovnosti reálných čísel)
Nechť $p, q \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall \varepsilon > 0$ platí $|p - q| < \varepsilon$, pak $p = q$.

DŮKAZ: (sporem) Kdyby $p \neq q$, bylo by $|p - q| > 0$. Zvolíme-li $\varepsilon = |p - q|$, dostáváme, že $|p - q| < \varepsilon$ a současně $|p - q| = \varepsilon$, což dává spor. Proto $p = q$.

Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty.

Věta 1.4.5 (o vložených intervalech)
Nechť (J_n) je posloupnost omezených uzavřených intervalů $J_n = \langle a_n, b_n \rangle$ takových, že $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$ Pak existuje bod x_0, který leží ve všech intervalech J_n pro $n \in \mathbb{N}$. Jestliže navíc $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $|J_n| < \varepsilon$, je takový bod x_0 jediný.

DŮKAZ: (princip) Uvažujeme množinu A všech levých krajních bodů a_n intervalů J_n a množinu B jejich pravých krajních bodů b_m; pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_m$. Podle věty o existenci suprema tedy existuje $\alpha = \sup A$, pro něž $\alpha \leqq b_m$; podobně existuje $\beta = \inf B$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b_n$, tedy $\forall n \in \mathbb{N}$: $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle$. Pro důkaz tvrzení věty stačí volit $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Je-li interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ degenerovaný, dostáváme x_0 jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n - a_n < \varepsilon$. Jelikož je $\beta - \alpha \leqq b_n - a_n < \varepsilon$, je podle věty o rovnosti reálných čísel $\alpha = \beta$.

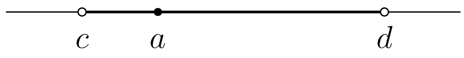
Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu x_0 může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost $(|J_n|)$ délek intervalů J_n je nulová …“

Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí, zejména ve spojení s tzv. Bolzanovou metodou důkazu.

1.5 Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice 1.5.1

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a: $U(a)$.



Tato je definice je formulována ve smyslu topologickém.

Věta 1.5.1 (vlastnosti okolí)

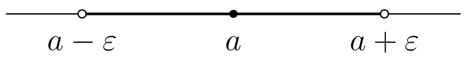
Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

- Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.
- Ke každým dvěma okolím $U_1(a), U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap \cap U_2(a)$.
- Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.
- Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Pro důkazy některých vět je vhodnější definovat okolí bodu a ve smyslu metrickém.

Definice 1.5.2

ε-okolím bodu a, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.



Lehce ověříme, že ε-okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a, \varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.

Definice 1.5.3

Prstencovým (redukovaným) okolím bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) - \{a\}$.

Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) - \{a\}$. Dále se definuje levé $U(a-)$ resp. pravé $U(a+)$ okolí bodu a jako interval $(c, a\rangle$ nebo $(a - \varepsilon, a\rangle$ resp. $\langle a, d)$ nebo $\langle a, a + \varepsilon)$; jsou to tzv. *jednostranná okolí.* Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná)* okolí $P(a-)$ resp. $P(a+)$ — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a.

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M. Uvedeme si nyní zkrácené definice některých důležitých pojmů, používaných v matematické analýze.

Vnitřní bod množiny M: Bod množiny M, který do M patří i s některým svým okolím.

Vnitřek množiny M: Množina všech vnitřních bodů množiny M.

Hraniční bod množiny M: V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M.)

Hranice množiny M: Množina všech hraničních bodů množiny M.

Vnější bod množiny (vzhledem k množině) M: Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M.

Vnějšek množiny M: Množina všech vnějších bodů množiny M.

Množina M je *otevřená*: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Množina M je *uzavřená*: Obsahuje svou hranici.

Uzávěr $\overline{M}$ množiny M: Sjednocení množiny M a její hranice.

Hromadný bod a množiny M: V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M.

Izolovaný bod množiny M: Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem.

Diskrétní množina: Všechny její body jsou izolované.

Derivace M' množiny M: Množina všech hromadných bodů množiny M.

Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím. Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí“ a „pravé okolí“ a můžeme tedy definovat i *levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Příklad 1

Všechny výše uvedené pojmy aplikujte na množinu

$$M = \langle -1, 0) \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

1.6 Rozšířená reálná osa

Je to model číselné osy, kterou rozšíříme o dva nové prvky: *nevlastní číslo* $+\infty$ a nevlastní číslo $-\infty$. Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

Uspořádání: $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < +\infty$, zvláště $-\infty < +\infty$; $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = = -\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Okolí: $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každou množinu $\{x \in \mathbb{R}^*, x > c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.

Supremum a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Hromadné body: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^*$, právě když v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M. Podobně pro $-\infty$.

Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Početní operace s nevlastními čísly

Operace s reálnými čísly můžeme rozšířit na nevlastní čísla následujícím způsobem:

Sčítání a odčítání: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$
$$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

Nedefinujeme $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.

Násobení: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro $x < 0$.

Nedefinujeme $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$.

Dělení: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$.
Pro $x > 0$ je $+\infty/x = +\infty$, $-\infty/x = -\infty$,
pro $x < 0$ je $+\infty/x = -\infty$, $-\infty/x = +\infty$.

Nedefinujeme $+\infty/+\infty$, $+\infty/-\infty$, atd., $x/0$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$, ani $0/0$ nebo $\pm\infty/0$.

Mocniny: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme $(+\infty)^n = +\infty$, $(+\infty)^{-n} = 0$, $(-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty)$.

Nedefinujeme $(+\infty)^0$, $(-\infty)^0$, 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$.

Poznámka: Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞, takže např. místo výrazu $(+\infty)+(+\infty)$ lze napsat jen $\infty+\infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞, musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$.

Příklad 1

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - (-\infty)/3 + (-\infty)^3 \cdot (100-\infty) - 1200!/+\infty.$$

Kapitola 2
Číselné posloupnosti

2.1 Pojem posloupnosti

Definice 2.1.1

Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme *číselná posloupnost*. Zápis: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo jen (a_n); a_n se nazývá *n-tý člen* posloupnosti.

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy), n-tým členem nebo rekurentně.

Příklad 1

Je dána posloupnost

$$\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 7}, \frac{5}{7\cdot 10}, \frac{7}{10\cdot 13}, \dots$$

Určete její n-tý člen.

NÁVOD:

$$a_n = \frac{2n-1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Při zadání *n-tým členem* zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Příklad 2

Příklady číselných posloupností zadaných n-tým členem: $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\left((-1)^n n\right)$, (aq^{n-1}), $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, $(a+(n-1)d)$. Vypočtěte členy jejich a_1, a_2, a_3, a_4.

Rekurentní zadání obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Například v sekci 2.5 na straně 27 je *aritmetická posloupnost* zadána takto: $a_1 = a$ a $a_{n+1} = a_n + d$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Podobně *geometrická posloupnost* je definována $a_1 = a$ a $a_{n+1} = a_n \cdot q$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3

Posloupnost (a_n) je zadána rekurentně takto:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right);$$

je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$. Vypočtěte první čtyři aproximace.

Příklad 4

Fibonacciova posloupnost (f_n) je definována takto: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Posloupnost (a_n) je třeba odlišovat od množiny (všech) jejích členů (kdy se užívají složené závorky). Např. množina (všech) členů posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)$ je $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, množina (hodnot) členů posloupnosti $((-1)^n)$ je $\{-1, 1\}$.

Definice 2.1.2

Posloupnost (b_n) se nazývá *vybraná z posloupnosti* (a_n) (nebo též *podposloupnost*), právě když existuje posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti (n) všech čísel přirozených, ale není vybraná z posloupnosti $(2n-1)$ všech čísel lichých.

2.2 Základní vlastnosti číselných posloupností

V této kapitole se dále zabýváme jen číselnými posloupnostmi.

Definice 2.2.1

Posloupnost se nazývá (*shora, zdola*) *omezená*, právě když tuto vlastnost má množina všech jejích členů.

Např. posloupnost $(2n-1)$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená. Posloupnost $((-1)^n)$ je omezená shora i zdola, je omezená. Stacionární posloupnost (c) je omezená.

Definice 2.2.2

Posloupnost (a_n) se nazývá
rostoucí, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
klesající, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
nerostoucí, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geqq a_{n+1}$,
neklesající, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leqq a_{n+1}$.
Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: *posloupnosti monotonní* a pro první dva druhy: *posloupnosti ryze monotonní*.

Definice 2.2.3

Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:
násobení reálným číslem c: $c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n)$;
aritmetické operace součet, rozdíl, součin, podíl:
$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$,
$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$, $(a_n)/(b_n) = (a_n/b_n)$, (pro $b_n \neq 0$);
opačná posloupnost k (a_n) je $(-a_n)$;
reciproká posloupnost k (a_n) je $(1/a_n)$ (pro $a_n \neq 0$).

2.3 Limita posloupnosti

Definice 2.3.1

Říkáme, že posloupnost (a_n) má *limitu* a, právě když pro každé okolí $U(a)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n \geqq n_0$, platí $a_n \in U(a)$, symbolicky zapsáno

$$\forall U(a)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se a *vlastní limita* a posloupnost (a_n) se nazývá *konvergentní*, pokud $a = \pm\infty$, nazývá se a *nevlastní limita*. Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost (a_n) *divergentní*.
Zápisy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$.

Posloupnost tedy buď konverguje, nebo diverguje. V tomto druhém případě buď diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$, nebo *osciluje* (tj. nemá limitu vlastní ani nevlastní).

Např. posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost (c) je konvergentní a má limitu c, posloupnost $\left(\frac{n}{100}\right)$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost (q^n) je pro $q \leqq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Definice 2.3.2

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok: „Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ z nerovnosti $n \geqq n_0$ plyne $V(n)$,“ je pravdivý výrok, pak říkáme, že $V(n)$ platí *pro skoro všechna* n.

Pomocí tohoto vyjádření lze vyslovit definici limity posloupnosti např. takto: Říkáme, že posloupnost (a_n) *má limitu* a, právě když v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Věty o limitách

Věta 2.3.1

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: (sporem) Kdyby existovaly dvě limity a, b, pak by existovala disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a)$, $a_n \in U(b)$, což je spor.

Věta 2.3.2

Má-li posloupnost (a_n) limitu, pak každá posloupnost (b_n) vybraná z posloupnosti (a_n) má tutéž limitu.

Důkaz: Označme tuto limitu a; pak $\forall U(a)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též $b_n = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_n \in U(a)$ pro skoro všechna n.

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu: 1. zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a 2. najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti. Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost. Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věta 2.3.3

Je-li posloupnost (a_n) konvergentní, pak je omezená.

DŮKAZ: Označme a limitu této posloupnosti a zvolme $\varepsilon = 1$. Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí $\min\{\min M, a-1\} \leqq a_n \leqq \max\{\max M, a+1\}$.

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $((-1)^n)$ je omezená, ale je divergentní. Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta 2.3.4 (Bolzano-Weierstrassova)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ: (princip: Bolzanova metoda půlení intervalů) Nechť (a_n) je omezená posloupnost, tj. $\exists\langle K_1, L_1\rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1\rangle$. Konstrukce vybrané posloupnosti: Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti (a_n), nechť v ní má index k_1. Interval $\langle K_1, L_1\rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2\rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). V $\langle K_2, L_2\rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti (a_n), který má index $k_2 > k_1$. Interval $\langle K_2, L_2\rangle$ rozpůlíme, atd. Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n\rangle$ (podle věty o vložených intervalech). Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí inkluze $\langle K_n, L_n\rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \to a$.

Věta 2.3.5

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

DŮKAZ: (princip) Mějme dánu posloupnost (a_n); z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$. Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n, takže vzhledem k monotónnosti (a_n) leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti (a_n).

Věta 2.3.6 (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^*$ smysl:

a) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
b) $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$,
c) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
d) $\lim |a_n| = |a|$.

DŮKAZ: ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že: $n \geqq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2)$; $n \geqq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2)$. Nechť $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a $n \geqq n_0$. Pak platí

$$a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2,$$
$$b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2.$$

Sečtením obou nerovností dostaneme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$.

Příklad 1

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta 2.3.7 (limita nerovnosti)
Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leqq b_n$. Pak $a \leqq b$.

Důkaz: (sporem) Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a)\ \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty.

Pro konvergentní posloupnosti (a_n), (b_n) zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leqq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_m \geqq b_m$, pak $a = b$.

Věta 2.3.8 (věta o třech limitách)
Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a nechť pro skoro všechna n je $a_n \leqq c_n \leqq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Důkaz: (princip) Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti (a_n) a také skoro všechny členy posloupnosti (b_n). Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti (c_n).

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $(+\infty)$, proto z nerovnosti $a_n \leqq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

2.4 Nulové posloupnosti

Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$. Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak, konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta 2.4.1
$a_n \to a$, právě když $(a_n - a) \to 0$.

Dále uvedeme některé věty, které mají vztah k nulovým posloupnostem.

Věta 2.4.2
Jestliže $a_n \to a$, pak $|a_n| \to |a|$.

Obrácená věta k této větě pro $a \neq 0$ neplatí, ale pro $a = 0$ ano.

Věta 2.4.3
Jestliže $|a_n| \to +\infty$, je $1/a_n$ posloupnost nulová.

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta 2.4.4
Je-li $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $a_n > 0$, $a_n \to 0$, pak $1/a_n \to +\infty$,
- $a_n < 0$, $a_n \to 0$, pak $1/a_n \to -\infty$,
- $a_n \neq 0$, $a_n \to 0$, pak $1/|a_n| \to +\infty$.

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

Příklad 1

Vypočtěte následující limity

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2+n}{4n^2+5}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{6\cdot 2^{2n}+5\cdot 2^n-4}{2^{2n+1}-2^n+15}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{7n+150}{n^2-0{,}25}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-8n}{9n^2+10}.$$

2.5 Aritmetická posloupnost a geometrická posloupnost

Někdy se pro uspořádané n-tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi. V praxi je mnoho situací, kdy známe několik prvních členů $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nějaké posloupnosti a pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1}. Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad. Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích. Může jít o nalezení vzorce pro n-tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Zvláštní pozornosti si zaslouží posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická, které se v praxi vyskytují poměrně často.

Aritmetická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = a_n + d$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme předpokládat, že a_1 a d jsou reálná čísla. Aritmetickou posloupnost lze však rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. (Dokazuje se jednoduše např. užitím principu matematické indukce). Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$ a pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Příklad 1

V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tis. Kč, $a_2 = 354$ tis. Kč a $a_3 = 383$ tis. Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?

Návod: Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tis. Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tis. Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tis. Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.)

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(n-1)d),$$
$$s_n = a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \ldots + (a_n-(n-1)d)$$

a po sečtení máme $2s_n = n(a_1+a_n)$, takže $s_n = \frac{n}{2}\,(a_1+a_n)$.

Příklad 2

Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?

Návod: Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11\cdot(-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6(26+15) = 246$ rour.

Geometrická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantním kvocientem q a rekurentním pravidlem $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. V této definici mohou být a_1 a q libovolná reálná čísla, v dalším textu však budeme předpokládat (pokud nebude řečeno jinak), že $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$. Za těchto předpokladů lze tedy geometrickou posloupnost rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. (Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí).

Příklad 3

V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o 5 % větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.

NÁVOD: Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300$, $q = 1{,}05$, $n = 11$. Pak $a_{11} = 300 \cdot 1{,}05^{10} \approx 300 \cdot$ $\cdot\, 1{,}629 = 489$ tis. Kč. Viz poznámku za příkladem 1.

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $(a_1 \cdot q^{n-1})$ má limitu 0 (pro $|q| < 1$) nebo a_1 (pro $q = 1$) nebo $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo nemá limitu (pro $q \leqq -1$).

Praktický význam může mít opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. n-tý částečný součet geometrické řady). Vzorec pro s_n lze odvodit takto: Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \phantom{a_1 + {}} a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první obdržíme $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, tudíž

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Příklad 4

Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrno, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrnek obilí měl dostat?

NÁVOD: Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto $s_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 \approx$ $\approx 1{,}845 \cdot 10^{19}$ a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo.

Aritmeticko-geometrická posloupnost (c_n) je definována jako součin aritmetické posloupnosti (a_n) a geometrické posloupnosti (b_n) ve smyslu definice 2.2.3 součinu dvou posloupností.

2.6 Některé významné limity

Věta 2.6.1

Pro $\forall a > 0$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

DŮKAZ: (princip) Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, tedy $u_n > 0$. Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + nu_n$, odkud $0 < u_n < \frac{a-1}{n}$ a podle věty o třech limitách je $u_n \to 0$. Pro $a < 1$ použijeme předchozí výsledek na číslo $1/a$, pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující limity:

Věta 2.6.2

Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Věta 2.6.3

Pro $\forall a > 1$, $\forall k > 0$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty$. (Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ *rychleji* než mocnina n^k.)

Příklad 1

Dokažte, že pro $\forall a > 1$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

NÁVOD: Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$, odkud po zlogaritmování nerovnosti při základu a plyne uvedené tvrzení.

Příklad 2

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!}$, kde $q > 0$.

NÁVOD: Pro $q \leqq 1$ je tato limita rovna 0. Pro $q > 1$ má čitatel i jmenovatel limitu $+\infty$, takže nelze použít větu o limitě podílu. Uvedený výraz označme a_n; pak

$$a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n, \tag{$*$}$$

proto pro skoro všechna n je posloupnost (a_n) klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a. Přejdeme-li v rovnosti $(*)$ k limitě, máme $a = 0$. Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ rychleji než exponenciála q^n.

Příklad 3

Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

NÁVOD: Lze uvažovat např. posloupnost dolních desetinných aproximací.

Poznámka: Kromě číselných posloupností pracujeme v matematické analýze i s dalšími typy posloupností; uvažují se třeba posloupnosti množin (např. intervalů), posloupnosti funkcí, atd. Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu. Např. posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí. Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

2.7 Číslo e

Funkce $y = \mathrm{e}^x$ a funkce $y = \ln x (= \log_{\mathrm{e}} x)$ patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo e.

Číslo e je definováno jako limita posloupnosti $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$. Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost je konvergentní; její členy označujme dále a_n. Důkaz existence limity posloupnosti (a_n) lze provést ve dvou krocích: (i) dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí, (ii) dokážeme, že je shora omezená. Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

ad (i) Užitím AG nerovnosti pro n čísel $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ a číslo 1 dostaneme

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Umocněním obou stran této nerovnosti číslem $n+1$ dostaneme

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

což značí $a_n < a_{n+1}$, tedy posloupnost (a_n) je rostoucí.

ad (ii) Ukážeme, že posloupnost s členy $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)$ je klesající. Jelikož $1+\frac{1}{n} > 1$, dostaneme pak $a_n < b_n < b_1 = 4$. Vskutku, podle AG nerovnosti pro $n+1$ čísel 1 a číslo $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ platí

$$\sqrt[n+2]{1+\frac{1}{n}} < \frac{(n+1)+(1+\frac{1}{n})}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Obě strany této nerovnosti umocníme na $n+2$, vynásobíme $n\,(n+2)^{n+2}$ a vydělíme $(n+1)^{n+2}$. Tím získáme s ní ekvivalentní nerovnost

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

tedy $b_{n+1} < b_n$, což značí, že posloupnost (b_n) je klesající.

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti (a_n); nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji e. Z předchozího plyne, že $2 < e < 4$.

Jiný přístup:

ad (i) Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Pro posloupnost (a_n) tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1-\frac{j}{n}\right)$. Jestliže nyní přejdeme od n k $n+1$, je a_{n+1} součtem $n+2$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$. Jelikož $\left(1-\frac{j}{n+1}\right) > \left(1-\frac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je $a_{n+1} > a_n$, posloupnost (a_n) je rostoucí.

ad (ii) Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$ číslem 1, takže platí

$$a_n < c_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Odtud pro $n \to +\infty$ máme $\mathrm{e} \geqq c_k$ takže platí $a_n < c_n \leqq \mathrm{e}$; podle věty o třech limitách pak je $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \mathrm{e}$. Přitom c_n je podle své definice tzv. n-tým částečným součtem řady takže

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = 2{,}718\,281\,828\,4590\ldots$$

Tato řada „poměrně rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.

Kapitola 3

Pojem funkce

3.1 Definice funkce

Písmeno x nazýváme *proměnná* na (číselné) množině M, právě když může být ztotožněno s libovolným prvkem množiny M. Pojem funkce navazuje na pojem *binární relace* a na pojem *zobrazení* jejichž základní znalost zde předpokládáme.

Definice 3.1.1

Každé zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (tj. zobrazení v $\mathbb{R}$) nazýváme *reálná funkce jedné reálné proměnné*. Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá *nezávisle proměnná*, y *závisle proměnná*; říkáme též, že *y je funkcí x*.

Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x, zapíšeme $y = y(x)$. Vedle vyjádření „funkce f“ se tolerují též zápisy „funkce $f(x)$“ (chceme-li zdůraznit označení nezávisle proměnné) nebo „funkce $y = f(x)$“ (chceme-li zdůraznit označení obou proměnných).

S pojmem funkce jsou spjaty dvě významné množiny:

definiční obor funkce: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \exists(x, y) \in f\}$,
funkční obor (*obor hodnot*): $H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists(x, y) \in f\}$.

Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem. Např. v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$. Je-li $M \subset D(f)$, je $f(M)$ označení pro $\{f(x); x \in M\}$. Je tedy $H(f) = f(D(f))$. Naopak, je-li $B \subset H(f)$, pak definujeme $f^{-1}(B)$ jako množinu $\{x \in D(f); f(x) \in B\}$.

Grafem funkce f v kartézských souřadnicích rozumíme množinu všech bodů kartézské soustavy souřadnic Oxy, pro jejichž souřadnice x, y platí $(x, y) \in f$. Grafické znázornění funkce často svou názorností pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce; pro některé funkce však graf nedovedeme sestrojit, např. pro Dirichletovu funkci (viz dále). Grafy funkcí lze uvažovat také v polární souřadnicové soustavě, kdy ovšem dostáváme jiné křivky. Např. grafem přímé úměrnosti $y = kx$ v kartézských souřadnicích je přímka, grafem téže funkce $\varrho = k\varphi$ v polárních souřadnicích je Archimedova spirála. Neřekneme-li jinak, uvažujeme vždy graf v kartézských souřadnicích.

Způsoby definice funkce

Funkci f lze vyjádřit takto: $f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R}; V(x, y)\}$. Zadat (definovat) funkci f tedy znamená udat její definiční obor $D(f)$ a jisté pravidlo $V(x, y)$, jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$. Podle toho, jak je toto pravidlo formulováno, rozlišujeme tato zadání funkce:

a) (Explicitní) *rovnicí*, např. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2 - 1\}$, nebo jednoduše $f\colon y = x^2 - 1$.

U funkce definované rovnicí, není-li řečeno jinak, bereme za $D(f)$ nejširší množinu, pro niž má rovnice smysl. Je-li předepsán jiný definiční obor, musíme jej uvést, např. $f\colon y = x - 1,\ x \in \mathbb{N}$.

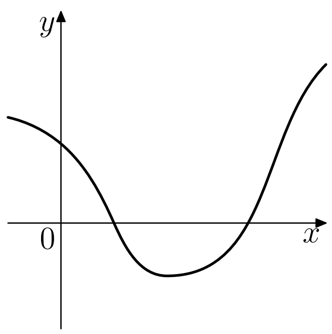
b) *Tabulkou*, např.

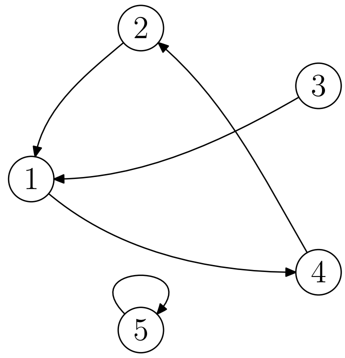
x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

Také zadání funkce *výčtem prvků* lze považovat za zadání tabulkou, jde jen o jinou formu zápisu; např. $f = \{(-2;3), (-1;0), (0;-1), (1;0), (2;3), (3;8)\}$.

Tabulkou či výčtem prvků bývají zadávány funkce, jejichž funkční hodnoty byly získány měřením nebo kde jsou tyto hodnoty důležitější než příslušné pravidlo (např. daňové tabulky, bodovací sportovní tabulky). Tabelaci funkce však používáme i u funkcí definovaných jinak, pokud může tabulka posloužit lépe k přehlednosti nebo jiné praktické potřebě (např. tabulka cen v závislosti na hmotnosti zboží).

c) *Grafem* (zpravidla kartézským (obr. vlevo)). Další druhy grafů – šachovnicový, uzlový (obr. vpravo) nebo graf v polární soustavě souřadnic – bývají méně časté.





Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

d) *Po částech*; tak je definována např. *Dirichletova funkce*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ 1 & \text{pro } x \text{ racionální} \end{cases}.$$

Podobným způsobem je definována funkce *signum* (znaménko)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}.$$

Rovnice $y = \chi(x)$ a $y = \operatorname{sgn} x$ však již považujeme za rovnice funkcí.

e) *Implicitní rovnicí*, např. $x^2 + y^2 = 25$; takto se definují implicitní funkce $y = y(x)$, s nimiž je technika práce někdy poněkud odlišná. Zejména bývá vymezena množina $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro niž má platit $(x, y) \in M$. Např. u výše uvedené rovnice může být zadáno, že M je polorovina $y \geqq 0$.

f) *Parametricky*: Parametrické vyjádření je tvaru $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde φ, ψ jsou funkce definované na množině (intervalu) J, přičemž funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \exists t \in J \text{ tak, že } (x = \varphi(t)) \wedge (y = \psi(t))\}.$$

Např. $x = 4 \cdot \cos t$, $y = 4 \cdot \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Parametrického vyjádření používáme ponejvíce při vyšetřování různých (např. technických) křivek.

g) *Jinak*: Někdy je pro výrokovou formu $V(x, y)$ dána jen slovní formulace. Např. výroková forma $V(x, y) =$ „y je největší celé číslo, které není větší než x" definuje funkci $\lfloor x \rfloor$ „dolní celá část reálného čísla x"; např. $\lfloor 3{,}8 \rfloor = 3$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -6{,}7 \rfloor = -7$; tím se tato funkce odlišuje od „počítačové" $\mathrm{Int}(x)$. Ostatně i goniometrické funkce sinus a kosinus jsou pomocí jednotkové kružnice definovány tímto způsobem (avšak $y = \sin x$, $y = \cos x$, jsou již *rovnice* těchto funkcí).

Výroková forma $V(x, y)$ je tedy jisté „pravidlo" („předpis"), které ke každému číslu x z jisté množiny $D \subset \mathbb{R}$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Pojem funkce se někdy (z důvodů didaktických) ztotožňuje přímo s tímto pravidlem, podle nějž rozhodujeme, zda $(x, y) \in f$, nebo s jehož pomocí k danému x počítáme příslušnou funkční hodnotu $f(x)$. I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce. Pro toto pravidlo $V(x, y)$ tak lze používat stejné označení f jako pro funkci a zkráceně říkat a psát např. „funkce $f \colon y = x^2 - 1$" nebo prostě „funkce $y = x^2 - 1$".

3.2 Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

Stanovení definičního oboru

Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž je daná rovnice definována. Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Příklad 1

Určete definiční obor funkce

$$y = \frac{\log\left(4 - x^2\right)}{1 - x}.$$

Návod: Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2; 2)$, jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \mathbb{R} - \{1\}$. Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Zjištění nulových bodů funkce

Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce: při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f (a dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body, při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2. derivace funkce).

Příklad 2

Určete nulové body funkce $y = -\mathrm{e}^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$.

Návod: Máme $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$. Protože $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, řešíme jen goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin \pi/4 \cdot \cos x - \cos \pi/4 \cdot \sin x = 0$ (neboť $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \cos \pi/4$) a tedy i s rovnicí $\sin(\pi/4 - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zjištění intervalů, kde je funkce kladná (záporná)

Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$, při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Příklad 3

Určete intervaly, kde je funkce $y = (6x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$ kladná a kde je záporná.

NÁVOD: Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x)xe^{-x}$ a uvědomíme si, že činitel e^{-x} je kladný. Pro $(x > 0) \wedge (6 - x > 0)$, tj. na intervalu $(0; 6)$ je daná funkce kladná, pro $(x > 0) \wedge (6 - x < 0)$, tj. na intervalu $(6; +\infty)$ je funkce záporná, pro $(x < 0) \wedge (6 - x > 0)$, tj. též na intervalu $(-\infty; 0)$ je funkce záporná.

Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí

Příklad 4

Jsou dány funkce $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.

NÁVOD: Řešíme rovnici $x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$, takže průsečíky obou křivek jsou body $A[-1; 0]$ a $B[2; 3]$.

Porovnání hodnot dvou funkcí

Příklad 5

Jsou dány funkce $f_1\colon y = x^2$, $f_2\colon y = 4 - 2x - x^2$. Porovnejte hodnoty těchto funkcí.

NÁVOD: $f_1(x) < f_2(x) \Leftrightarrow x^2 < 4 - 2x - x^2$, tj. $x^2 + x - 2 < 0$, tedy úvodní nerovnost platí na intervalu $(-2; 1)$; podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1.

3.3 Vlastnosti funkcí

Omezenost

Definice 3.3.1

Funkce f se nazývá (*shora*, *zdola*) *omezená na množině* $M \subset D(f)$, právě když tuto vlastnost má množina $f(M)$. Nazývá se (*shora*, *zdola*) *omezená*, právě když tuto vlastnost má množina $H(f)$.

Např. funkce $y = x^2$ je omezená zdola, není omezená shora a není omezená, ale na množině $\langle -10; 10\rangle$ je omezená.

Je-li funkce f omezená na M, existují $K, L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $f(M) \subset \langle K, L\rangle$. Je-li funkce omezená, je omezená na každé množině $M \subset D(f)$.

Supremum množiny $f(M)$ nazýváme *supremum funkce* na množině M a označujeme $\sup\limits_{x\in M} f(x)$; podobně $\inf\limits_{x\in M} f(x)$. Má-li množina $f(M)$ největší prvek, pak toto číslo nazýváme *největší hodnota funkce* f na množině M nebo též *globální* (*absolutní*) *maximum* funkce f na množině M; značí se $\max\limits_{x\in M} f(x)$, podobně $\min\limits_{x\in M} f(x)$. Pokud $M = D(f)$, pak označení $x \in M$ v indexech vynecháváme.

Pokud pro nějaké prstencové okolí $P(x_0) \subset D(f)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí: $\forall x \in P(x_0)$ je $f(x) \geqq f(x_0)$, hovoříme o *lokálním minimu* funkce f v bodě x_0, v případě ostré nerovnosti hovoříme o *ostrém lokálním minimu.* Analogicky zavedeme (ostré) lokální maximum.

Monotónnost

Definice 3.3.2

Funkce f se nazývá *rostoucí* (*klesající*, *neklesající*, *nerostoucí*) *na množině* $M \subset \subset D(f)$, právě když $\forall x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > > f(x_2)$, $f(x_1) \leqq f(x_2)$, $f(x_1) \geqq f(x_2)$).

Funkci f rostoucí na $D(f)$ nazýváme *rostoucí* (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce *klesající*, *neklesající*, *nerostoucí.* Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce *ryze monotónní*; souhrnný název pro všechny čtyři uvedené druhy funkcí je funkce *monotónní.*

Např. funkce $y = 1/x$ je klesající na intervalu $(-\infty; 0)$ a je klesající i na intervalu $(0; +\infty)$, ale není klesající (tj. není klesající na $D(f)$).

Kromě monotónnosti na množině, což je globální vlastnost funkce, se zavádí i pojem monotónnosti v bodě jako vlastnost lokální. Uvedeme definici jen pro funkci rostoucí, další tři případy monotónnosti se formulují analogicky.

Definice 3.3.3

Funkce f se nazývá *rostoucí v bodě* $x_0 \in D(f)$, právě když $\exists P(x_0-), P(x_0+) \subset D(f)$ tak, že $\forall x \in P(x_0-)$ platí $f(x) < f(x_0)$ a $\forall x \in P(x_0+)$ platí $f(x_0) < f(x)$.

Příklad 1

Podobně definujte funkci *klesající* (*nerostoucí*, *neklesající*) *v bodě* x_0 a dále funkci *rostoucí*, *klesající*, *nerostoucí* a *neklesající v bodě* x_0 *zleva* resp. *zprava.* (Tuto vlastnost vyšetřujeme zejména v krajních bodech intervalů.)

Věta 3.3.1 (vztah monotónnosti v bodě a na intervalu)

Funkce f definovaná na intervalu (a, b) je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající), právě když má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.

DŮKAZ: Princip důkazu pro f rostoucí: Nechť je f rostoucí na (a, b). Zvolíme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ a jeho okolí $P(x_0) \subset (a, b)$. Je-li $x_1 \in P(x_0-)$, $x_2 \in P(x_0+)$, je $x_1 < x_0 < x_2$ a monotónnost v bodě x_0 plyne z monotónnosti na (a, b).

Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b). Zvolíme dva body $x_1 < x_2$ a dokážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$. Pro každé x' z jistého $P(x_1+) \subset (a, b)$ je $f(x_1) < f(x')$. Nechť m je supremum množiny M všech takových x'. Kdyby $m < b$, bylo by $m \in M$. Ale i v m je f rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema $\forall P(m-)$ existuje bod $x' \in P(m-) \subset M$, tedy $f(x_1) < f(x') < f(m)$. Současně by existovalo pravé okolí $P(m+) \subset (a, b)$ tak, že by pro všechny jeho body x'' platilo $f(x'') > f(m) > f(x_1)$, tj. $x'' \in M$, $x'' > m$ a to je spor s 1. vlastností suprema. Proto $m = b$, takže $x_2 \in M$ a $f(x_1) < f(x_2)$.

Např. funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je rostoucí v bodě 0.

Parita

Definice 3.3.4
Funkce f se nazývá *sudá* (*lichá*), právě když $\forall x \in \mathbb{R}$ platí: jestliže $x \in D(f)$, potom $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Příklad sudé funkce: $y = \cos x$, příklad liché funkce: $y = \sin x$.

Příklad 2
Dokažte, že funkce $y = 3x^2 - 5$, $y = |x|$ a Dirichletova funkce χ jsou sudé a že $y = 2x^3 + x$, $y = x|x|$ a $y = \operatorname{sgn} x$ jsou funkce liché.

Pro polynomické funkce platí: jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá, jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.

Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost

Funkce f se nazývá *periodická*, právě když $\exists p \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

1. jestliže $x \in D(f)$, potom $(x \pm p) \in D(f)$,
2. $\forall x \in D(f)$ platí $f(x \pm p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá *perioda* funkce f.

Je-li p perioda funkce f, je $\forall k \in \mathbb{N}$ také číslo kp periodou funkce f. Nejmenší perioda p_0, pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce f. Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí: $y = \sin x$ ($p_0 = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$ ($p_0 = \pi$).

Příklad 3
Dokažte, že funkce $y = x - \lfloor x \rfloor$ je periodická s periodou $p_0 = 1$ a že Dirichletova funkce χ je periodická a periodou je každé kladné racionální číslo různé od nuly; zde p_0 neexistuje.

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, např. „periodičnost vpravo“, tj. tak, že v definici místo $(x \pm p)$ uvažujeme jen $(x + p)$.

3.4 Operace s funkcemi

a) *Rovnost funkcí*: Řekneme, že platí $f = g$, právě když $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí $(x, y) \in f$ a současně $(x, y) \in g$. Obráceně, je-li $f \neq g$, znamená to, že buď $D(f) \neq D(g)$ nebo $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$ tak, že $f(x') \neq g(x')$.
b) *Částečné uspořádání*: Je-li F množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na M, definuje se na F částečné uspořádání nerovností $f < g$.

Příklad 1

Definujte nerovnost $f < g$ na M a objasněte její geometrický význam.

Např. funkce $y = |x|$ a funkce $y = x + 1$ nejsou srovnatelné na $\mathbb{R}$, ale na $(0; +\infty)$ ano.

c) *Zúžení* (*restrikce*) *funkce*: Mějme funkci f; její *restrikcí* nazveme funkci g takovou, že $D(g) \subset D(f)$ a na $D(g)$ je $g(x) = f(x)$.

d) *Algebraické operace*: $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ se definuje $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ (pokud $g(x) \neq 0$.

e) *Skládání funkcí*: Mějme funkce f, φ a nechť $H(\varphi) \subset D(f)$. Pak složenou funkci $F = f \circ \varphi$ definujeme takto: $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, přičemž funkci f nazýváme *vnější funkce* a funkci φ *funkce vnitřní*.

Např. ve složené funkci $y = \sin 2x$ je vnější funkce $y = \sin u$, vnitřní funkce $u = 2x$. Funkce může být složena i vícekrát, např. $y = \mathrm{e}^{\sin(3x+1)}$.

Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné. Máme-li např. funkci $y = 1 - x$ a dosadíme $x = \sin t$, dostáváme složenou funkci $y = 1 - \sin t$. Zvláštním případem složené funkce je $|f|$. Vnější funkce je $y = |z|$, vnitřní funkce $z = f(x)$.

Příklad 2

Znázorněte graf funkce $y = |x^2 - 2x|$.

Funkce prostá

Definice 3.4.1

Funkce f se nazývá *prostá na* $M \subset D(f)$, právě když $\forall x_1, x_2 \in M$ platí: jestliže $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$; a nazývá se *prostá*, právě když je prostá na $D(f)$. Množina M, na níž je funkce prostá, se nazývá jejím *oborem prostoty*.

Např. funkce $y = x^2$ není prostá, ale je prostá třeba na intervalu $\langle 0; +\infty)$, který je jejím oborem prostoty.

Věta 3.4.1 (vztah prostoty a ryzí monotónnosti)

Je-li funkce ryze monotónní na M, je prostá na M.

Důkaz: plyne z toho, že z $x_1 < x_2$ plyne $x_1 \neq x_2$ a stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností „$<$“, „$>$“ nerovnost „$\neq$“.

Obrácený vztah neplatí, existují prosté funkce, které nejsou monotónní, např. funkce $y = 1/x$. Prostota funkce f je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace f^{-1} byla zobrazením a tedy funkcí.

3.5 Funkce inverzní

Definice 3.5.1

Inverzní zobrazení f^{-1} k prosté funkci (na M) f nazýváme *inverzní funkce*.

Je-li tedy funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí $(x, y) \in f$, právě když $(y, x) \in f^{-1}$. Přitom $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$. Je-li f prostá na M, pak inverzní funkce má $D(f^{-1}) = f(M)$, $H(f^{-1}) = M$. Na M platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a na $f(M)$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Geometrický význam: Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

Např. funkce $f\colon y = x^2 - 1$ je prostá na $M = \langle 0; +\infty)$, $f(M) = \langle -1; +\infty)$. Inverzní funkce f^{-1} je definována na $\langle -1; +\infty)$ a platí $x = y^2 - 1$ tj. $y = \sqrt{x+1}$. Pro $x \in \langle 0; +\infty)$ je $f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$, pro $x \in \langle -1; +\infty)$ je $f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x$.

Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť $(f^{-1})^{-1} = f$. Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky $y = x$ (např. funkce $y = 1/x$, $y = a - x$, $y = x$).

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

Věta 3.5.1 (o monotónnosti inverzní funkce)
Je-li funkce f rostoucí (klesající), je funkce f^{-1} také rostoucí (klesající).

Důkaz: Nechť funkce $y = f(x)$ je rostoucí. Je-li $y_1 < y_2$, pak nemůže platit $x_1 > x_2$, protože z toho by plynulo $y_1 > y_2$.

3.6 Rozšíření pojmu funkce

Pojem funkce se v matematice používá i v širším pojetí, zejména jako zobrazení z nějaké množiny M do množiny $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, případně i do jiné množiny.

a) Je-li M množina uspořádaných n-tic $P = (x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel, je funkce $y = f(P)$ reálnou *funkcí n proměnných*.

b) Je-li M množina (systém) množin X, pak lze definovat různé *množinové funkce*. Např.:
   - Jsou-li množiny $X \in M$ konečné, definuje se množinová funkce n, kde $n(X)$ je *počet prvků* množiny X.
   - Jsou-li X křivky resp. rovinné obrazce resp. tělesa, definují se množinové funkce $s(X)$ (*délka křivky*) resp. $P(X)$ (*obsah – míra rovinného obrazce*) resp. $V(X)$ (*objem – míra tělesa*).

c) Práce s texty.

   V souvislosti s počítači vznikla větší potřeba práce s texty; množinu všech textů označíme T. Příklady *textových konstant*: 'Praha', 'JAN HUS', ''. Apostrofy zde uvedené mají úlohu omezovačů, tj. nezapočítávají se do textu. První z uvedených konstant má tedy 5 znaků, druhá konstanta má 7 znaků (také mezera mezi slovy je znak) a třetí konstanta je tzv. prázdný text. Mezera je jedním ze znaků, takže např. 'Praha' je jiný text než 'Praha ' (tento text má 6 znaků; ve druhém slově je navíc mezera), tedy 'Praha' $\neq$ 'Praha '.

   Jsou-li x, y *textové proměnné* na množině T, lze položit (dosadit) např. $x =$ 'Praha', $y =$ 'Zlín'; pak $x < y$ (tj. 'Praha' $<$ 'Zlín'), neboť jde o abecední uspořádání. Běžnou operací s texty je *spojování textů*. Má-li např. textová proměnná x hodnotu 'Praha ' a proměnná z hodnotu '4', pak $x + z =$ 'Praha 4'.

V programovacích jazycích se setkáváme s funkcemi jako Length: $T \to N_0$ (délka textu); např. Length('Praha') = 5, Length('') = 0, pro y = 'Zlín' je Length(y) = 4;

Pos: $T \times T \to N_0$ (pozice podtextu v textu), Pos('rah', 'Praha') = 2;

Copy: $T \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$ (zkopírování vybrané části textu), Copy('Praha', 2, 3) = = 'rah'.

d) Logické funkce pracují s množinou $B = \{\text{true}, \text{false}\}$ Booleovských konstant. Můžeme třeba vytvořit funkci Sude: $\mathbb{Z} \to B$, která rozhoduje, zda její argument je číslo sudé; pak např. Sude(-128) = true, Sude(27) = false.

Kapitola 4

Elementární funkce

4.1 Přehled elementárních funkcí

Jde o pojem spíše historický než matematický. Vymezuje se několik *základních elementárních funkcí* a z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce, jež nazýváme *elementární funkce*. Platí, že s každou funkcí patří do množiny elementárních funkcí vždy i funkce inverzní, pokud ovšem existuje.

Základní elementární funkce

- Funkce *konstantní* ($y = c$).
- Funkce *mocninné* ($y = x^r$ pro libovolné $r \in \mathbb{R}$, patří sem tedy i odmocniny a také např. nepřímá úměrnost).
- *Goniometrické* funkce ($y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{cotg} x$) a funkce *cyklometrické* ($y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$).
- *Exponenciální* funkce ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$) a funkce *logaritmické* ($y = \log_a x$).
- *Hyperbolické* funkce ($y = \sinh x, y = \cosh x, y = \operatorname{tgh} x, y = \operatorname{cotgh} x$) a funkce *hyperbolometrické* ($y = \operatorname{argsinh} x, y = \operatorname{argcosh} x, y = \operatorname{argtgh} x, y = \operatorname{argcotgh} x$).

Algebraické funkce je název pro elementární funkce, které vzniknou z funkcí konstantních a z funkce $f(x) = x$ užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické *funkce racionální*. Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme *iracionální*. Zvláštní případy algebraických funkcí: např. *celá racionální funkce* neboli funkce *polynomická* (algebraický polynom) a *lomená racionální funkce* patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají *transcendentní*; ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, ale též mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (např. pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.) a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni. (Uvidíme zejména, že elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru. Derivací elementární funkce je opět elementární funkce. Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární, viz kap. 11.)

Příklady funkcí, které nejsou elementární

Dirichletova funkce $\chi(x)$, funkce $\operatorname{sgn} x$, funkce $\lfloor . \rfloor$ „dolní celá část reálného čísla“, funkce $\{.\}$ „desetinná část“ definovaná vztahem $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Příklad 1

Znázorněte graficky funkci $y = \{x\}$ a dokažte, že je periodická s periodou 1.

Ani absolutní hodnota není považována za elementární funkci. Elementárními funkcemi nejsou ani jiné funkce definované „po částech“, jako např. funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0 \\ x^2 & \text{pro } x \geqq 0 \end{cases}.$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární“).

4.2 Algebraické funkce

Při popisu jednotlivých funkcí nebo druhů funkcí někdy použijeme i některé pojmy, které jsou obsahem až pozdějších kapitol, ale kde určitou úroveň jejich znalosti lze předpokládat, protože jsou obsahem středoškolského učiva matematiky. Jde tedy o jakési rozšířené zopakování středoškolského učiva.

Mocniny s přirozeným a celým exponentem

Mocninu a^n pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme jako součin n činitelů a. Z této definice ihned plynou vlastnosti mocnin, zejména

Pro všechna reálná čísla a, b, a pro všechna přirozená čísla r, s platí:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$ (je-li $a \neq 0$, $r > s$),
3. $(a^r)^s = a^{rs}$,
4. $(ab)^r = a^r b^r$,
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (je-li $b \neq 0$),
6. $a^r = b^r$, právě když $a = b$ (pokud $a > 0$ a $b > 0$),
7. $a^r = a^s$, právě když $r = s$ (pokud $a > 0$, $a \neq 1$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi:

8. $\forall a, b > 0$: $a^r < b^r$, právě když $a < b$,
9. $\forall a > 1, r < s$ platí $a^r < a^s$;
   $\forall a \in (0, 1)$, $r < s$ platí $a^r > a^s$,

Chceme-li rozšířit pojem mocniny rozšířením číselného oboru exponentu, přichází nejprve exponent 0. Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti 1.–5., je třeba podle 2. definovat

$$\forall a \neq 0 \quad \text{platí} \quad a^0 = 1.$$

Vlastnost 2. pak platí pro $r \geqq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována. Vlastnosti 6. a 8. ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Dalším krokem je rozšíření pojmu mocnina pro exponent, jímž je celé číslo. Klíčovou vlastností je opět 2., podle níž se definuje (položíme-li $r = 0$, $s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{je} \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Vlastnost 2. pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost 8. nabude tvaru

8'. $\forall r > 0$ $\forall a, b > 0$: $a^r < b^r$, právě když $a < b$,
    $\forall r < 0$, $\forall a, b > 0$: $a^r > b^r$, právě když $a < b$.

Odmocniny

Definice 4.2.1

Pro každé přirozené číslo n definujeme n-tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x, pro něž platí $x^n = a$. Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, např. $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Existence n-té odmocniny se zdá být zřejmá. Toto zdání podporují jednoduché příklady jako $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$. Jestliže však vyšetřujeme méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku, zda n-tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta 4.2.1 (o existenci a jednoznačnosti n-té odmocniny)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geqq 0$, existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \geqq 0$, takové, že $x^n = a$.

Příklad 1

Zjednodušte roznásobením výraz $U = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$.

Příklad 2

Zjednodušte umocněním a usměrněním $V = \left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)^2 / \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$.

K základním vlastnostem odmocnin patří:

Věta 4.2.2

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geqq 0$, a pro každá $m, n, r \in \mathbb{N}$ platí

1. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$,
2. $\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}$.

Důkaz: 1. Pro levou a pravou stranu rovnosti platí: $L = x^m$, kde podle definice $x^n = a$; po umocnění na m-tou máme $x^{mn} = a^m$. $P = y$, kde podle definice je $y^n = a^m$. Je tedy $x^{mn} = y^n$ a z toho $x^m = y$, takže $L = P$.

2. $L = x$, kde $x^{nr} = a^r$, což dává $x^n = a$. $P = y$, kde $y^n = a$. Tedy $x^n = y^n$ a z toho $x = y$, tj. $L = P$.

Mocniny s racionálním exponentem

Chceme-li rozšířit pojem mocniny na exponent racionální, vyjdeme ze základní vlastnosti n-té odmocniny z čísla a: $x^n = a$. Položíme tedy $x = a^t$ a po umocnění na n-tou je $a = x^n = a^{tn}$, tedy $tn = 1$, $t = 1/n$. To vede k definici $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ platí

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s.

Pojem mocniny lze rozšířit na libovolné reálné exponenty, ale mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice 4.2.2

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $q \in \mathbb{Q}'$. Pak definujeme $a^q = \sup\limits_{r \in \mathbb{Q}, r<q} \{a^r\}$, pro $0 < a < 1$ definujeme $a^q = \inf\limits_{r \in \mathbb{Q}, r<q} \{a^r\}$

Výše uvedené vlastnosti mocnin 1.–7., 8'., 9. platí pro libovolné reálné exponenty.

Polynomické funkce

Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ je algebraický polynom s reálnými koeficienty. Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n-tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$. Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá, pokud obsahuje jen sudé mocniny x, je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá. Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P, Q nejvýše n-tého stupně se rovnají v $n+1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\mathbb{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

Nyní uveďme některé zvláštní případy polynomických funkcí.

Mocninná funkce $f\colon y = x^n$ (s přirozeným exponentem n).

Grafem je parabola n-tého stupně. Pro n sudé je f sudá funkce, která pro $n \geqq 2$ je na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 0; +\infty)$ rostoucí, tedy v bodě 0 má minimum, $H(f) = \langle 0; +\infty)$, funkce je konvexní na $\mathbb{R}$. Při definici inverzní funkce se za obor prostoty bere interval $\langle 0; +\infty)$. Inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ je tedy definována na intervalu $\langle 0; +\infty)$ a stejný je i obor hodnot.

Pro n liché je f lichá funkce, je rostoucí na $\mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Pro $n \geqq 3$ je f konkávní na $(-\infty; 0\rangle$ a konvexní na $\langle 0; +\infty)$, v bodě 0 má inflexi. Neboť f je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, je inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ definována na $\mathbb{R}$ a má týž obor hodnot. Z tohoto důvodu je možné a účelné pro lichá n definovat n-tou odmocninu i ze záporných čísel; např. $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Konstantní funkce

Jsou dány rovnicí $y = k$, kde k je konstanta; $H(f) = \{k\}$. Jsou to funkce současně neklesající i nerostoucí, sudé ($y = 0$ je současně i lichá). V každém bodě mají neostré lokální maximum i neostré lokální minimum. Grafem každé konstantní funkce $y = k$ v kartézské soustavě souřadnic je přímka rovnoběžná s osou x, resp. osa x ($y = 0$). V polární soustavě souřadnic je grafem konstantní funkce $\varrho = r$ (kde $r > 0$), $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ kružnice se středem v počátku a s poloměrem r.

Lineární funkce

Jsou dány rovnicí $y = kx + q$, kde $k \neq 0$, q jsou reálné konstanty; $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$. Pro $k > 0$ to jsou funkce rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $q = 0$ jsou liché. Grafem každé lineární funkce v kartézské soustavě souřadnic je přímka, jež není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá. Konstanta k je *směrnicí* přímky, tj. $k = \operatorname{tg}\varphi$, kde φ je velikost orientovaného úhlu určeného osou x a touto přímkou; zpravidla bereme $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi)$. Parametr q znamená *úsek na ose y*.

Pro $q = 0$ se lineární funkce nazývá též *přímá úměrnost*, kartézským grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem. Pro lineární funkci (zpravidla pro $q \neq 0$) se používá též název *lineární závislost*.

Grafem lineární funkce v polární soustavě souřadnic je Archimedova spirála.

Protože lineární funkce jsou ryze monotonní, jsou i prosté. Funkce inverzní jsou opět lineární. Funkce $y = a - x$ a funkce $y = x$ jsou samy k sobě inverzní.

Lineární funkce je velmi důležitá v řadě problémů, v nichž se složitější průběh nějaké funkce nahrazuje (aproximuje) průběhem lineárním; např. při lineární interpolaci funkcí.

Příklad 3

Jsou dány dvě tabulkové hodnoty funkce f: $f(4{,}75) = 0{,}6758$, $f(4{,}80) = 0{,}6803$. Pomocí lineární interpolace stanovte $f(4{,}78)$.

Návod: Danými dvěma body proložíme přímku, její rovnice je $y = 0{,}6758 + \frac{0{,}6803 - 0{,}6758}{4{,}80 - 4{,}75}(x - 4{,}75)$, tj. $y = 0{,}6758 + 0{,}09(x - 4{,}75)$; $f(4{,}78) = 0{,}6758 + 0{,}09 \cdot 0{,}03 = 0{,}6758 + 0,0027 = 0{,}6785$.

Kvadratické funkce

Jsou dány rovnicí $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, b, c jsou konstanty; $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f)$ je pro $a > 0$ interval typu $\langle m, +\infty)$, pro $a < 0$ je to interval typu $(-\infty, m\rangle$, kde m je minimum resp. maximum funkce f. Tohoto ostrého lokálního extrému nabývá funkce f v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Grafem každé kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic je (kvadratická) parabola; pro funkci $y = ax^2$ je její vrchol v počátku soustavy souřadnic.

Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $P(x)/Q(x)$. Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Příklad 4

Je dána funkce

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 7}{x^2 + 3}.$$

Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.

Návod: Po provedeném dělení dostaneme

$$y = x - 2 + \frac{3x - 1}{x^2 + 3}.$$

Příklad 5

Je dána funkce
$$y = \frac{x^5 - 1}{x^2 + 1}.$$
Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete dělení.

Návod: V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme tím
$$y = x^3 - x + \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Lineární lomené funkce

Jsou to funkce s rovnicí $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou reálné konstanty, přičemž platí $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$; $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$. Jsou to funkce prosté, grafem v kartézské soustavě souřadnic je rovnoosá hyperbola. Inverzní funkce jsou téhož typu, tj. jsou též lineární lomené. Zvláštním případem je funkce zvaná *nepřímá úměrnost* s rovnicí $y = \frac{a}{x}$, která je sama k sobě inverzní,

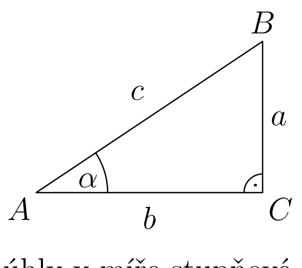
4.3 Goniometrické funkce a funkce cyklometrické

Pravoúhlé trojúhelníky

Podobnost trojúhelníků jako relace ekvivalence na množině všech pravoúhlých trojúhelníků definuje rozklad této množiny na třídy. Z vlastnosti podobnosti plyne, že každá třída těchto trojúhelníků je určena jedním vnitřním ostrým úhlem a že všechny trojúhelníky z téže třídy ekvivalence se shodují v poměru odpovídajících si stran. Toho se využívá k definici *goniometrických funkcí ostrého úhlu.*

Definice 4.3.1

V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek a, b, přeponou c a vnitřním úhlem α mezi stranami b a c definujeme
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Tato definice pracuje zpravidla s úhly v míře stupňové.

Odtud
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$
Z trojúhelníku ABC dále plyne:
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Zvláštní hodnoty

Některé zvláštní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit (při použití Pythagorovy věty)

- z rovnostranného trojúhelníku s doplněnou výškou: $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. (podobně pro „kofunkce“ $\cos\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$).
- ze čtverce s úhlopříčkou: $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = 1$.

Na této úrovni se přijímá jako důsledek definice, že když α roste od $0°$ do $90°$, tak funkce sinus roste od 0 do 1, funkce tangens roste od 0 do $+\infty$, funkce kosinus klesá od 1 k 0 a funkce kotangens klesá od $+\infty$ k 0. Rovněž pomocí názoru se na této úrovni snese rozšíření funkcí: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{cotg} 0°$ není definován; podobně $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90°$ není definován, $\operatorname{cotg} 90° = 0$.

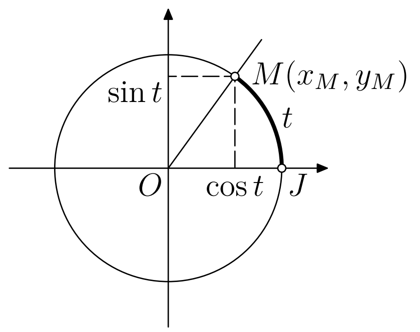
Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Tato definice se obyčejně spojuje již s používáním míry obloukové, přičemž přepočet mezi velikostí úhlu α v míře stupňové a velikostí x v míře obloukové je dán vztahy $x = \pi\frac{\alpha}{180°}$, $\alpha = 180°\frac{x}{\pi}$.

Definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice přináší jeden didaktický problém. Chceme-li zachovat označení x pro velikost úhlu v míře obloukové, musíme volit jiné označení pro souřadnicové osy, např. u, v. Chceme-li však zachovat označení os x, y, musíme volit jiné označení pro velikost úhlu, např. t, tedy nemůžeme přímo definovat $\sin x$, přestože právě tento zápis v matematické analýze nejvíce používáme.

Definice 4.3.2

Nechť O je počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, J jednotka na ose x, t reálné číslo a $M(x_M, y_M)$ koncový bod oblouku jednotkové kružnice délky t s počátkem J (pro $t \geqq 0$ uvažujeme oblouk orientovaný proti směru hodinových ručiček, pro $t < 0$ oblouk délky $|t|$ ve směru hodinových ručiček). Potom hodnota funkce $\cos t$ je definována jako x-ová souřadnice bodu M, $\cos t = x_M$, a hodnota funkce $\sin t$ je definována jako y-ová souřadnice bodu M, $\sin t = y_M$.



Vlastnosti plynoucí z definice funkcí

Z definice máme: $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = H(\cos) = \langle -1; 1\rangle$. Z definice plyne rovněž periodičnost obou funkcí s periodou 2π: Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$, $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$.

Z běžných vlastností lze dále přímo z jednotkové kružnice zjistit:

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;

- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2, \dots$, zejména nulové body: $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ (pro všechna $k \in \mathbb{Z}$), $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (pro všechna $k \in \mathbb{Z}$);
- paritu funkcí, tj. pro všechna $t \in \mathbb{R}$: $\sin(-t) = -\sin t$ (funkce sinus je lichá), $\cos(-t) = \cos t$ (funkce kosinus je sudá);
- vzorce pro změnu velikosti úhlu o π: pro všechna $t \in \mathbb{R}$ $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$, $cos(t \pm \pm \pi) = -\cos t$;
- parametrické vyjádření kružnice: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0; 2\pi)$.

Ve školské matematice se nejčastěji setkáváme s označováním velikosti úhlů řeckými písmeny $\alpha, \beta, \dots$ a s mírou stupňovou, v matematické analýze se ponejvíce pracuje s mírou obloukovou (s reálnými čísly) a s x jako označením velikosti úhlů v míře obloukové, tedy $\sin x$, $\cos x, \dots$

Funkce tangens a kotangens

Definice funkcí tangens a kotangens vychází z funkcí sinus a kosinus.

Definice 4.3.3

Nechť k je libovolné celé číslo. Funkci *tangens* definujeme pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (tedy pro ta reálná čísla x, pro která $\cos x \neq 0$) a funkci *kotangens* definujeme pro $x \neq k\pi$ (tam, kde $\sin x \neq 0$) vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce tangens je definována pro na množině $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce kotangens je definována pro všechna $x \neq k\pi$, tj. na množině $D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.

Z definice funkcí tangens a kotangens a z vlastností funkcí sinus a kosinus dostáváme zejména tyto základní vlastnosti:

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, zejména nulové body: $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2} = 0$;
- paritu funkcí, tj. $\forall x \in D(f)$: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ (funkce liché);
- periodičnost funkcí: $\forall x \in D(f)$: $\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg}(x \pm \pi) = \operatorname{cotg} x$;

Věta 4.3.1

Nechť $t \in (0; +\frac{\pi}{2})$, potom platí

$$\sin t < t < \operatorname{tg} t.$$

Důkaz: První nerovnost plyne z faktu, že vzdálenost bodu M od osy x je y_M, proto $\sin t < t$. Druhou nerovnost dostaneme porovnáním obsahů kruhové výseče JOM a trojúhelníku ohraničeného rameny úhlu JOM a tečnou k jednotkové kružnici v bodě J.

Vzorce pro goniometrické funkce

Postupně lze vyvodit další skupiny vzorců. Je-li g libovolná ze čtyř základních goniometrických funkcí a označíme-li velikosti úhlů α, $\beta, \dots$, jak je to běžné na střední škole, jde o vzorce, kde

- $g(\alpha \pm \beta)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlů α, β, např.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;\ \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$$

  (pro která α, β platí výše uvedené vzorce?);
- $g(2\alpha)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí jednoduchého úhlu α, např.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

  k těmto vzorcům řadíme i opačné

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

- $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlu α,

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

  tyto vzorce se využívají např. při integraci goniometrických funkcí;
- $g(\alpha) \pm g(\beta)$ se vyjádří jako součin funkcí, např.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

- při integraci součinu goniometrických funkcí se využívá obráceného vztahu a $g(\alpha)\cdot g(\beta)$ vyjadřujeme jako součet nebo rozdíl goniometrických funkcí, např.

$$\sin m\alpha \cdot \cos n\alpha = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha];$$

- velmi užitečný je vzorec

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Funkce cyklometrické

Pro základní goniometrické funkce se volí obor prostoty P, přičemž obor hodnot H se nemění:

$$\begin{array}{lll}
\sin x\colon & P = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle, & H = \langle -1; 1\rangle; \\
\cos x\colon & P = \langle 0; \pi\rangle, & H = \langle -1; 1\rangle; \\
\operatorname{tg} x\colon & P = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), & H = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}; \\
\operatorname{cotg} x\colon & P = (0; \pi), & H = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}.
\end{array}$$

Při definici cyklometrických funkcí se vymění úloha množin P a H.

Definice 4.3.4

Goniometrické funkce uvažujme na jejich oborech prostoty. Inverzní funkcí (s definičním oborem D) k funkci:

- $\sin x$ je funkce $\arcsin x$ (arkussinus), $D = \langle -1; 1\rangle$;
- $\cos x$ je funkce $\arccos x$ (arkuskosinus), $D = \langle -1; 1\rangle$;
- $\operatorname{tg} x$ je funkce $\operatorname{arctg} x$ (arkustangens), $D = (-\infty; +\infty)$;
- $\operatorname{cotg} x$ je funkce $\operatorname{arccotg} x$ (arkuskotangens), $D = (-\infty; +\infty)$.

Přitom si uvědomíme, že např. $\forall x \in \langle -1; 1\rangle$, $\forall y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$, znamenají zápisy $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ přesně totéž.

Funkce $\arcsin x$ se vyskytuje v úlohách na určení definičního oboru funkcí.

Příklad 1

Určete definiční obor funkce $f\colon y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3x+2}}$.

Návod: Čitatel je definován na intervalu $\langle -1; 1\rangle$, jmenovatel na množině $x > -\frac{2}{3}$, tedy na intervalu $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Definiční obor $D(f)$ je průnikem obou intervalů, tedy $D(f) = (-\frac{2}{3}; 1\rangle$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jelikož inverzní funkce zachovává monotónnost funkce výchozí, jsou funkce $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ ve svých definičních oborech rostoucí, $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.

Ze vzorců pro funkce goniometrické lze odvodit odpovídající vzorce pro funkce cyklometrické, např:

Protože $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$, dostaneme po dosazení $\cos t = x$, (tedy i $t = \arccos x$): $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow \forall x \in \langle -1; 1\rangle$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Podobně též $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Proto se z uvedených cyklometrických funkcí používá obvykle vždy jen jedna z každé dvojice, zpravidla funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$.

Jestliže ve vzorci pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ položíme $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, tj. $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, dostaneme vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

4.4 Funkce exponenciální a logaritmické

Exponenciální funkce

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. *Exponenciální funkce* jsou definovány rovnicí $y = a^x$, $D(f) = \mathbb{R}$ (plyne to z definice mocniny pro libovolný reálný exponent, viz 4.2.c).

Hodnotu mocniny s iracionálním exponentem, tedy exponenciální funkce pro iracionální hodnotu nezávisle proměnné x, lze najít i jako limitu posloupnosti a^r, kde $r \in \mathbb{Q}$, $r \to x$. Tak třeba 2^π je limitou posloupnosti 2^r, kde r např. tvoří posloupnost dolních desetinných aproximací čísla π: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; … Pak 2^r dává posloupnost 8; 8,5741…; 8,8152…; 8,8213…; 8,8244…; 8,82496…, takže např. $2^\pi \approx 8{,}8250$.

Podobně (užitím suprema množin) bychom mohli dokázat, že každé kladné číslo je při daném základu a hodnotou nějaké mocniny, tj. $H(f) = (0, +\infty)$.

Pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí, jak plyne z vlastnosti mocnin 4.2 (8). Pro $a < 1$ je exponenciální funkce klesající. V tomto případě je $(1/a) > 1$, pro každé $x_1 < x_2$ platí $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$ a po přechodu k převráceným hodnotám máme $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Pro $a \in (0, 1)$ je tedy $a^x = b^{-x}$, kde $b = 1/a > 0$.

Exponenciální funkci $y = a^x$ pro $a \in (0; 1)$ lze tedy nahradit exponenciální funkcí $y = b^{-x}$ pro $b > 1$ (která je klesající), a to vede k závěru, že v podstatě není třeba se zabývat exponenciálními funkcemi se základem $a < 1$.

Grafu exponenciální funkce v kartézské soustavě říkáme *exponenciála*. Všechny exponenciály procházejí bodem $[0; 1]$. Grafem exponenciální funkce v polární soustavě souřadnic je tzv. *logaritmická spirála*.

Zvlášť důležitá je exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$ označovaná někdy též $\exp x$.

Logaritmické funkce

Exponenciální funkce $f\colon y = a^x$ je pro $a > 0$ rostoucí (tedy i prostá) na celé množině $\mathbb{R}$, přičemž $H(f) = (0; +\infty)$. Existuje proto inverzní funkce $f^{-1}\colon x = a^y$, kterou nazýváme *logaritmická funkce* o základu a a kterou zapisujeme $y = \log_a x$; ta má $D(f^{-1}) = (0; +\infty)$, $H(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Hodnotu logaritmické funkce nazýváme *logaritmus*; někdy pojem logaritmus používáme i pro stručné označení logaritmické funkce. *Logaritmovat* nějaký výraz znamená určit jeho logaritmus.

Pro matematickou analýzu je nejdůležitější logaritmická funkce o základu e, pro niž máme zvláštní označení $\ln x = \log_\mathrm{e} x$ a název *přirozený logaritmus* (ln = logaritmus naturalis).

Z definice logaritmu plyne zejména:

- Zápis $x = a^y$ znamená přesně totéž jako $y = \log_a x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$, $\forall x > 0$: $a^{\log_a x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ (neboť $a = \mathrm{e}^{\ln a}$).

Z prostoty exponenciálních a logaritmických funkcí plyne:

- $a^K = a^L$, právě když $K = L$, $A = B (> 0)$, právě když $\log_a A = \log_a B$.

V obou těchto případech získáme závěr implikace *logaritmováním* jejího předpokladu.

Dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10, měl dříve výsadní postavení při numerických výpočtech (používání tabulek dekadických logaritmů), ale s rozšířením kalkulátorů a počítačů toto postavení ztratil.

Všechny logaritmické funkce o základu $a > 1$ jsou rostoucí a jejich grafy procházejí bodem $[1; 0]$ na ose x.

Příklad 1

Načrtněte grafy funkcí $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$.

Z výše uvedené vlastnosti plyne, že místo exponenciálních funkcí $y = a^x$ o základu a lze uvažovat jen exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^{kx}$ o základu e. Podobně na sebe lze převádět logaritmy o různých základech. Převodní vztahy lze odvodit např. takto (uvažujme logaritmus přirozený a logaritmus o základu a):

Rovnost $x = a^{\log_a x}$ logaritmujeme při základu e a dostaneme $\ln x = \ln a \log_a x$.

Jestliže logaritmujeme rovnost $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ při základu a, dostaneme $\log_a x = \log_a \mathrm{e} \cdot \ln x$.

Z vlastností exponenciálních funkcí plynou ihned vlastnosti funkcí logaritmických:

- $\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;
- $\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a(x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;
- $\forall x > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$: $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a x$.

4.5 Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Hyperbolické funkce patří mezi elementární funkce a jsou definovány pomocí funkcí exponenciálních takto:

Definice 4.5.1

Pro reálné číslo x definujeme funkce *hyperbolický sinus*, *hyperbolický kosinus*, *hyperbolický tangens* a *hyperbolický kotangens* předpisy

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Z definice je vidět, že pro první tři z těchto funkcí je $D(f) = \mathbb{R}$ (pro $\operatorname{tgh} x$ to plyne z toho, že $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cosh x > 0$). Lehce zjistíme, že funkce $\sinh x$ má jediný nulový bod pro $x_0 = 0$, takže $D(\operatorname{cotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obory hodnot a průběh: $H(\sinh) = \mathbb{R}$, funkce je rostoucí; $H(\cosh) = \langle 1; +\infty)$, funkce je klesající na $(-\infty; 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0; +\infty)$, v bodě 0 má minimum 1. $H(\operatorname{tgh}) = (-1; 1)$, funkce je rostoucí; $H(\operatorname{cotgh}) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, na intervalu $(-\infty; 0)$ funkce klesá od -1 k $-\infty$, na intervalu $(0; +\infty)$ funkce klesá od $+\infty$ k 1. Pro funkce hyperbolický tangens i hyperbolický kotangens jsou přímky $y = 1$ a $y = -1$ asymptotami, asymptotou grafu funkce hyperbolický kotangens je též osa y.

Příklad 1

Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \frac{1}{2}e^x$.

Příklad 2

Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \operatorname{tgh} x$, $y = \operatorname{cotgh} x$.

Graf funkce $y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$ v kartézské souřadnicové soustavě se nazývá *řetězovka*. Je to křivka, kterou vytváří řetěz (nepružná nit) volně zavěšený ve dvou bodech.

Hyperbolické funkce mají řadu vlastností velmi podobných vlastnostem funkcí goniometrických. Z definice funkcí lze odvodit např.

a) Funkce $\sinh x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cotgh} x$ jsou liché, funkce $\cosh x$ je sudá.

b) *Hyperbolická jednička*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

c) $\forall x \neq 0$

$$\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{cotgh} x = 1.$$

d) Součtové vzorce. Pro reálná x_1 a x_2 platí

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2,$$
$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \mp \sinh x_1 \sinh x_2,$$
$$\operatorname{tgh}(x_1 \pm x_2) = \frac{\operatorname{tgh} x_1 \pm \operatorname{tgh} x_2}{1 \pm \operatorname{tgh} x_1 \operatorname{tgh} x_2}.$$

Hyperbolické funkce se vyskytují zejména v aplikacích a také se používají při výpočtu neurčitých integrálů pomocí hyperbolických substitucí.

Hyperbolometrické funkce

Funkce $\sinh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$ jsou prosté, u funkce $\cosh x$ vezmeme za obor prostoty interval $\langle 0; +\infty)$. Pak lze definovat funkce inverzní (zvané *hyperbolometrické*)

- K funkci $\sinh x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argsinh} x$ (argument hyperbolického sinu), $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.
- K funkci $\cosh x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argcosh} x$ (argument hyperbolického kosinu), $D(f) = \langle 1; +\infty)$, $H(f) = \langle 0; +\infty)$.
- K funkci $\operatorname{tgh} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argtgh} x$ (argument hyperbolického tangens), $D(f) = (-1; 1)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
- K funkci $\operatorname{cotgh} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argcotgh} x$ (argument hyperbolického kotangens), $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Protože jsou hyperbolické funkce vyjádřeny pomocí exponenciální funkce, lze hyperbolometrické funkce vyjádřit pomocí funkce logaritmické, např.:

$$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Kapitola 5

Limita funkce

Limita funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Jsou na něm založeny další významné pojmy, jako je spojitost, derivace funkce, Riemannův integrál, délka křivky. S přímým praktickým použitím limity funkce v bodě se setkáme při vyšetřování průběhu funkce, např. při zjišťování asymptot grafu funkce.

5.1 Limita funkce podle Heineho

Hlavní myšlenkou tohoto přístupu je převedení pojmu limita funkce na pojem limita posloupnosti. Přímý přístup k zavedení pojmu limita funkce můžete najít v sekci 4.

Definice 5.1.1 (limita funkce podle Heineho)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Reálné číslo a nazveme *limitou funkce f v bodě x_0*, právě když pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to a$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{nebo} \quad f(x) \to a \text{ pro } x \to x_0.$$

Definice 5.1.2 (jednostranná limita funkce podle Heineho)

Nechť x_0 je levým (pravým) hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme *limitou funkce f v bodě x_0 zleva (zprava)*, právě když pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n < x_0$ $(x_n > x_0)$, $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to a$. Píšeme

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = a \quad \left(f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = a\right).$$

Příklad 1

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Příklad 2

Vypočtěte obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě $x = 0$.

Příklad 3

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Příklad 4

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0.

Definice 5.1.3 (vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$)

Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme *limitou funkce f v nevlastním bodě $+\infty$*, právě když pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \to +\infty$, platí $f(x_n) \to a$. Píšeme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, nebo $f(x) \to a$ pro $x \to +\infty$.

Příklad 5

Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.

5.2 Věty o limitách funkcí

Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností. Proto jsou některé formulovány velmi podobně.

Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

Věta 5.2.1

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta 5.2.2

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy existuje $P(x_0)$ a existují $K, L \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in P(x_0) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \langle K, L\rangle$.)

Věta 5.2.3 (o kladné limitě)

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (resp. zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (resp. záporná).

Věta 5.2.4 (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť jsou na M definovány funkce f, g, x_0 je hromadný bod M a platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$

Pak funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g (pro $g(x) \neq 0$, $b \neq 0$) mají limitu $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, a/b.

(Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a, b smysl; např. věta o součtu neplatí pro $a = +\infty$, $b = -\infty$.)

Věta 5.2.5

Nechť v jistém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

Věta 5.2.6

Nechť v jistém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leqq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Příklad 1

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věta 5.2.7 (o třech limitách)

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$, přičemž $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Pak existuje i $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ a je rovna a.

Věta 5.2.8 (o limitě monotónní funkce)

Nechť bod x_0 je levým hromadným bodem množiny $M = D(f) \cap P(x_0-)$ a funkce f je neklesající na M. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$. Je-li funkce f na M shora omezená, je tato limita konečná, není-li f na M shora omezená, je tato limita rovna $+\infty$.

Příklad 2

Vyslovte podobnou větu pro nerostoucí funkci a dále věty pro případ limity zprava.

Věta 5.2.9

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, právě když $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

Věta 5.2.10

Nechť a je reálné číslo, potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, právě když $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - a| = 0$.

Věta 5.2.11

Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:

- Existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a je rovna a.
- Existují $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny a.

Příklad 3

Užitím předcházející věty dokažte, že funkce $y = x + \frac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.

Věta 5.2.12

Nechť v jistém okolí $P(x_0)$ je $f(x) > 0$. Pak platí

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, právě když $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, právě když $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Věta 5.2.13

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ a v nějakém okolí $P(x_0)$ platí $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} a$ (resp. $\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn} a$). Pak platí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Věta 5.2.14

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f \cdot g)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a g je funkce omezená. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Věta 5.2.15 (o limitě složené funkce)

Mějme složenou funkci $f \circ \varphi$. Nechť:

1. existuje okolí $P(x_0) \subset D(\varphi)$ tak, že $\varphi(P(x_0)) \subset D(f)$,
2. existuje a jako $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$,
3. bod a je hromadným bodem $D(f)$ a existuje $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$,
4. bod x_0 není hromadným bodem množiny $\{x \in P(x_0); \varphi(x) = a\}$.

Pak existuje limita složené funkce $f \circ \varphi$ v bodě x_0 a platí $\lim\limits_{x \to x_0} f \circ \varphi(x) = b$.

5.3 Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí.

Užitím věty o třech limitách dokážeme, že $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Z vlastností funkce sinus víme, že pro každé $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $0 < \sin x < x$ a že funkce sin je lichá funkce. Proto pro všechna $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$-|x| \leqq \sin x \leqq |x|.$$

Z $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ plyne $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ a tedy podle věty o třech limitách platí

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Dále podle součtových vzorců pro goniometrické funkce platí pro $|x - x_0| \leqq \frac{\pi}{2}$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqq \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqq \left|2\, \frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Proto platí $\lim\limits_{x\to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$, což je ekvivalentní se vztahem

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Příklad 1

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Příklad 2

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ a že pro každý polynom $P(x)$ je $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Platnost předcházejících výsledků lze zobecnit na všechny elementární funkce takto:

Věta 5.3.1

Je-li f elementární funkce, $x_0 \in D(f)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Použití této věty nazýváme *využití spojitosti funkce k výpočtu limity* (viz následující kapitola).

Speciální limity

Z vlastností funkce sinus víme, že pro pro každé $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. Proto

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

a současně

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Obě funkce x a $\sin x$ jsou liché, proto pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, platí podle věty o třech limitách

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Podobnými úvahami (s využitím nerovností pro další elementární funkce) můžeme dokázat následující tvrzení

Věta 5.3.2 (významné speciální limity)
Platí následující limity

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^m - 1}{x} = m$ pro libovolné reálné číslo m,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Příklad 3
Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

Příklad 4
Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$.

Výpočet dle definice a vět o limitách

Příklad 5
Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^3 + 2x + 5}{2x^3 + x^2 + 7}$.

Příklad 6
Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6 \cdot 2^{3x} + 2^{x+1} + 5}{2^{3x+1} + 2^{2x} + 7}$.

Příklad 7
Vypočtěte $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, kde $x > 0$.

Příklad 8
Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

V kapitole o střední hodnotě diferenciálního počtu se seznámíme s další metodou výpočtu podobných limit – l'Hospitalovým pravidlem.

5.4 Limita funkce podle Cauchyho

V této sekci zavedeme pojem limita funkce přímo – pomocí vztahu mezi okolími. Vyslovíme dvě definice. Jedna uvažuje okolí ve smyslu topologickém, druhá ve smyslu metrickém.

Definice 5.4.1 (limita funkce podle Cauchyho I)
Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 limitu a*, právě když ke každému okolí $U(a)$ bodu a existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in D(f) \cap P(x_0)$ platí $f(x) \in U(a)$. Toto tvrzení můžeme zapsat symbolicky

$$\forall U(a)\ \exists P(x_0)\ \forall x \in D(f) \cap P(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a).$$

Poslední implikaci lze nahradit inkluzí $f\big(D(f) \cap P(x_0)\big) \subset U(a)$.

Definice 5.4.2 (limita funkce podle Cauchyho II)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 limitu a*, právě když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna $x \in D(f) \cap P(x_0, \delta)$ platí $f(x) \in U(a, \varepsilon)$.

Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot: místo $x \in D(f) \cap P(x_0, \delta)$ uvedeme $x \in D(f) \wedge (0 < |x - x_0| < \delta)$ a místo $f(x) \in U(a, \varepsilon)$ dáme $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Příklad 1

Zapište symbolicky definici limity podle Cauchyho II s využitím předcházejících vztahů.

Příklad 2

Znázorněte obsah Cauchyho definic na obrázku.

Příklad 3

Vyslovte Cauchyho definice vlastní limity v nevlastním bodě, nevlastní limity ve vlastním bodě a nevlastní limity v nevlastním bodě.

Věta 5.4.1 (Ekvivalence definic limity funkce)

Heineho definice a obě Cauchyho definice limity funkce jsou ekvivalentní.

Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho. Je tu však rozdíl v jejich použití. Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná, Cauchyho definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.

Kapitola 6

Spojitost funkce

Spojitost patří k nejvýznamnějším vlastnostem funkcí. Setkáváme se s ní – jako s požadovanou vlastností funkcí – ve všech částech matematické analýzy.

6.1 Pojem spojitosti funkce

Intuitivní představa spojitosti funkce f v bodě x_0 je spojena s grafem funkce: graf v tomto bodě „není přetržený“, funkce je v daném bodě definována a v malém okolí bodu x_0 jsou malé i změny funkce. Spojitost v bodě je lokální vlastnost funkce.

Definice 6.1.1 (spojitost funkce v bodě)

Říkáme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0, právě když

1. je v bodě x_0 definována (tj. $x_0 \in D(f)$),
2. [je-li x_0 hromadným bodem $D(f)$, pak] existuje vlastní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a současně platí
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Poznámka: Předpoklad v hranaté závorce zajišťuje, že x_0 není izolovaným bodem $D(f)$.

Příklad 1

Definujte spojitost v bodě x_0 zleva a spojitost zprava.

Příklad 2

Načrtněte graf funkce f tak, aby nastaly tyto jevy:

- v bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu,
- v bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní,
- v bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva,
- v bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva,
- v bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota,
- v bodě $x_6 \in D(f)$ je limita zleva větší než $f(x_6)$, limita zprava je menší než $f(x_6)$,
- v bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$,
- v bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$,
- v bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$.

Definice 6.1.2

Hromadný bod x_0 definičního oboru $D(f)$, v němž funkce f není spojitá, se nazývá *bod nespojitosti* funkce f.

Definice 6.1.3 (druhy nespojitosti)

Nespojitost v bodě x_0 se nazývá

- *odstranitelná*, právě když f má v bodě x_0 vlastní limitu, ale funkční hodnota $f(x_0)$ buď není definována nebo není rovna limitě;
- *neodstranitelná* ve všech ostatních případech nespojitosti.

Neodstranitelnou nespojitost nazveme

- *1. druhu*, právě když v bodě x_0 existují obě jednostranné vlastní limity, ale jsou různé; rozdíl limit $f(x_0+) - f(x_0-)$ (někdy jen absolutní hodnotu tohoto rozdílu) nazýváme *skok*;
- *2. druhu* ve všech ostatních případech.

Poznámka: Odstranitelnou nespojitost lze odstranit tím, že funkci f v bodě x_0 dodefinujeme nebo předefinujeme tak, aby se funkční hodnota rovnala limitě funkce v bodě x_0.

Příklad 3

Rozhodněte, jakou nespojitost má funkce f z příkladu 2 v bodech x_1 až x_9.

Příklad 4

Dokažte, že Dirichletova funkce je nespojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jaká je to nespojitost?

Dále uvádíme přehled základních vět o spojitosti v bodě x_0; v případě, že tento bod je hromadným bodem $D(f)$, plynou tyto věty z vět o limitách.

Věta 6.1.1

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x_0, $c \in \mathbb{R}$, pak jsou v tomto bodě spojité též funkce $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$ a pro $g(x_0) \neq 0$ i f/g. (Pro součty, rozdíly a součiny platí tato vlastnost při libovolném konečném počtu členů resp. činitelů.)

Věta 6.1.2

Je-li funkce φ spojitá v bodě x_0, funkce f spojitá v bodě $a = \varphi(x_0)$, pak složená funkce $f \circ \varphi$ je spojitá v bodě x_0.

Věta 6.1.3

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že na $D(f) \cap U(x_0)$ je f omezená (je to tzv. lokální omezenost spojité funkce).

Věta 6.1.4

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0, který je hromadným bodem $D(f)$, a $f(x_0) \neq 0$. Pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in U(x_0) \cap D(f)$ platí $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$.

Věta 6.1.5

Nechť x_0 je oboustranný hromadný bod $D(f)$. Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když je v něm spojitá zleva i zprava.

Věta 6.1.6 (Pravidlo $\varepsilon - \delta$)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$.

Poznámka: Tato vlastnost se též nazývá Cauchyova definice spojitosti; tedy takto lze definovat spojitost funkce v hromadném bodě $D(f)$ bez použití pojmu limita. (V uvedeném pravidle $\varepsilon - \delta$ je ovšem pojem limity fakticky obsažen, viz pravidlo $\varepsilon - \delta$ pro limitu funkce.) Podobně následující větu lze chápat jako Heineho definici spojitosti.

Věta 6.1.7

Nechť $x_0 \in D(f)$ a současně je hromadným bodem $D(f)$. Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to f(x_0)$.

Věta 6.1.8

Elementární funkce jsou spojité ve všech bodech, v nichž jsou definovány.

Příklad 5

Pro které funkce naleznete důkaz předcházející věty v příkladech 5. kapitoly?

6.2 Funkce spojité na množině

Spojitost funkce na množině je globální vlastností funkce.

Definice 6.2.1

Říkáme, že funkce f *je spojitá na množině* $M \subset D(f)$, právě když je spojitá v každém bodě množiny M. Zapisujeme $f \in C(M)$. Říkáme, že funkce f je *spojitá*, právě když je spojitá na $D(f)$.

Poznámka: Je třeba rozlišovat spojitost na $D(f)$ a spojitost na uzávěru $\overline{D(f)}$. Např. funkce $f\colon y = 1/x$ je podle výše uvedené definice spojitá, neboť je spojitá na $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, ale není spojitá na množině $\mathbb{R} = \overline{D(f)}$.

Někdy lze požadavek na spojitost funkce poněkud „oslabit“ a uvažovat funkce jen „po částech spojité“ (viz např. Newtonův vzorec 11.2 v kap. 11).

Definice 6.2.2

Funkce f se nazývá *po částech spojitá* na M, právě když je spojitá ve všech bodech množiny M s výjimkou konečného počtu bodů M, v nichž je definována a má zde nespojitost 1. druhu nebo nespojitost odstranitelnou.

K tomu, abychom mohli spojitosti prakticky využívat, je třeba se přesvědčit, které z běžně používaných funkcí jsou spojité. Platí následující věta.

Věta 6.2.1

Všechny elementární funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Z vlastností spojitosti v předcházející sekci plyne, že jsou spojité i všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí dostaneme konečným počtem aritmetických operací a skládání funkcí.

Nejdůležitějším zvláštním případem spojitosti na M je spojitost na intervalu. Přitom spojitost na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená, že f je spojitá na (a, b), v levém krajním bodě a je spojitá zprava a v pravém krajním bodě b je spojitá zleva.

6.3 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Věta 6.3.1 (1. Weierstrassova)
Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu omezená.

DŮKAZ: Kdyby funkce f nebyla omezená na $\langle a, b\rangle$ (např. shora), pak by ke každému $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_n) > n$. Posloupnost $(x_n) \subset \langle a, b\rangle$ je omezená, takže podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost (x'_n) s limitou x_0, pro niž též $f(x'_n) > n$. Proto $f(x_0)$ je (podle Heineho definice spojitosti a podle věty o limitě nerovnosti) jednak $+\infty$ a jednak reálné číslo vzhledem ke spojitosti f v každém bodě $\langle a, b\rangle$, tedy i v x_0, a to je spor.

Příklad 1
Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 1. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení.

Věta 6.3.2 (2. Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší hodnoty i své nejmenší hodnoty. Existují tedy čísla $c_1, c_2 \in \langle a, b\rangle$ taková, že

$$f(c_1) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \qquad f(c_2) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

DŮKAZ: Podle 1. Weierstrassovy věty je f shora omezená, takže existuje konečné

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = M.$$

Stačí tedy dokázat, že existuje $c_1 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(c_1) = M$. Kdyby takový bod c_1 neexistoval, byla by funkce $g(x) = M - f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ spojitá a kladná. Proto i funkce $1/g(x)$ by byla na $\langle a, b\rangle$ spojitá, tedy podle 1. Weierstrassovy věty shora omezená kladnou konstantou L ($1/g(x) < L$). Odtud již $g(x) > 1/L$, tedy $f(x) < M - 1/L$, což je spor se 2. vlastností suprema, takže $g(x)$ nemůže být stále kladná, tedy uvažovaný bod c_1 existuje.

Příklad 2
Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 2. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení. (Např. uvažte funkci $y = x$ na intervalu $(-1, 1)$.)

Věta 6.3.3 (Bolzano–Cauchyho)
Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje bod $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(\xi) = 0$.

DŮKAZ: (Bolzanova metoda půlení intervalů) Interval $\langle a, b\rangle$ rozpůlíme bodem c_1. Pokud $f(c_1) = 0$, je $\xi = c_1$. Jinak označíme $\langle a_1, b_1\rangle$ tu polovinu, kde $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Interval $\langle a_1, b_1\rangle$ rozpůlíme bodem c_2, atd. Buď existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\xi = c_n$ nebo dostáváme posloupnost vložených intervalů, které mají podle věty o vložených intervalech jediný společný bod ξ; o něm se dokáže $f(\xi) = 0$. Nemůže být $f(\xi) > 0$, neboť by existovalo okolí $U(\xi)$ tak, že $\forall x \in U(\xi)$ by bylo $f(x) > 0$ a to je spor (pro dosti velké n by bylo $\langle a_n, b_n \rangle \subset U(\xi)$). Stejně tak nemůže platit, že $f(\xi) < 0$, proto $f(\xi) = 0$.

Této věty se užívá např. při řešení rovnic k důkazu existence řešení.

Příklad 3
Dokažte, že rovnice $x + \sin(x - 1) = 0$ má alespoň jeden kořen.

NÁVOD: Uvažujeme např. $a = -2$, $b = 2$ (najděte menší interval!)

Věta 6.3.4 (o mezihodnotě)
Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $f(a) \neq f(b)$. Pak funkce f nabývá každé hodnoty q mezi $f(a)$ a $f(b)$.

DŮKAZ: (princip) Bolzano–Cauchyho větu použijeme na funkci $g(x) = f(x) - q$.

Důsledkem věty o mezihodnotě je následující věta

Věta 6.3.5
Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak $f(J)$ je buď interval, nebo jednobodová množina.

Věta 6.3.6 (vztah mezi monotónností a prostotou u funkcí spojitých na intervalu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak f je prostá, právě když je ryze monotónní.

DŮKAZ: (princip) I pro nespojité funkce zřejmě platí, že funkce ryze monotónní na množině je na této množině prostá. Opačnou implikaci dokážeme sporem. Kdyby (prostá) funkce nebyla ryze monotónní, existovaly by tři body c_1, c_2, c_3 tak, že $f(c_2)$ by bylo větší (nebo menší) než $f(c_1)$ a $f(c_3)$. Z věty o mezihodnotě plyne existence bodů $x_1 \in (c_1, c_2)$, $x_2 \in (c_2, c_3)$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$, a to je spor s vlastností prostoty.

Příklad 4
Sestrojte náčrtek k poslední části důkazu předchozí věty.

Věta 6.3.7 (o spojitosti inverzní funkce)
Je-li funkce f na intervalu J spojitá a prostá, pak inverzní funkce f je též spojitá.

DŮKAZ: (princip) Tvrzení plyne z ryzí monotónnosti funkce f a věty 6.3.6.

6.4 Stejnoměrná spojitost

Jako jsme vlastnost spojitosti „zeslabili“ spojitostí po částech, můžeme tuto vlastnost zase „zesílit“.

Definice 6.4.1
Funkci f nazýváme *stejnoměrně spojitá* na množině $M \subset D(f)$, právě když $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x', x'' \in M$ takové, že $|x' - x''| < \delta$, platí $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Předně uvážíme, že stejnoměrná spojitost má smysl jen na množině (zejména na intervalu), neexistuje stejnoměrná spojitost v bodě. Je to tedy vlastnost globální. V definici si dále uvědomíme, že δ závisí pouze na ε, tj. nezávisí na poloze bodů x', x'' v M. U spojitosti na množině M obecně δ závisí také na bodu x_0, tedy i když je funkce spojitá v každém bodě množiny M, nelze obecně k danému $\varepsilon > 0$ najít takové $\delta > 0$, které by bylo stejné, ať zvolíme x_0 kdekoli na M. Např. u funkce $y = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, když volíme x_0 „stále blíže" k $\frac{\pi}{2}$, pak pro dané ε (třeba 1) musíme volit δ stále menší a menší, aby pro $x \in U(x_0, \delta)$ zůstaly funkční hodnoty $f(x)$ v ε-okolí hodnoty $f(x_0)$.

Stejnoměrnou spojitost lze charakterizovat také pomocí tzv. *oscilace funkce.*

Definice 6.4.2

Nechť funkce f je definovaná a omezená na množině M. Číslo

$$\omega = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$$

se nazývá *oscilace funkce* f na množině M.

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak místo rozdílu suprema a infima můžeme vzít rozdíl maxima a minima.

Věta 6.4.1 (o oscilaci stejnoměrně spojité funkce)

Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu J, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že na každém podintervalu $I \subset J$ délky menší než δ je oscilace funkce menší než ε.

Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti řeší následující dvě věty.

Věta 6.4.2 (vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na množině M)

Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na M, pak je na M spojitá.

DŮKAZ: (princip) Ze stejnoměrné spojitosti plyne spojitost v libovolném bodě x_0, neboť $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in D(f)$ s vlastností $|x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Věta 6.4.3 (Cantorova)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

Důkaz této se provádí užitím Borelovy věty o pokrytí: Je-li uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ pokryt systémem S_ν otevřených intervalů, pak existuje konečný podsystém $S_k \subset S_\nu$, který také pokrývá interval $\langle a, b\rangle$.

Kapitola 7

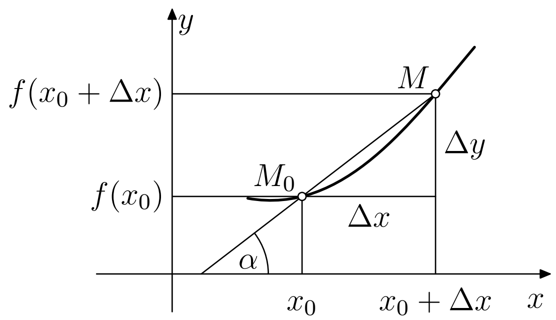
Derivace funkce

Derivace funkce patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy. Například rychlost změny vyjadřuje 1. derivace, proto ji najdeme základech praktického použití matematické analýzy.

7.1 Pojem derivace funkce

Mějme funkci f, která je definována na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0. Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx (Δx je přírůstek nezávisle proměnné), dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x (\in U(x_0))$; pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0 .

Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0 + \Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (Δy je tzv. přírůstek funkce). Podíl $\Delta y / \Delta x$ je tzv. diferenciální podíl; jeho geometrickým významem je směrnice sečny grafu funkce, tj. $\operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, který svírá sečna $M_0 M$ s osou x.



Z $\Delta x \to 0$ plyne pro spojitou funkci $\Delta y \to 0$, takže pro $\Delta x \to 0$ je diferenciální podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Definice 7.1.1

Říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 derivaci*, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(x_0 + \Delta x\big) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme *derivace funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy reálné číslo. V dalších kapitolách budou definovány také derivace vyšších řádů, pak bude pojem derivace funkce znamenat 1. derivace funkce.

Geometrický význam derivace funkce v bodě

$f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0, tj. $\operatorname{tg}\varphi$, kde φ je orientovaný úhel který svírá tečna v bodě M_0 s kladným směrem osy x.

Příklad 1

Načrtněte obrázek, v němž vyznačíte geometrický význam derivace funkce v bodě.

Fyzikální význam derivace v bodě

Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu v čase t, pak diferenciální podíl $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

znamená okamžitou rychlost.

Příklad 2

Podle definice vypočtěte derivaci funkce $y = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Jestliže v definici derivace nahradíme limitu jednostrannou limitou, dostaneme definice *jednostranných derivací* (derivace zleva, zprava), které označujeme $f'(x_0-)$ a $f'(x_0+)$. Je-li $f'(x_0) = k$, pak existují obě jednostranné derivace a jsou rovny číslu k; také naopak, existují-li obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a rovnají se témuž číslu k, pak existuje derivace funkce f v bodě x_0 a je rovna k, jak plyne z vět o limitách.

Příklad 3

Vypočtěte obě jednostranné derivace funkce $f\colon y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Návod: Z výpočtu plyne, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

Jestliže limita diferenciálního podílu $\Delta y/\Delta x$ je pro $\Delta x \to 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava). Výrok „existuje derivace" však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace".

Příklad 4

Je dána funkce $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$. Ověřte, že $f'(1-) = +\infty$.

Příklad 5

Určete derivaci funkce $y = x^2$ v libovolném bodě x.

7.2 Derivace funkce na množině

Definice 7.2.1

Má-li funkce f derivaci v každém bodě x nějaké množiny M, říkáme, že *má derivaci na množině* M; značíme ji f' nebo $f'(x)$.

Vidíme, že derivace funkce na množině M je opět funkce. Např. dle příkladu 5 derivací funkce $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ je funkce $y = 2x$. Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0, stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x. Např. pro f z příkladu 5 je $f'(3) = (2x)_{x=3} = 6$ (srovnej s příkladem 2).

Přehled označení derivací

v bodě	jako funkce	původ označení
$f'(x_0)$	$y', f', f'(x)$	Lagrange
$\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}, \left(\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$	Leibniz
$Df(x_0)$	$Dy, Df(x)$	Cauchy

Každé z těchto označení má své výhody. Např. v Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, takže se dobře uplatňuje např. při manipulacích s funkcemi složenými a inverzními; Cauchyho označování je vhodné např. při řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou; operaci definovanou operátorem D nazýváme zpravidla derivování (podle dané proměnné). Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme tuto proměnnou jako index, např. f'_u.

Věta 7.2.1 (vztah mezi derivací a spojitostí)
Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.

Důkaz: Protože $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, platí podle věty 5.2.4 o limitě součinu

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0 \cdot f'(x_0) = 0,$$

odkud plyne spojitost funkce f v bodě x_0.

Obrácená věta k předešlé větě obecně neplatí. Uvažujte např. funkci $y = |x|$ v bodě 0.

Příklad 1
Dle definice určete derivace následujících funkcí
- $y = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$;
- $y = \sin x$.

Návod: Pro funkci $y = \sin x$ platí

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Přitom ve druhé rovnosti jsme využili vzorec pro rozdíl $\sin\alpha - \sin\beta$ a v další spojitost funkce cos na $\mathbb{R}$.
Podobně ukážeme $(x^n)' = nx^{n-1}$.

7.3 Vlastnosti derivací

Věta 7.3.1 (základní vlastnosti derivací)
Nechť funkce $u = f(x)$, $v = g(x)$ mají v bodě x_0 derivaci a $c \in \mathbb{R}$. Pak
- funkce $c \cdot f$ má v bodě x_0 derivaci a platí $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$;
- funkce $f + g$ má v bodě x_0 derivaci a platí $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- funkce $f - g$ má v bodě x_0 derivaci a platí $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
- funkce $f \cdot g$ má v bodě x_0 derivaci a platí $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

- pro $g(x_0) \neq 0$ má v bodě x_0 derivaci i funkce f/g a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

DŮKAZ: Důkaz se provádí podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti.

Stručné vyjádření vlastností derivací je

$$(cu)' = cu', \qquad (u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Zde jsme vyslovili větu 7.3.1 o základních vlastnostech derivací v bodě, stejná věta platí pro existenci derivace na množině. Pravidla pro sčítání a pro násobení lze matematickou indukcí rozšířit na n členů (činitelů), $n \in \mathbb{N}$. Pro násobení tří funkcí tak např. máme $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Věta 7.3.2 (derivace složené funkce)

Nechť funkce φ má derivaci v bodě x_0, nechť funkce f má derivaci v bodě $\varphi(x_0)$. Potom složená funkce $f \circ \varphi$ má derivaci v bodě x_0 a platí

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'\big(\varphi(x_0)\big) \cdot \varphi'(x_0).$$

Příklad 1

Užitím věty o derivaci složené funkce najděte derivaci funkce $y = \sin^2 x$.

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci složené funkce tvar, jako úprava zlomků

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Věta 7.3.3 (derivace inverzní funkce)

Nechť na okolí $U(x_0)$ bodu x_0 je funkce f ryze monotónní a má zde derivaci f'. Pak existuje derivace inverzní funkce f^{-1} v bodě $f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Důkaz obou vět se provádí dle definice derivace a používá se faktu, že $\Delta y \to 0$, právě když $\Delta x \to 0$.

Příklad 2

Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.

NÁVOD: Funkce arkussinus je inverzní k funkci $f(x) = \sin x$ definované na intervalu $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, na tomto intervalu také platí $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Podle předcházející věty máme

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

Protože $y = \sin x$, z předchozího vztahu plyne

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

tedy derivace funkce $\arcsin x$ je

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7.4 Derivace elementárních funkcí

Věta 7.4.1 (přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí)

- $(c)' = 0$ (derivace konstanty);
- $(x^m)' = mx^{m-1}$ (platí pro libovolné $m \neq 0$), speciálně $(x)' = 1$;
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; speciálně $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$;
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; speciálně $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
- $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$;
- $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$, $(\operatorname{cotgh} x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$;
- $(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Důkaz se provádí užitím definice derivace (někde i s užitím speciálních limit), vlastností derivací, vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce.

Příklad 1

Určete derivaci funkce $y = (\cos x)^{\sin x}$ pro x v 1. kvadrantu.

7.5 Diferenciál funkce

Řešme následující problém. Funkci f budeme aproximovat v okolí bodu x_0 lineární funkcí g, tj. hledáme takovou lineární funkci g, která splňuje podmínku

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Označme $x = x_0 + h$; zřejmě $g(x) = f(x_0) + ah$, takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako $\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah$. Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\omega(h)}{h} = 0$. Z definice funkce $\omega(h)$ plyne, že přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \omega(h).$$

Definice 7.5.1

Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci ah, nazýváme *diferenciál funkce f v bodě x_0*, označujeme jej $\mathrm{d}f(x_0)$ a funkci, která má diferenciál v bodě x_0, nazýváme *diferencovatelnou v bodě x_0*. Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny M, nazýváme *diferencovatelnou na množině M*.

Věta 7.5.1 (existence a jednoznačnost diferenciálu)

Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0, právě když má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciál funkce f v bodě x_0 je pak jednoznačně určen vzorcem $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot h$, kde $h \in \mathbb{R}$ je přírůstek nezávisle proměnné.

Předchozí věta tedy říká, že výroky „f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci“ a „f je v bodě x_0 diferencovatelná“ jsou ekvivalentní, znamenají totéž. (Význam zavedení diferenciálu uvidíme ve druhém ročníku, kdy to totéž nebude.)

Místo h používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení Δx nebo $\mathrm{d}x$ a název diferenciál nezávisle proměnné. Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce $y = x$ je $\mathrm{d}x = 1 \cdot h (= 1 \cdot \Delta x)$. Diferenciál funkce pak též zapisujeme $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$. Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

Definice 7.5.2

Diferenciálem funkce f v bodě x_0 nazýváme výraz $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, přičemž $\mathrm{d}x (= \Delta x)$ je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné. *Diferenciálem funkce f na množině M* nazýváme funkci $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$, kde $x \in M$.

Ze vztahu $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ vidíme, že Leibnizův symbol $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro derivaci funkce je skutečným zlomkem – podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné. Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu v přibližných výpočtech je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + \mathrm{d}y.$$

Příklad 1

Pomocí diferenciálu funkce vypočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{0{,}982}$.

NÁVOD: 0,991

Užití diferenciálu při odhadu chyb je založeno na tom, že když h (tedy $\mathrm{d}x$) položíme rovno absolutní chybě měření, udává $\mathrm{d}f$ přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty $y = f(x)$.

Příklad 2

Počítáme objem koule, jejíž průměr x jsme změřili s chybou δx. Určete chybu výsledku.

Návod:

$$\delta V = \frac{\pi}{2}x^2\delta x, \quad \frac{\delta V}{V} = 3\frac{\delta x}{x}.$$

Relativní chyba výsledku je tedy rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru.

Diferenciál složené funkce

Uvažujme funkci $y = f(u)$, kde u je nezávisle proměnná. Pro její diferenciál pak platí $\mathrm{d}f(= \mathrm{d}y) = f'(u) \cdot \mathrm{d}u$. Určeme nyní $\mathrm{d}f$ v případě, že u není nezávisle proměnná, ale $u = \varphi(x)$. Pak

$$\mathrm{d}f = [f \circ \varphi(x)]' \,\mathrm{d}x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = f'(u) \cdot \mathrm{d}u,$$

neboť $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Vidíme, že diferenciál funkce je invariantní při přechodu na složenou funkci. (Tuto vlastnost má pouze 1. diferenciál, viz 7.6, a používáme ji zejména při výpočtu neurčitých integrálů, viz 10.)

7.6 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -\sin x$.

Definice 7.6.1

Má-li funkce f' v bodě x_0 (na množině M) derivaci $(f')'(x_0)$ $((f')')$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme ji *derivace druhého řádu* (*druhá derivace*) funkce f. Podobně *derivaci n-tého řádu* (*n-tou derivaci*) $f^{(n)}$ definujeme vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ pro přirozená čísla n.

Podle předcházející definice je „derivace funkce“ vlastně „první derivace funkce“. Nebude-li hrozit nedorozumění, bude nadále pojem „derivace funkce“ znamenat „1. derivaci funkce“.

Označení podle Leibnize:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

(čti „ d dvě f podle $\mathrm{d}x$ na druhou“),

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(f(x)\right), \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{x=x_0},$$

apod. Označení podle Cauchyho:

$$D^2 f, \quad D^n y,$$

apod.

Příklad 1

Určete všechny derivace funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Příklad 2

Určete 2. derivaci funkce $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi/2$.

Derivace $y'', \dots, y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$, nazýváme derivace vyšších řádů. Upotřebíme je např. při vyšetřování průběhu funkce nebo při určování koeficientů Taylorova rozvoje. Má proto smysl uvažovat o vzorcích, které usnadní výpočet n-té derivace.

Některé vzorce pro n-tou derivaci elementárních funkcí

Funkce e^x má pro každé přirozené číslo n derivaci e^x; podobně pro funkci a^x máme $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.

Pro funkce $\sin x$, $\cos x$ platí $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu. Platí též vzorec

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

a podobný pro kosinus.

Funkce $\sinh x$, $\cosh x$. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.

Funkce x^n, $n \in \mathbb{N}$. Zde $(x^n)^{(n)} = n!$, $(x^n)^{(m)} = 0$ pro přirozená čísla $m > n$.

Věta 7.6.1 (Leibnizova formule pro n-tou derivaci součinu)

Nechť funkce u a v mají všechny derivace až do řádu n, potom

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Příklad 3

Určete 120. derivaci funkce $y = x^2\mathrm{e}^x$.

Návod: Užitím Leibnizovy formule dostaneme

$$y^{(120)} = \mathrm{e}^x(x^2 + 240x + 14280).$$

Diferenciály vyšších řádů

Podobně jako u derivací je možno definovat diferenciál 2. řádu (2. diferenciál) jako diferenciál diferenciálu funkce (diferenciál funkce pak nazýváme 1. diferenciál funkce).

Je-li x nezávisle proměnná, je $\mathrm{d}x$ konstantní přírůstek, takže pro funkci $y = f(x)$ je

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x = f''(x)\,\mathrm{d}x^2.$$

Vidíme, že v Leibnizově označení 2. derivace je $\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}$ skutečný podíl 2. diferenciálu a 2. mocniny $\mathrm{d}x$.

Definice 7.6.2

Diferenciál n-tého řádu (*n-tý diferenciál*) funkce f je definován rekurentním vztahem $\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f)$.

Věta 7.6.2

Za předpokladu existence vlastní derivace n-tého řádu funkce $f(x)$, kde x je nezávisle proměnná, je $\mathrm{d}^n f = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n$.

Příklad 4

Odvoďte vzorec pro druhý diferenciál složené funkce.

Návod:

$$\mathrm{d}^2y = f''(u)\,\mathrm{d}u^2 + f'(u)\,\mathrm{d}^2u,$$

kde $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Z výsledku je vidět, že diferenciály vyšších řádů nejsou invariantní vzhledem ke skládání funkcí (při přechodu na složenou funkci přibývá další člen: $f'(u)\,\mathrm{d}^2u$).

7.7 Derivace různých typů funkcí

Funkce více proměnných

Derivujeme vždy podle jedné proměnné a ostatní považujeme za konstantu; dostáváme tzv. parciální derivace s označením, např. pro funkci $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\quad \text{atd.}$$

Příklad 1

Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci $z = x \sin xy$.

Funkce zadané parametricky

Nezávisle proměnná x i hodnota funkce y jsou vyjádřeny soustavou parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in (\alpha, \beta)$. Derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ určíme pomocí diferenciálů (užitím uvedeného Leibnizova symbolu):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)\,\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(tedy derivace je též funkcí parametru).

Příklad 2

Odvoďte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.

Návod:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Příklad 3

Funkce f je dána parametricky: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$. Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

Funkce zadané implicitně

Funkce $y = y(x)$ nechť je dána implicitní rovnicí $f(x, y) = 0$ pro $x \in (a, b)$. Na daném intervalu tedy platí identicky $f(x, y(x)) = 0$. Proto také derivace levé strany podle x je identicky rovna nule, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

a z toho vypočteme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Derivaci $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle x s tím, že $y = y(x)$.

Příklad 4

Vypočtěte 1. a 2. derivaci funkce dané implicitní rovnicí $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

NÁVOD:

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

Jiné definice funkce

Existují také metody, jak určit derivaci funkce zadané grafem nebo funkce zadané tabulkou. Dále se však těmito metodami nebudeme zabývat.

Kapitola 8
Základní věty diferenciálního počtu

8.1 Úvod

Věta 8.1.1 (Fermatova)
Nechť funkce f je definována na M a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty. Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.

Důkaz: (princip) Uvažujeme znaménko podílu $d(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ v levém a pravém okolí bodu x_0, v němž nabývá své největší (nejmenší) hodnoty. Z věty o limitě nerovnosti pak plyne $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} d(x) = 0$.

Fermatovu větu lze využít pro nalezení lokálního extrému, tato věta má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto: má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule. Tedy:

Věta 8.1.2 (nutná podmínka existence lokálního extrému)
Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak derivace $f'(x_0)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

8.2 Věty o střední hodnotě

Uvedeme zde trojici vět (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyho), které jsou obvykle nazývány větami o střední hodnotě diferenciálního počtu. Jádrem je věta Rolleova.

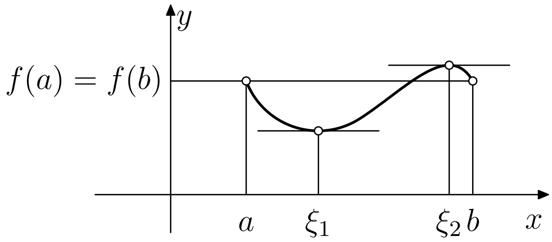
Věta 8.2.1 (Rolleova)
Nechť funkce f je
1. spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. má derivaci na intervalu (a, b),
3. splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz: Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f v nějakém bodě $c_1 \in \langle a, b\rangle$ své nejmenší hodnoty a v nějakém bodě $c_2 \in \langle a, b\rangle$ své největší hodnoty. Kdyby c_1 i c_2 byly oba krajními body intervalu $\langle a, b\rangle$, platilo by $f(x) =$ konst., takže za ξ bychom mohli vzít libovolný bod intervalu (a, b). Je-li jeden z bodů c_1, c_2 vnitřním bodem intervalu (a, b) (označme jej c), pak tvrzení plyne z Fermatovy věty, kde $\xi = c$.

Takových bodů, v nichž je derivace funkce f rovna 0, může být i více; např. funkce $\sin x$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a její derivace je nulová v bodech $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$.

Geometrický význam. Bod ξ je bodem lokálního extrému, tj. bod, v němž směrnice tečny ke grafu funkce je rovna 0.



Příklad 1

Formou protipříkladů ukažte, že všechny tři předpoklady Rolleovy věty jsou nutné. Uveďte tedy příklady tří funkcí f_1, f_2, f_3, pro něž neplatí tvrzení Rolleovy věty, a to tak, že

1. funkce f_1 je nespojitá v jediném bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, ale předpoklady 2 a 3 jsou splněny;
2. funkce f_2 nemá derivaci v jediném bodě intervalu (a, b), ale předpoklady 1 a 3 jsou splněny;
3. pro funkci f_3 platí $f_3(a) \neq f_3(b)$, ale předpoklady 1 a 2 jsou splněny.

Věta 8.2.2 (Lagrangeova)

Nechť funkce f je

1. spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. má derivaci na intervalu (a, b),

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí

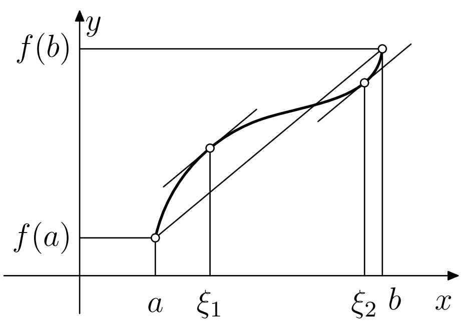
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Důkaz: Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

a ověříme, že jsou pro ni splněny předpoklady Rolleovy věty. Z tvrzení Rolleovy věty pro funkci F pak plyne tvrzení věty Lagrangeovy.

Geometrický význam. Bod ξ je bodem, v němž je směrnice tečny ke grafu funkce rovna směrnici přímky procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.



Příklad 2

Formou protipříkladů (dle příkladu 1) ukažte, že oba předpoklady Lagrangeovy věty jsou nutné.

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

Položíme-li $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$ a označíme-li θ číslo z intervalu $(0;1)$, lze tvrzení upravit takto: Pak existuje $\theta \in (0;1)$ tak, že platí

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Označíme-li $x = x_0 + \Delta x$, lze vztah z Lagrangeovy věty zapsat ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Jiný zápis: $\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$, ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též *věta o přírůstku funkce*.

Lagrangeova věta má četné důsledky, z nichž některé lze posuzovat jako samostatné a významné výsledky matematické analýzy (viz následující sekce).

Věta 8.2.3 (Cauchyho, zvaná též *zobecněná věta o střední hodnotě*)

Nechť funkce f, g jsou

1. spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. mají derivace na intervalu (a, b),
3. $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b).

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

DŮKAZ: Předně $g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by podle Rolleovy věty existoval bod $\xi_r \in (a, b)$ tak, že by $g'(\xi_r) = 0$, což by bylo ve sporu s předpokladem 3. Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

a ověříme, že jsou pro F na $\langle a, b \rangle$ splněny předpoklady Rolleovy věty. V (a, b) tedy existuje ξ tak, že $F'(\xi) = 0$, tedy

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] = 0,$$

z čehož plyne tvrzení věty.

Cauchyho věta se používá např. k důkazu l'Hospitalova pravidla (viz následující sekce).

Všimněme si ještě vztahu uvedených tří vět o střední hodnotě. Pomocí Rolleovy věty jsme dokázali zbývající dvě. Avšak Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty, neboť tvrzení věty lze chápat jako zvláštní případ, když platí $f(a) = f(b)$. Stejně tak lze ukázat, že Lagrangeova věta je zvláštním případem věty Cauchyho, pro $g(x) = x$. Jsou tedy všechny tři věty o střední hodnotě navzájem ekvivalentní.

8.3 Některé důsledky vět o střední hodnotě

Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě; na jednom je založen pojem neurčitého integrálu, druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

Věta 8.3.1 (o konstantní funkci)

Funkce f je na intervalu (a,b) konstantní, právě když má na (a,b) derivaci a pro všechna $x \in (a,b)$ platí $f'(x) = 0$.

DŮKAZ: Z definice derivace plyne, že funkce konstantní na (a,b) má na (a,b) derivaci rovnu 0 (viz předcházející kapitola). Naopak nechť na (a,b) je $f'(x) = 0$. Dokážeme, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. Zvolme označení tak, aby $x_1 < x_2$. Pak na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy existuje bod $\xi \in \langle x_1, x_2\rangle$ tak, že je

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Rovnost $f(x_2) = f(x_1)$ plyne z předpokladu $f'(\xi) = 0$.

Důsledkem předcházející věty je tvrzení

Věta 8.3.2

Mají-li dvě funkce f, g na (a,b) stejné derivace, tj. $f'(x) = g'(x)$, pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj. existuje $C \in \mathbb{R}$ tak, že na (a,b) je $f(x) = g(x) + C$.

Tímto důsledkem jsou vytvořeny předpoklady k definici pojmu neurčitý integrál. Tedy primitivní funkcí např. k funkci $\cos x$ je nejen funkce $\sin x$, ale také každá funkce tvaru $\sin x + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. *Neurčitý integrál* jako množina všech primitivních funkcí k funkci f je podle důsledku Lagrangeovy věty množinou všech funkcí tvaru $F(x) + C$, kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f a C je libovolná (integrační) konstanta (viz kap. 10).

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobnou větu lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta 8.3.3 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť platí

1. funkce f, g mají derivace v prstencovém okolí $P(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^*$,
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
3. existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se K. (Totéž platí i pro jednostranné limity.)

DŮKAZ: (princip pro $a \in \mathbb{R}$, $x \to a+$): Podle 2. lze doplnit definici funkcí f, g tak, aby byly spojité v $U(a)$, když položíme $f(a) = g(a) = 0$. Existuje pak interval $\langle a, b\rangle \subset U(a+)$ tak, že obě funkce f, g jsou na něm spojité a na (a,b) mají derivaci. Předpoklady Cauchyho věty jsou tak splněny nejen na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale na každém podintervalu $\langle a, x\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Podle Cauchyho věty pak na každém intervalu $\langle a, x\rangle$ existuje bod ξ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $x \to a+$ je též $\xi \to a+$. Podle předpokladu existuje $\lim\limits_{\xi \to a+} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$ a vzhledem k rovnosti $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ má stejnou limitu pro $x \to a+$ i podíl na její levé straně.

Podobná věta (stejně nazvaná) platí i v případě, když $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Věta 8.3.4 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť:

1. funkce f, g mají derivace v prstencovém okolí $P(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^*$,
2. $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$,
3. existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se K. (Totéž platí i pro jednostranné limity.)

Příklad 1

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$.

Návod: Derivace funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x-2)$ je $f'(x) = \frac{1}{1+(x-2)^2}$, derivace funkce $g(x) = x^2 - 4$ je $g'(x) = 2x$. Obě tyto derivace existují (dokonce) na libovolném prstencovém okolí $P(2)$ a platí $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$. Protože

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{1+(x-2)^2}}{2x} = \frac{1}{4},$$

existuje i $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$ a je rovna $\dfrac{1}{4}$.

Tento fakt někdy zapisujeme (za předpokladu existence limity podílu derivací)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{1+(x-2)^2}}{2x} = \frac{1}{4}.$$

Příklad 2

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. Výsledek: 1

Příklad 3

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3+5x+4}{3x^3+2x^2+1}$. Výsledek: 2

Příklad 4

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$. Výsledek: 0

L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu: z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí. Např.

$$0 = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Příklad 5

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

Návod:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{2\sin x\cos x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{9}{2}.$$

Mohli jsme ovšem postupovat i takto (využijeme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{9}{2\cos x} = \frac{9}{2}.$$

Při výpočtu limit typu $[0\cdot\infty]$ součinu funkcí $f\cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl $f/(1/g)$ nebo naopak $g/(1/f)$ tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla (tedy např. funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli).

Příklad 6

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Návod:
$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$$

Počítáme-li limitu typu $[\infty-\infty]$ rozdílu funkcí $f-g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl: $f-g = 1/(1/f) - 1/(1/g) = (1/g - 1/f)/(1/fg)$.

Příklad 7

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Návod: Nejprve vhodně upravíme získaný podíl
$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{x^2 \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-\sin^2 x) - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} - 1\right).$$

Nyní už stačí jen vypočítat
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x} \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{2\sin^2 x + 8x\sin x\cos x + 2x^2\cos^2 - 2x^2\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^2 x}{2\sin^2 x + 8x\sin x\cos x + 2x^2\cos^2 - 2x^2\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + 8\frac{\sin x}{x}\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Proto
$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

U limit typu $[0^0]$, $[\infty^0]$ a $[1^\infty]$ pro funkce f^g postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $\mathrm{e}^{g\ln f}$, limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a v exponentu dostaneme limitu typu $[0\cdot\infty]$.

Příklad 8

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$.

Návod:

$$\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}.$$

Nyní už stačí jen vypočítat

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \operatorname{tg} x = 0.$$

Proto

$$\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

8.4 Taylorův vzorec

Mějme funkci f, $U(x_0) \subset D(f)$; h nechť je přírůstek nezávisle proměnné a nechť platí $x_0 + h \in U(x_0)$. Hodnotu $f(x_0 + h)$ dokážeme vyjádřit přesně pomocí Lagrangeovy věty

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \theta h),$$

kde $\theta \in (0; 1)$, a přibližně užitím diferenciálu

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + h \cdot f'(x_0).$$

První vzorec je sice přesný, ale na závadu někdy může být (např. při numerických výpočtech), že neznáme θ. Druhý vzorec dává aproximaci funkce f lineární funkcí, což je na jedné straně výhodné pro jednoduchost této aproximace, na druhé straně je lineární aproximace v některých případech nedostatečně přesná. Položme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + R(h),$$

kde $R(h)$ je „zbytek“. Platí tedy

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{R(h)}{h},$$

takže $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(h)}{h} = 0$.

Zbytek $R(h)$ je tedy „vyššího řádu“ než h, „jde k 0 rychleji než h“, např. může být typu ah^2.

Chtěli bychom nyní zachovat jednoduchost aproximace hodnoty $f(x_0 + h)$, ale přitom zvýšit přesnost. Můžeme toho dosáhnout tím, že hodnotu $f(x_0 + h)$ aproximujeme mnohočlenem v proměnné h stupně n; tento mnohočlen označíme $T_n(h)$. Při vhodném postupu bude zbytek, tedy rozdíl $f(x_0 + h) - T_n(h)$, konvergovat k nule „rychleji“ než h^n. To bude znamenat, že $T_n(h)$ bude nejlepší aproximací funkce f polynomem stupně n.

Věta 8.4.1 (Taylorova)

Nechť funkce f má v $U(x_0)$ spojité derivace až do řádu $n+1$. Pak pro každé $x_0 + h \in U(x_0)$ platí tzv. *Taylorův vzorec*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(h),$$

kde $R_n(h)$, tzv. *zbytek po n-tém členu*, lze psát ve tvaru

- Lagrangeově: $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$, kde $\theta \in (0;1)$, nebo
- Cauchyho: $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\bar{\theta} h)}{n!}(1-\bar{\theta})^n h^{n+1}$, kde $\bar{\theta} \in (0;1)$.

Koeficienty $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ se nazývají *Taylorovy koeficienty* a polynom

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

se nazývá *Taylorův polynom stupně n*.

V důkazu se používají pomocné funkce a Rolleova věta.

Druhý obvyklý tvar Taylorova vzorce dostaneme po dosazení $h = x - x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x-x_0),$$

Položíme-li $x_0 = 0$, což je např. u elementárních funkcí častý a přirozený požadavek, dostaneme zvláštní případ Taylorova vzorce pro okolí bodu 0, a tento vzorec se někdy nazývá *Maclaurinův* (čti meklorenův)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Prvních $n+1$ členů na pravé straně Taylorova (Maclaurinova) vzorce tvoří Taylorův (Maclaurinův) polynom $T_n(x)$, takže platí $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pokud na nějakém $U(x_0)$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ je Taylorův polynom aproximací funkce f. Polynom $T_n(x)$ se také nazývá *Taylorův* (*Maclaurinův*) rozvoj funkce f; zde je to rozvoj podle vzorce, ale pracujeme rovněž s rozvojem funkce v mocninnou řadu (viz 15.7).

Věta 8.4.2 (přehled Maclaurinových rozvojů některých elementárních funkcí)

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x),\\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m-1}(x),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x),\\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),\\
(1+x)^r &= 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \ldots + \binom{r}{n}x^n + R_n(x),
\end{aligned}
$$

kde pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a libovolné $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

Jestliže zjišťujeme, pro která x platí $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme, že u funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ je to pro $x \in \mathbb{R}$, u funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \langle -1; 1\rangle$, u funkce $\ln(1+x)$ pro $x \in (-1; 1\rangle$ a u funkce $(1+x)^r$ pro $x \in (-1; 1)$ nebo na intervalu širším v závislosti na r.

Příklad 1

Určete Taylorovy koeficienty rozvojů funkcí uvedených v předchozím přehledu (použitím obecného vzorce).

NÁVOD: V podstatě jde o využití vhodných pravidel pro výpočet derivací vyšších řádů pro zadanou funkci.

Příklad 2

Najděte rozvoj funkcí e^{-x}, $\sin 3x$.

Příklad 3

Odvoďte rozvoj funkcí $\frac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$.

Příklad 4

Určete první členy rozvoje funkcí $(x+1)\cosh 2x$, $x\mathrm{e}^{-2x}$ až po členy s x^5.

Příklad 5

Zobrazte na počítači nebo na grafickém kalkulátoru funkci $y = \cos x$ společně s jejími aproximacemi danými Maclaurinovým rozvojem:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

Sledujte, jak se rozšiřuje interval těch $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\cos x \approx f_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Příklad 6

Totéž proveďte pro funkce $\sin x$, $\cosh x$, $\sinh x$, $\operatorname{arctg} x$, případně i pro jiné.

Kapitola 9

Užití diferenciálního počtu

9.1 Monotónnost funkce

Při vyšetřování průběhu funkce se mimo jiné zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu (resp. v některém bodě) monotónní (definice viz v kap. 3). Velmi vhodným nástrojem pro zjišťování monotónnosti funkce je 1. derivace funkce.

Věta 9.1.1

Jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a $f'(x_0) > 0$, pak f je rostoucí v bodě x_0.

Důkaz: (princip) Protože $f'(x_0) > 0$, má v jistém okolí $U(x_0)$ stejné znaménko i diferenciální podíl a z toho plyne i tvrzení věty.

Tato věta vyjadřuje jen *postačující* podmínku, neplatí obráceně. Funkce rostoucí v bodě může mít i nulovou derivaci (nebo derivaci nemít). Např. funkce $y = x^3$ je v bodě 0 rostoucí, ale má zde nulovou derivaci. Funkce $y = 2x + |x|$ je v bodě 0 rostoucí, ale derivaci v tomto bodě nemá. Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

Definice 9.1.1

Říkáme, že x_0 je *stacionárním bodem funkce* f, právě když existuje $f'(x_0)$ a platí $f'(x_0) = 0$.

Ve stacionárním bodě může být funkce rostoucí, klesající nebo v něm nemusí být monotónní.

Věta 9.1.2 (o monotónnosti na intervalu)

Má-li funkce f derivaci na (a, b), pak platí

a) Funkce f je na (a, b) neklesající (nerostoucí), právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geqq 0$ ($f'(x) \leqq 0$).
b) Funkce f je na (a, b) rostoucí (klesající), právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geqq 0$ ($f'(x) \leqq \leqq 0$), přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ platilo $f'(x) = 0$.

Důkaz: (princip pro funkce neklesající, resp. rostoucí)

a) Dokážeme dvě implikace
   - Je-li f neklesající na (a, b), je v každém bodě intervalu (a, b) diferenciální podíl nezáporný, tedy i $f'(x) \geqq 0$.
   - Je-li $f'(x) \geqq 0$ na (a, b), $x_1 < x_2$, jsou na $\langle x_1, x_2 \rangle$ splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy
   $$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$
   odkud plyne $f(x_1) \leqq f(x_2)$.
b) Dokážeme dvě implikace
   - Je-li f rostoucí, je podle předcházejícího $f'(x) \geqq 0$. Pokud na určitém intervalu (α, β) platí $f'(x) = 0$, pak $f(x)$ je konstantní funkce na (α, β), což je spor.

- Nechť $f'(x) \geqq 0$ na (a, b), $x_1 < x_2$ a neexistuje interval (α, β) daných vlastností. Podle a) je $f(x_1) \leqq f(x_2)$ a podle předpokladu o (α, β) existuje mezi x_1, x_2 bod x' tak, že $f'(x') > 0$, tj funkce f roste v x', a z toho se pomocí okolí bodu x' a definice funkce rostoucí v bodě vyvodí, že $f(x_1) < f(x_2)$.

Tuto větu lze rozšířit na uzavřený interval tak, že pro f předpokládáme derivaci na (a, b) a spojitost na $\langle a, b\rangle$.

Příklad 1

Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

Návod: $D(f) = \mathbb{R}$. Máme $y' = (2x - x^2)e^{-x} = x\,(2 - x)\mathrm{e}^{-x}$; protože $\mathrm{e}^{-x} > 0$, rozdělí body 0 a 2 číselnou osu na intervaly:

- na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ je $y' \leqq 0$, přičemž y' je nulová v jediném bodě, f je na tomto intervalu klesající,
- na intervalu $\langle 0; 2\rangle$ je $y' \geqq 0$, přičemž y' je nulová ve dvou bodech, f je rostoucí,
- na intervalu $\langle 2; +\infty)$ je $y' \leqq 0$, f je klesající.

9.2 Lokální extrémy

V kap. 3 jsou definovány pojmy (ostré) lokální maximum, (ostré) lokální minimum – se souhrnným názvem (ostré) lokální extrémy. V kap. 8 byla odvozena nutná podmínka existence lokálního extrému: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. Funkce tedy může mít lokální extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce $y = |x|$).

Zjišťování lokálních extrémů funkcí má velký význam teoretický i praktický, proto je důležité znát správný postup. Máme několik základních možností.

Postup při určování lokálních extrémů

Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (body stacionární) nebo v nichž derivace neexistuje; dále takový bod označíme x_0.

1. Užití monotónnosti v okolí bodu x_0.

   Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$. Je-li f rostoucí v $P(x_0-)$ a klesající v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum.

   Podobně lze formulovat další případy: ostré lokální minimum, neostré extrémy a případ, kdy extrém neexistuje.
2. Užití 1. derivace v okolí bodu x_0.

   Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $P(x_0) \subset D(f)$, v němž má funkce f derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ v $P(x_0-)$ a $f'(x) < 0$ v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum. Podobně lze formulovat další případy.
3. Užití 2. derivace v bodě x_0.

   Nechť f má derivaci v nějakém okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální minimum.

   Pozor: Pokud $f''(x_0) = 0$, neznamená to, že extrém neexistuje, ale že musíme rozhodnout podle jiného pravidla.

Odvození postupu dle 1. plyne z definice extrému, 2. plyne z 1. užitím vztahu mezi monotónností a znaménkem derivace, 3. plyne z 2. uvážíme-li, že např. vlastnost $f''(x_0) < 0$ říká, že funkce f' je klesající v bodě x_0, a protože $f'(x_0) = 0$, platí v nějakém $P(x_0-)$, že $f'(x) > 0$ a v $P(x_0+)$, že $f'(x_0) < 0$.

Příklad 1

Zjistěte lokální extrémy funkce $f\colon y = x\mathrm{e}^{-x}$.

Návod: Vypočteme derivaci $y' = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$ a položíme ji rovnu 0; dostáváme stacionární bod $x_0 = 1$. Dále vypočteme $y'' = (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$. Protože $y''(1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$, má funkce f v bodě 1 lokální maximum.

4. Užití Taylorova vzorce.

Jestliže funkce f má derivace až do řádu n v $U(x_0)$ a platí pro $n > 1$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

pak

a) pro n sudé existuje v bodě x_0 extrém:
- lokální maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- lokální minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$,

b) pro n liché extrém v bodě x_0 neexistuje.

Tvrzení plyne z toho, že z Taylorova vzorce máme za daných předpokladů

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)}{n!} (\Delta x)^n,$$

přičemž okolí bodu x_0, tedy $U(x_0)$, lze volit tak malé, že $f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)$ má stejné znaménko jako $f^{(n)}(x_0)$.

Příklad 2

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f\colon y = x^5$.

Návod: Máme $y' = 5x^4$, stacionární bod 0. Dále pak $y'' = 20x^3$, $y''(0) = 0$, $y''' = 60x^2$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)} = 120 > 0$. První nenulová derivace je lichého řádu, tedy extrém neexistuje.

9.3 Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci f definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f v některém bodě c_1 své největší hodnoty a v některém bodě c_2 své nejmenší hodnoty. Jiné názvy: *absolutní extrémy*, *globální extrémy*. Každý z bodů c_1, c_2 přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pokud je c_i vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokální extrém, tedy stacionární bod nebo bod, v němž neexistuje derivace. Z toho pak plyne

Postup při určování nejmenší a největší hodnoty funkce na $\langle a, b\rangle$

1. Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.
2. Vypočteme funkční hodnoty v bodech a, b.
3. Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z 1. a 2. je největší hodnotou funkce na $\langle a, b\rangle$, minimum množiny všech těchto hodnot funkce z 1. a 2. je nejmenší hodnotou funkce na $\langle a, b\rangle$.

Tedy není třeba určovat kvalitu lokálních extrémů dle 9.2.

Příklad 1

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f\colon y = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $\langle 0; 2\rangle$.

Návod: $y' = 3x^2 - 3$; f má na $\langle 0; 2\rangle$ jediný stacionární bod 1. Vypočteme $f(1) = -1$ a dále $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Funkce f tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty -1 v bodě 1.

9.4 Konvexnost a konkávnost

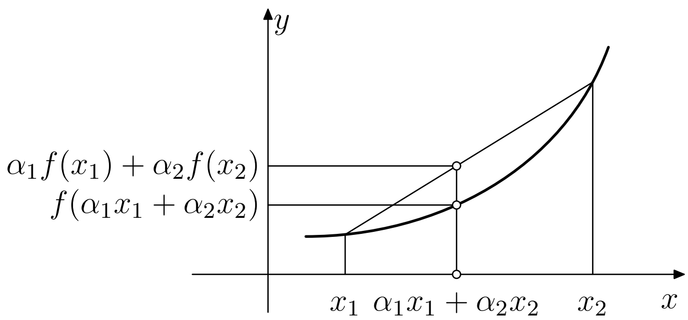
Definice 9.4.1

Funkce f spojitá na intervalu I je na tomto intervalu *konvexní* (*konkávní*), právě když pro libovolné body $x_1, x_2 \in I$ a libovolná nezáporná reálná čísla α_1, α_2 taková, že $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, platí

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqq (\geqq)\, \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Ve smyslu této definice definice jsou uvažované funkce tzv. *neryze konvexní*, *neryze konkávní*. Pokud bychom v definici navíc předpokládali $x_1 \neq x_2$ a $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ a neostré nerovnosti nahradili ostrými, dostali bychom funkce *ryze konvexní*, *ryze konkávní*. V literatuře se někdy nerozlišují se ryze a neryze konvexní či konkávní funkce. Dále si uvědomme, že konvexní (konkávní) funkce nemusí mít na intervalu I derivaci.

Geometrický význam. Funkce $f(x)$ je konvexní, právě když její graf neleží nad libovolnou jeho sečnou (podobně funkce konkávní).

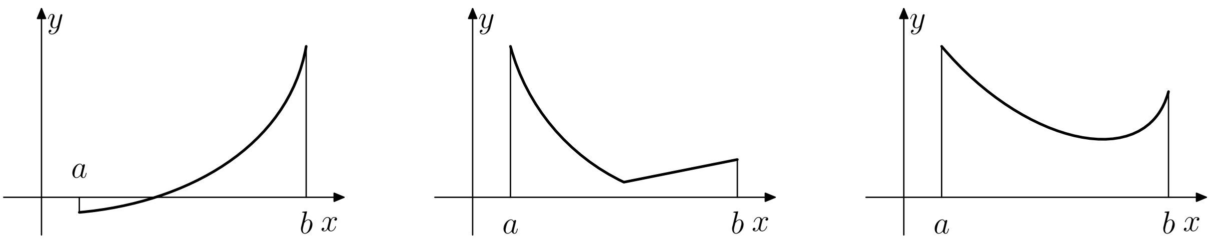


V dalších úvahách budeme často využívat jiný popis konvexnosti. Funkce je ryze konvexní, právě když pro každé tři po sobě jdoucí body jejího grafu „roste“ směrnice sečen jimi určených, tj. grafy funkcí se „ohýbají nahoru“. Označme $k(u, v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ směrnici přímky procházející body $(u, f(u))$, $(v, f(v))$. Je-li f funkce spojitá, je pro $u \neq v$ také funkce $k(u, v)$ spojitá vzhledem k u i vzhledem k v.

Věta 9.4.1

Spojitá funkce f je na intervalu I *konvexní* (*konkávní*), právě když pro každé tři body $x_1, x, x_2 \in I$, kde $x_1 < x < x_2$, platí $k(x_1, x) \leqq k(x, x_2)$ $(k(x_1, x) \geqq k(x, x_2))$.

Na obrázku jsou tři příklady grafů konvexních funkcí na intervalu I.



Příklad 1

Načtrněte graf konkávní funkce, která bude a) rostoucí, b) klesající.

Věta 9.4.2 (1. věta o konvexnosti a konkávnosti)

Nechť funkce f má na intervalu (a, b) 1. derivaci f'. Pak funkce f je na (a, b) ryze konvexní (ryze konkávní), právě když je f' na (a, b) rostoucí (klesající).

Důkaz: Nechť f je konvexní. Zvolme libovolné $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$; dokážeme, že $f'(x_1) < f'(x_2)$. Nechť x_0 je leží mezi x_1 a x_2. Potom pro libovolné body $\bar{x}_1 \in (x_1, x_0)$ a $\bar{x}_2 \in (x_0, x_2)$ platí $k(x_1, \bar{x}_1) < k(\bar{x}_1, x_0)$ a $k(x_0, \bar{x}_2) < k(\bar{x}_2, x_2)$. Z věty o limitě nerovnosti dostaneme

$$f'(x_1) = f'(x_1+) = \lim_{\bar{x}_1 \to x_1+} k(x_1, \bar{x}_1) \leqq \lim_{\bar{x}_1 \to x_1+} k(\bar{x}_1, x_0) = k(x_1, x_0).$$

Podobně ukážeme, že $k(x_0, x_2) \leqq f'(x_2)$. Z $k(x_1, x_0) < k(x_0, x_2)$ již plyne $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Naopak nechť f' je rostoucí na (a, b). Uvažujme libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$ a nechť $x \in (x_1, x_2)$. Dokážeme, že $k(x_1, x) < k(x, x_2)$ a to tak, že najdeme taková $\xi_1 < \xi_2$, že $f'(\xi_1) = k(x_1, x)$, $f'(\xi_2) = k(x, x_2)$. K tomu použijeme Lagrangeovu větu, podle níž existuje bod $\xi_1 \in \langle x_1, x \rangle$ tak, že $f'(\xi_1) = k(x_1, x)$, a podobně existuje $\xi_2 \in \langle x, x_2 \rangle$ tak, že $f'(\xi_2) = k(x, x_2)$, přičemž $x_1 < x < x_2$. Proto $k(x_1, x) = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = k(x, x_2)$, funkce je konvexní.

Na funkci f' z 1. věty o konvexnosti a konkávnosti větu aplikujeme větu o monotónnosti na intervalu a dostaneme následující větu.

Věta 9.4.3 (2. věta o konvexnosti a konkávnosti)

Má-li funkce f na intervalu (a, b) 2. derivaci, pak je tato funkce na (a, b) ryze konvexní (ryze konkávní), právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f''(x) \geqq 0$ ($\leqq 0$), přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ bylo $f''(x) = 0$.

9.5 Inflexe a inflexní body

Definice 9.5.1

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexi*, právě když má derivaci $f'(x_0)$ a je v levém okolí $U(x_0-)$ konvexní (konkávní) a v pravém okolí $U(x_0+)$ konkávní (konvexní). Bod $[x_0, f(x_0)]$ roviny se nazývá *inflexní bod* funkce f resp. grafu funkce f.

Tedy v inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak. *Inflexní tečna*, tj. tečna ke grafu funkce f v inflexním bodě, má tu vlastnost, že v bodě dotyku graf přechází z jedné poloroviny do druhé. Např. osa x je inflexní tečnou ke grafu funkce $y = x^3$. Tím se inflexní tečna liší od tečen v bodech, které nejsou inflexní.

Věta 9.5.1 (vztah inflexe a 1. derivace)

Má-li funkce f v nějakém okolí $U(x_0)$ derivaci f', pak má v bodě x_0 inflexi, právě když má f' v bodě x_0 lokální extrém.

DŮKAZ: Nechť f má v bodě x_0 inflexi. Pak nastává jedna z těchto možností:

a) f je v $U(x_0-)$ konvexní (tj. f' je rostoucí) a v $U(x_0+)$ konkávní (tj, f' je klesající), takže f' má v bodě x_0 lokální maximum;

b) f je v $U(x_0-)$ konkávní (tj. f' je klesající) a v $U(x_0+)$ konvexní (tj, f' je rostoucí), takže f' má v bodě x_0 lokální minimum.

Má-li f' lokální extrém v bodě x_0, je to buď lokální maximum nebo lokální minimum a podobnými úvahami (proveďte je!) pro levé a pravé okolí dojdeme k existenci inflexe.

Věta 9.5.2 (nutná podmínka existence inflexe)

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.

DŮKAZ: plyne z nutné podmínky existence extrému funkce f'.

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

Věta 9.5.3 (vztah inflexe a 2. derivace)

Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' a má-li tato derivace v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Má-li f'' stejné znaménko v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$, pak funkce f v bodě x_0 inflexi nemá.

Věta 9.5.4 (vztah inflexe a 3. derivace)

Nechť funkce f má v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'', přičemž $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexi.

Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Pro n liché existuje v bodě x_0 inflexe, pro n sudé nikoli.

Příklad 1

Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce $y = x\mathrm{e}^{-x}$.

NÁVOD: Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme

$$y' = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad y'' = (x-2)e^{-x}, \qquad \text{přitom } \mathrm{e}^{-x} > 0.$$

Pro $x < 2$ je $y'' < 0$, funkce je konkávní, pro $x > 2$ je $y'' > 0$, funkce je konvexní. Pro $x = 2$ má funkce inflexi, inflexní bod je $(2; 2\mathrm{e}^{-2})$.

9.6 Asymptoty

Asymptoty jsou přímky a představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu. Např. souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce $y = 1/x$. Máme asymptoty dvou druhů a vyslovíme pro ně dvě různé definice, protože to je praktické, i když z hlediska geometrického jde o tentýž jev.

Definice 9.6.1

Přímka $x = c$ se nazývá *vertikální asymptota* grafu funkce f, právě když funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

Takových asymptot může mít funkce nekonečně mnoho, příkladem je funkce tangens. Kromě toho mohou pro danou funkci existovat ještě nejvýše dvě asymptoty s rovnicemi tvaru $y = kx + q$.

Definice 9.6.2

Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota* (*se směrnicí*) grafu funkce f, právě když pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$ je $\lim(f(x) - (kx + q)) = 0$.

Asymptoty se směrnicí se zpravidla zjišťují podle následující věty.

Věta 9.6.1 (o výpočtu asymptot)

Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce f, právě když existují limity (pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$)

$$\lim \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{a} \qquad \lim(f(x) - kx) = q.$$

DŮKAZ: Všechny dále uvedené limity uvažujeme pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$.

Nechť přímka $y = kx + q$ je asymptotou. Pak $\lim(f(x) - (kx + q)) = 0$, tj.

$$\lim \frac{f(x) - kx - q}{x} = 0.$$

Protože $q/x \to 0$, platí $\lim f(x)/x - k = 0$, tedy $\lim f(x)/x = k$. Druhá rovnost je zřejmá, neboť ve vztahu $\lim(f(x) - (kx + q)) = 0$ lze provést rozdělení na dvě limity $\lim(f(x) - kx) - q = 0$.

Existují-li naopak limity pro k a pro q, plyne ze vztahu $\lim(f(x) - kx) = q$ definiční vztah $\lim(f(x) - (kx + q)) = 0$.

Praktický postup v běžných případech

1. Vyšetříme okolí bodů nespojitosti funkce f, které jsou hromadným bodem $D(f)$, a krajní body intervalů, jež jsou součástí $D(f)$. Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.
2. Je-li $-\infty$ nebo $+\infty$ hromadným bodem $D(f)$, hledáme $\lim f(x)/x$. Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice k asymptot, pokud asymptoty existují. Dále ještě hledáme $\lim(f(x) - kx)$ s oním k, jež bylo vypočteno v předchozí limitě. Existuje-li tato limita, je to q a asymptota existuje.

Při výpočtu $k = \lim \dfrac{f(x)}{x}$ lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož $k = \lim f'(x)$. Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li $\lim f'(x)$, neznamená to neexistenci asymptot).

Příklad 1

Určete asymptoty pro funkci $y = 2x + \operatorname{arctg} x$.

Návod: Definičním oborem této funkce je $\mathbb{R}$, vertikální asymptoty neexistují a

$$k = \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \left(2 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 2,$$

neboť v posledním zlomku je funkce v čitateli omezená, takže tento zlomek konverguje k 0. Dále

$$q = \lim(2x + \operatorname{arctg} x - 2x) = \pm\pi/2.$$

Existují tedy 2 asymptoty: $y = 2x - \pi/2$ pro $x \to -\infty$ a $y = 2x + \pi/2$ pro $x \to +\infty$.

Příklad 2

Určete asymptoty pro funkci $y = x + \sqrt{x}$.

Návod: V krajním bodě 0 definičního oboru vertikální asymptota neexistuje. Zde je nevlastním hromadným bodem $D(f)$ jen $+\infty$. Počítáme

$$k = \lim \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim \frac{\sqrt{x}}{x} = 1, \qquad q = \lim \left(x + \sqrt{x} - x\right) = +\infty,$$

asymptota neexistuje.

9.7 Průběh funkce

O vyšetřování průběhu funkce lze pojednat dvěma způsoby.

Činnosti, ze kterých se vyšetřování průběhu funkce skládá

1. Definiční obor, body nespojitosti.
2. Obor hodnot, omezenost; nulové body funkce; intervaly, kde je funkce kladná, kde je záporná.
3. Funkční vlastnosti: parita, periodičnost.
4. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce, v krajních bodech definičního oboru, resp. v $-\infty$, $+\infty$.
5. Intervaly monotónnosti (kde funkce roste, kde klesá) nebo konstantnosti.
6. Lokální extrémy funkce.
7. Intervaly konvexnosti a konkávnosti.
8. Inflexe, inflexní body grafu funkce.
9. Asymptoty grafu funkce.
10. Sestrojení grafu funkce.

Praktický postup při vyšetřování průběhu funkce

Praktický postup při vyšetřování průběhu funkce sleduje v běžném případě i myšlenku správného a přehledného záznamu výsledků a mezivýsledků do tabulky. Proto postupujeme následujícím způsobem.

Údaje pro tabulku

Zjistíme údaje potřebné pro sestavení tabulky, sestavíme tabulku a zaznamenáme do ní dosud známé údaje o funkci. Lze doporučit toto pořadí činností.

a) Provedeme 1. (určíme $D(f)$ a body nespojitosti).
b) Provedeme 3. (stanovení parity a periodičnosti), tj. zjistíme, zda bychom mohli zmenšit rozsah vyšetřování funkce tím, že se omezíme např. jen na interval $\langle 0; +\infty)$ nebo jen na jednu periodu u funkce periodické.
c) Vypočteme 1. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme stacionární body. K nim přidáme ty body z $D(f)$, v nichž 1. derivace neexistuje. Má-li funkce lokální extrém, pak nastane v některém z těchto bodů.
d) Vypočteme 2. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme body, v nichž může mít funkce inflexi. K nim přidáme ty body z $D(f')$, v nichž 2. derivace neexistuje.
e) Sestavíme tabulku, kde v horizontálním záhlaví zaznamenáme rozčlenění číselné osy s ohledem na a), b), c), d); ve vertikálním záhlaví jsou řádky pro x, y, y', y'', a pro záznam vlastností funkce f. Do tabulky přeneseme údaje již zjištěné.

Doplnění tabulky

Postupně zjišťujeme další vlastnosti funkce a zaznamenáváme je do tabulky.

f) Užitím znaménka 1. derivace určíme 5. (intervaly monotonnosti).
g) Na základě f) zjistíme 6. (lokální extrémy), včetně funkčních hodnot v těchto bodech.
h) Užitím znaménka 2. derivace určíme 7 (konvexnost a konkávnost).
i) Na základě h) zjistíme 8. (inflexi), včetně funkčních hodnot v těchto bodech a hodnot 1. derivací.
j) Určíme 9. (asymptoty).
k) Určíme 4. (limity), pokud je to po j) ještě třeba.
l) Určíme 2 (funkční obor, nulové body, znaménka funkce).

Sestrojení grafu

Doplníme údaje potřebné pro sestrojení grafu a sestrojíme graf funkce.

m) Podle potřeby doplníme např. průsečík grafu funkce s osou y, hodnoty funkce v dalších bodech $D(f)$, případně i hodnoty derivací (připojíme k tabulce jako dodatek).
n) Provedeme bod 10 (sestrojíme graf funkce).

Příklad 1

Sestavte tabulku pro vyšetření průběhu funkce $y = x + \dfrac{1}{x}$.

NÁVOD: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, funkce je lichá, tj. graf bude souměrný podle počátku.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}; \quad y' = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \text{ (stacionární body)}; \quad y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0.$$

Sestavíme tabulku (např. jen) pro interval $\langle 0; +\infty)$.

x	0	$\to 0+$	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$	$\to +\infty$
y	*n.d.*	$\to +\infty$	$-$	2	$-$	$\to +\infty$
y'	*n.d.*	$\to -\infty$	< 0	0	> 0	$\to 1$
y''	*n.d.*	$-$	> 0	> 0	> 0	$-$
funkce	*n.d.*	vert. asymptota $x = 0$	klesá	lok. min.	roste	asymptota $y = x$
			konvexní			

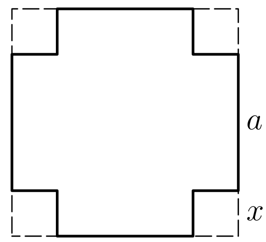
Inflexní body neexistují.

9.8 Užití extrémů funkcí

Na výpočet extrémů vede řada praktických úloh.

Příklad 1

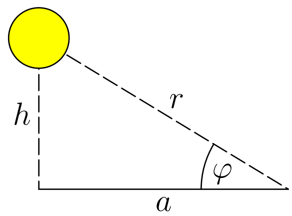
Ze čtvercového listu papíru o straně a má být po vystřižení čtverečků v rozích složena krabice o maximálním objemu. Vypočtěte stranu čtverečků, jež mají být v rozích vystřiženy a rozměry výsledné krabice.



NÁVOD: $V = (a-2x)^2 x$, $V' = 12x^2 - 8ax + a^2$, stacionární body $x_1 = a/6$, $x_2 = a/2$ (nevyhovuje praktické úloze); rozměry krabice jsou $2/3\,a \times 2/3\,a \times 1/6\,a$, výška je rovna čtvrtině šířky čtvercového dna.

Příklad 2

Pracoviště je v konstantní vzdálenosti a od průmětu světla na vodorovnou rovinu. Při jaké výšce h světla je osvětlení pracoviště maximální?



NÁVOD: Intenzita osvětlení závisí na vstupních podmínkách takto: $I = c \cdot \dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, kde $\sin\varphi = \frac{h}{r}$ a $r = \sqrt{h^2+a^2}$, takže $I = I(h)$; po dosazení

$$I = c \cdot \frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad I' = c \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Stacionární bod (maximum) $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7a$.

Příklad 3

Výkon Peltonova kola je $P = ku(v-u)$, kde u je obvodová rychlost Peltonova kola a v je rychlost vodního paprsku. Při jaké rychlosti u je výkon Peltonovy turbiny maximální?

NÁVOD:

$$P = P(u), \quad P' = kv - 2ku(=0) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v}{2}.$$

Příklad 4

Určete rozměry konzerv tvaru rotačního válce o daném objemu V tak, aby se při jejich výrobě spotřebovalo co nejmenší množství plechu.

NÁVOD: Hledá se minimum funkce $S = 2\pi xv + 2\pi x^2$, kde x je poloměr dna konzervy a v výška konzervy, za podmínky, že $V = \pi x^2 v$ je zadané (tedy konstantní). Po dosazení za v z této podmínky máme $S = \dfrac{2V}{x} + 2\pi x^2$, odkud $S' = -\dfrac{2V}{x^2} + 4\pi x$. Z rovnice $S' = 0$ máme $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Odsud je

$$v_0 = \frac{V}{\pi x_0^2} = \ldots = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x_0$$

výška konzervy je rovna průměru dna.

Kapitola 10

Metody integrace pro funkce jedné proměnné

10.1 Základní vzorce

Definice 10.1.1 (primitivní funkce)

Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu $I \subset D(f)$, právě když pro každé $x \in I$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

V této kapitole se budeme zabývat problémem, jak k dané funkci f stanovit množinu všech jejích primitivních funkcí F, tedy *neurčitý integrál* funkce f. Podle věty 8.3.2 víme, že znalost jedné primitivní funkce F znamená znalost všech zbývajících; všechny primitivní funkce pak jsou $F + C$, kde C je libovolné reálné číslo (*integrační konstanta*).

Při určování primitivních funkcí k dané (elementární) funkci f nastávají dva základní problémy:

1. zda pro danou funkci f primitivní funkce vůbec existuje,
2. pokud ano, zda ji lze vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí.

V následující kapitole uvidíme, že každá funkce f spojitá na intervalu J má zde primitivní funkci. Přitom se ovšem dá dokázat, že primitivní funkci k dané elementární funkci je možné vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen pro vybrané typy integrovaných funkcí, z nichž některé jsou probrány v této kapitole spolu s příslušnými metodami výpočtu primitivních funkcí.

Je-li tedy f funkce elementární, pak primitivní funkce není nutně také elementární; přitom funkce f může mít i poměrně jednoduché analytické vyjádření. Např.

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

nejsou funkce elementární, tj. nelze je vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí. (Vyjadřujeme je zpravidla pomocí mocninných řad.)

V kapitole 7 jsme se setkali se sadou základních vzorců pro derivace elementárních funkcí. K nim dostáváme ihned odpovídající vzorce pro stanovení primitivních funkcí. Např. $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$, neboť $(\sin x)' = \cos x$, neurčitým integrálem k funkci $\cos x$ je množina funkcí $\sin x + C$, kde C je integrační konstanta. Zapisujeme

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad \text{obecně} \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f. Operaci, při níž k dané funkci stanovujeme primitivní funkci nebo neurčitý integrál, nazveme *integrace*. Výraz $f(x)\,\mathrm{d}x$ za znakem integrace se nazývá *integrand*, říkáme, že danou funkci f *integrujeme*.

Funkce	Funkce primitivní	Funkce	Funkce primitivní
x^m	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
e^x	e^x	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{cotgh} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argtgh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh} x$

Tabulka 10.1.1 Tabulka primitivních funkcí ($m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$)

Ze vzorců pro derivace plynou vzorce pro integraci v tabulce 10.1.1.

Z věty o derivaci součtu (rozdílu) plyne: Je-li F primitivní funkce k funkci f a G primitivní funkce k funkci g, je $F+G$ $(F-G)$ primitivní funkce k funkci $f+g$ $(f-g)$. Podobně platí: Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak kF (kde k je konstanta) je primitivní funkce k funkci kf. Z těchto tvrzení plyne, že neurčitý integrál je lineární operátor, tj. platí

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

10.2 Integrace užitím substitucí

Základem jsou dvě věty o substitucích.

Věta 10.2.1 (1. věta o substituci)

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu J, dále nechť funkce φ má na intervalu I derivaci, přičemž $\varphi(I) \subset J$. Pak složená funkce $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I.

Důkaz: Podle věty o derivaci složené funkce derivujeme funkci $F \circ \varphi$

$$[(F \circ \varphi)(x)]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = [(f \circ \varphi) \cdot \varphi'](x).$$

V příkladech na použití 1. věty o substituci má tedy integrovaná funkce tvar součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce.

Příklad 1

Vypočtěte $\displaystyle\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Návod: Označme $u = \varphi(x) = \sin x$, potom $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$, tedy $f(u) = u$, a proto $F(u) = \frac{1}{2}u^2$. Obvykle tyto úvahy zapisujeme

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} u = \sin x \\ \mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Příklad 2

Vypočtěte $\displaystyle\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

Návod:

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \int -(1-\cos^2 x)(-\sin x \,\mathrm{d}x) \begin{bmatrix} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$
$$= \int (u^2 - 1) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 - u + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vybrané typické příklady na použití 1. věty o substituci ($m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$\int \sin^m x \cos x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\ln^m x}{x} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\operatorname{arctg}^m x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x, \ldots$$

Při výpočtu neurčitých integrálů se vyskytuje integrační konstanta C. V dalším textu bude, aniž bychom to explicitně vyjadřovali, $C \in \mathbb{R}$.

Velmi často užívaným důsledkem první věty o substituci je integrace složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární. Je-li F primitivní funkce k funkci f, potom pro reálná čísla $a \neq 0$, b platí

$$\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

takže například

$$\int e^{2x+3} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + C, \qquad \int \cos \frac{x}{3} \,\mathrm{d}x = 3 \sin \frac{x}{3} + C.$$

Dalším často užívaným důsledkem 1. věty o substituci je integrace složené funkce ve tvaru zlomku, kde čitatel je derivací jmenovatele. Na intervalu, kde $f(x) \neq 0$, platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C.$$

Například

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\ln |\cos x| + C, \qquad \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 3} \,\mathrm{d}x = \ln(x^2 - x + 3) + C, \ldots$$

Věta 10.2.2 (2. věta o substituci)

Nechť φ je bijekce intervalu I na interval J taková, že $\varphi'(x) \neq 0$ na I. Je-li funkce F funkcí primitivní k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I, pak funkce $F \circ \varphi^{-1}$ je funkce primitivní k funkci f na J (kde φ^{-1} je funkce inverzní k φ).

DŮKAZ: Nechť $u = \varphi(x)$, tj. $x = \varphi^{-1}(u)$. Podle vět o derivaci složené a inverzní funkce platí

$$[(F \circ \varphi^{-1})(u)]' = F'(\varphi^{-1}(u)) \cdot (\varphi^{-1}(u))' = F'(x) \cdot \frac{1}{\varphi'(x)} = [f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)] \frac{1}{\varphi'(x)} = \\ = f(\varphi(x)) = f(u).$$

Uvědomme si, že předpoklad nenulovosti derivace funkce φ na intervalu I znamená, že ve druhé větě o substituci na rozdíl od věty první musí být funkce φ na intervalu I prostá.

Příklad 3

Užitím 2. věty o substituci vypočtěte $\displaystyle\int \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

NÁVOD:

Podle 2. věty o substituci platí

$$\int \sin 2x \, \mathrm{d}x \left[\begin{array}{r} u = \varphi(x) = 2x \\ \varphi'(x) = 2 \neq 0 \\ x = \varphi^{-1}(u) = \frac{1}{2}u \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right] = \int \sin u \, \frac{\mathrm{d}u}{2} = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Podle 2. věty o substituci se postupuje v mnoha speciálních případech, např. při integraci některých iracionálních funkcí (sekce 10.5) nebo u goniometrických a hyperbolických substitucí (sekce 10.8).

10.3 Metoda per partes

Věta 10.3.1 (integrace per partes)

Nechť funkce f, g jsou definovány a mají derivaci na intervalu J. Jestliže Ψ je funkce primitivní k $f' \cdot g$ na J, pak $\Phi = f \cdot g - \Psi$ je primitivní funkcí k funkci $f \cdot g'$ na J.

DŮKAZ: Věta o integraci per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu. Její tvrzení ověříme derivováním

$$\Phi'(x) = (f \cdot g - \Psi)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - \Psi'(x) = f(x)g'(x).$$

Jiný přístup: Pro $u = f(x)$, $v = g(x)$ je $(uv)' = u'v + uv'$, tj. $uv' = (uv)' - u'v$, takže

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 1
Vypočtěte $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Návod: Položme $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$. Potom $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$. Tedy primitivní funkce k funkci $f'(x)g(x) = \sin x$ je $\Psi(x) = -\cos x$. Proto $\Phi(x) = f(x)g(x) - \Psi(x) = x\sin x + \cos x$. Tento postup zapisujeme obvykle užitím pomocných proměnných u, v, kde $u = f(x)$, $v = g(x)$

$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

Příklad 2
Vypočtěte $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$.

Návod:

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + \int 2x\cos x \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} u = 2x & v' = \cos x \\ u' = 2 & v = \sin x \end{bmatrix} =$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x \,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Typické příklady na metodu per partes:

$$\int x^n \cos x \,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \ln x \,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x.$$

Zvláštní případy použití metody per partes

Výpočet integrálů $I_c = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x$, $I_s = \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx \,\mathrm{d}x$

Nechť a, b jsou nenulová reálná čísla. V integrálu I_c se použije dvěma způsoby metoda per partes

$$I_c = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^{ax} & v' = \cos bx \\ u' = a\mathrm{e}^{ax} & v = \frac{1}{b}\sin bx \end{bmatrix} = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \int \frac{a}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_s,$$
$$I_c = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} u = \cos bx & v' = \mathrm{e}^{ax} \\ u' = -b\sin bx & v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \int \frac{b}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_s,$$

Na tyto dva vztahy se můžeme dívat jako na dvě lineární rovnice s neznámými I_c a I_s, jejichž řešením dostaneme

$$I_c = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax}, \qquad I_s = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax}.$$

Protože I_c a I_s jsou primitivní funkce, ještě k oběma výrazům přidáme integrační konstantu.

Vzorce pro I_c a I_s lze odvodit i alternativním způsobem

$$I_c = \int e^{ax}\cos bx\,dx \begin{bmatrix} u = e^{ax} & v' = \cos bx \\ u' = ae^{ax} & v = \frac{1}{b}\sin bx \end{bmatrix} = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \int \frac{a}{b}e^{ax}(-\sin bx)\,dx$$

$$\begin{bmatrix} u = e^{ax} & v' = -\frac{a}{b}\sin bx \\ u' = ae^{ax} & v = \frac{a}{b^2}\cos bx \end{bmatrix} = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I_c.$$

Z této rovnice pak dopočteme I_c.

Rekurentní vzorec pro integrál $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$

Pro reálné $a \neq 0$ platí

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \begin{bmatrix} u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} & v' = 1 \\ u' = \dfrac{-2(n-1)x}{(x^2+a^2)^n} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2 I_n,$$

odkud dostaneme

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

10.4 Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace

Na základě předchozích sekcí již víme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ platí

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Příklad 1

Určete $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-3}$. Výsledek: $\frac{1}{5}\ln|5x-3| + C$

Příklad 2

Určete $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{(x+1)^6}$. Výsledek: $-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x+1)^5} + C$

Nyní se budeme zabývat výpočtem integrálu $\displaystyle\int \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,dx$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom ($b, c, p, q \in \mathbb{R}$). Řešení úlohy vede po úpravě na součet přirozeného logaritmu a arkus tangens.

Příklad 3

Určete $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x.$

Návod:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-8}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x - 8\int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+6x+13) - 4\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Zdůvodněte, proč nemusíme psát ve výsledku v argumentu logaritmu absolutní hodnotu.

A nakonec podobnými úvahami při využití rekurentního vzorce I_n jsme schopni určit dokonce

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x,$$

kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom ($b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$).

Příklad 4

Určete $\displaystyle\int \frac{2x+9}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x.$

Návod:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+9}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(2x+6)+3}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+6}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{\left((x+3)^2+4\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{x^2+6x+13} + 3\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x+3}{(x+3)^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{3x+1}{x^2+6x+13} + \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme postupovali podobně jako v předchozím příkladu.

Racionální funkce $P(x)/Q(x)$

Při integraci takovýchto funkcí využíváme mnoho poznatků z algebry. Jednak používáme větu o rozkladu polynomu s reálnými koeficienty na součin lineárních dvojčlenů (kořenových činitelů) a kvadratických trojčlenů nerozložitelných v $\mathbb{R}$. Dále větu o rozkladu racionální lomené funkce na součet polynomu a ryze racionální lomené funkce a konečně větu o rozkladu ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky.

Věta 10.4.1 (o rozkladu ryze racionální lomené funkce)

Uvažujme ryze racionální lomenou funkci P/Q, kde P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, přičemž stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q. Nechť dále

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_m)^{k_m}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\dots(x^2+b_nx+c_n)^{l_n}$$

je rozklad (normovaného) polynomu Q na součin lineárních dvojčlenů a nerozložitelných kvadratických trojčlenů, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$, $k_i, l_j \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Potom existují reálná čísla A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} tak, že pro všechna x z definičního oboru P/Q platí

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{x-a_1} + \ldots + \\
& + \frac{A_{m1}}{(x-a_m)^{k_m}} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^{k_m-1}} + \ldots + \frac{A_{mk_m}}{x-a_m} + \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \\
& + \frac{B_{n1}x + C_{n1}}{(x^2+b_nx+c_n)^{l_n}} + \frac{B_{n2}x + C_{n2}}{(x^2+b_nx+c_n)^{l_n-1}} + \ldots + \frac{B_{nl_n}x + C_{nl_n}}{x^2+b_nx+c_n}.
\end{aligned}$$

A protože každá polynomická funkce je integrovatelná a každý ze zlomků v předcházející větě patří k základním typům racionálních funkcí, umíme integrovat každou racionální funkci.

Ještě jednou připomeňme algoritmus integrace racionálních funkcí $P(x)/Q(x)$:

1. Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok 2. Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$
kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$.
2. Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod 3., jinak tento rozklad jmenovatele provedeme.
3. Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod 4.; jinak provedeme rozklad zlomku $R(x)/Q(x)$ na parciální zlomky.
4. Integrujeme všechny komponenty rozkladu funkce $P(x)/Q(x)$.

Příklad 5

Vypočtěte
$$\int \frac{7x^4 - 20x^3 + 4x + 20}{(x-2)^3(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Návod: Jedná se o integrál ryze racionální lomené funkce, můžeme ji rozložit na parciální zlomky. Podle věty o rozkladu na parciální zlomky existují reálné konstanty A, B, C, D, E tak, že platí
$$\frac{7x^4 - 20x^3 + 4x + 20}{(x-2)^3(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$
Obě strany této rovnosti vynásobíme $(x-2)^3(x^2+2x+2)$ a porovnáním polynomů na pravé a levé straně dostaneme
$$A = -2, \quad B = 0, \quad C = 5, \quad D = 2, \quad E = 2.$$
Proto
$$\begin{aligned}
\int \frac{7x^4 - 20x^3 + 4x + 20}{(x-2)^3(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{-2}{(x-2)^3} + \frac{5}{x-2} + \frac{2x+2}{x^2+2x+2} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{(x-2)^2} + 5\ln|x-2| + \ln(x^2+2x+2) + C.
\end{aligned}$$

Příklad 6

Vypočtěte
$$\int \frac{x^5+9}{x^4+9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Návod: V integrandu je racionální lomená funkce, kde stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele, proto pomocí dělení polynomů integrand vyjádříme jako součet polynomu a racionální lomené funkce. Dostaneme
$$\frac{x^5+9}{x^4+9x^2} = x + \frac{-9x^3+9}{x^4+9x^2}.$$
Podle věty o rozkladu na parciální zlomky existují reálné konstanty A, B, C, D tak, že platí
$$\frac{-9x^3+9}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+9}.$$
Dopočteme
$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -9, \quad D = -1.$$
Proto
$$\int \frac{x^5+9}{x^4+9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{1}{x^2} + \frac{-9x-1}{x^2+9} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - \frac{9}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Na integraci racionálních funkcí vede výpočet integrálů mnoha dalších typů funkcí, jak uvidíme dále.

10.5 Integrace některých iracionálních funkcí

Integrály typu $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$

Nechť $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných, $m \in \mathbb{N}$ a a, b, c, d taková reálná čísla, pro která $ad - bc \neq 0$. Potom substitucí
$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$
převedeme integrál na integrál racionální funkce, který již umíme vypočítat.

Příklad 1

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,\mathrm{d}x.$

Návod:
$$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{2x-1} \\ x = \frac{1}{2}(t^2+1) \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array} \right] = \int \frac{t}{t^2+1+7} t\,\mathrm{d}t = \ldots = \sqrt{2x-1} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4x-2}}{4} + C.$$

Integrály typu $\displaystyle\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_m}{q_m}})\,\mathrm{d}x$

Nechť $R(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je racionální funkce $m+1$ proměnných a p_i, q_i jsou přirozená čísla. Substitucí $x = t^n$, kde $n = \mathrm{n}\,(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ je nejmenší společný násobek čísel $q_1, q_2, \ldots, q_m$, se daný integrál převede na integrál z funkce racionální.

Příklad 2

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Návod:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \left[\begin{array}{c} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{t^6 \cdot 6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = \ldots =$$
$$= \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{3x^{4/3}}{4} + \frac{6x^{7/6}}{7} - x + \frac{6x^{5/6}}{5} - \frac{3x^{2/3}}{2} + 2\sqrt{x} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln\left(x^{1/6}+1\right).$$

10.6 Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných a a, b, c reálná čísla. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. K dispozici máme tři *Eulerovy substituce.*

1. Pokud $a > 0$ volíme substituci
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t.$$
(Hlavní myšlenka je založena na skutečnosti, že po umocnění obou stran rovnosti se ruší členy ax^2.)
2. Pokud $c > 0$ volíme substituci
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$
(Po umocnění obou stran rovnosti ruší členy c a poté lze celou rovnost lze dělit x.)
3. Pokud kvadratický trojčlen ax^2+bx+c má dva reálné kořeny x_1 a x_2, volíme substituci
$$t = \sqrt{a\,\frac{x-x_1}{x-x_2}}.$$
(Tím jsme přešli na případ $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{d}x$.)

Příklad 1

Ověřte, že při výpočtu $\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x$ lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převeďte integrál na integrál z funkce racionální.

Návod: Je $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny, platí $4x^2+5x+1 = (x+1)(4x+1)$.

Při použití 1. Eulerovy substituce volíme například
$$\sqrt{4x^2+5x+1} = 2x + t,$$
což po umocnění a úpravě dá
$$x = \frac{t^2-1}{5-4t}.$$

Při použití 2. substituce volíme například
$$\sqrt{4x^2+5x+1} = xt - 1,$$
což po umocnění a úpravě dá
$$x = \frac{2t+5}{t^2-4}.$$

Při použití 3. substituce položíme

$$t = \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}},$$

neboli

$$x = \frac{t^2-4}{1-t^2}.$$

Druhou odmocninu můžeme upravit následovně

$$\sqrt{4x^2+5x+1} = |x+1|\sqrt{\frac{4x+1}{x+1}} = \left|\frac{t^2-4}{1-t^2}+1\right| t.$$

Přitom odstranění absolutní hodnoty bude záviset na definičním oboru proměnné x.

10.7 Goniometrické a hyperbolické funkce

Integrál $\int R(\cos x, \sin x)\, \mathrm{d}x$

Nechť $R(a,b)$ je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést výše uvedený integrál na integrál racionální funkce. Podle vlastností funkce R užíváme jednu ze čtyř substitucí:

1. Pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, volíme

$$t = \sin x.$$

   V tomto případě obvykle užíváme první větu o substituci, což vyžaduje napřed upravit vhodným způsobem integrand. V případě užití druhé věty o substituci máme

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}, \quad x = \arcsin t, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

2. Pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, volíme

$$t = \cos x.$$

   I v tomto případě volíme obvykle první větu o substituci, v případě použití druhé věty platí podobné vztahy jako výše.
3. Pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, volíme

$$t = \operatorname{tg} x.$$

   Při této substituce můžeme použít jak první, tak i druhou větu o substituci. V prvním případě to obvykle bude znamenat náročnější úpravu integrandu s využitím vztahu $\cos^2 + \sin^2 x = 1$, ve druhém případě máme

$$\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$\cos x = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

4. Univerzální substituci

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

lze použít vždy. Univerzální substituce přináší zpravidla složitější výpočty, proto se dává přednost substitucím předchozím, pokud je lze použít. Zde se obvykle užívá druhá věta o substituci, proto je potřeba v tomto případě znát (či umět odvodit), čemu je rovno $\sin x$, $\cos x$ a $\mathrm{d}x$. Platí

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \ldots = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Účelem substitucí je převést integrování goniometrických funkcí na integrování funkcí racionálních.

Příklad 1

Vhodnou substitucí převeďte $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sin x \,\mathrm{d}x$ na integrál funkce racionální.

Návod: Z prvních tří uvedených substitucí použijeme $t = \sin x$. Podle 1. věty o substituci dostáváme

$$\int \operatorname{tg} x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sin x + C.$$

Pro porovnání podle 2. věty o substituci máme

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} t = \sin x \\ x = \arcsin t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Příklad 2

Vhodnou substitucí převeďte $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sin x \,\mathrm{d}x$ na integrál funkce racionální.

Návod: Z prvních tří substitucí volíme $t = \cos x$. Podle 1. věty o substituci dostáváme

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}(-\sin x)\,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

Pro porovnání podle 2. věty o substituci máme

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} t = \cos x \\ x = \arccos t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \sin x = \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{(1-t^2)^{3/2}}{t^2}\cdot\frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Příklad 3

Vhodnou substitucí převeďte $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ na integrál z funkce racionální.

Návod: Z prvních tří substitucí volíme $t = \operatorname{tg} x$. Podle 1. věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left[\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int (t^2 + t^4)\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Pro porovnání podle 2. věty o substituci máme

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{r} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right] = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{(1+t^2)^3}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Integrace součinu goniometrických funkcí

Používá se vzorců (pro $m, n \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \sin nx \sin mx &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\big), \\ \sin nx \cos mx &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(n-m)x + \sin(n+m)x\big), \\ \cos nx \cos mx &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\big) \end{aligned}$$

a speciálně

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Příklad 4

Vypočtěte $\int \sin 5x \cos 4x\,\mathrm{d}x$.

Návod:

$$\int \sin 5x \cos 4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 9x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{18}\cos 9x + C.$$

Integrace hyperbolických funkcí

Postupujeme podle analogických vzorců jako pro funkce goniometrické.

Příklad 5

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\cosh^2 x + 1}{\cosh^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

$$\int \frac{\cosh^2 x + 1}{\cosh^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh^2 x + \cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^4 x}\,\mathrm{d}x = \int (2 - \operatorname{tgh}^2 x)\frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left[\begin{array}{c} t = \operatorname{tgh} x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int (2 - t^2)\,\mathrm{d}t = 2\operatorname{tgh} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tgh}^3 x + C.$$

10.8 Goniometrické a hyperbolické substituce

Eulerovy substituce převedou $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$ na integrál racionální funkce. Při praktickém počítání však vzniklé racionální funkce bývají dost složité a jejich rozklady na parciální zlomky obsahují mnoho členů. Proto bývá v některých případech výhodnější použít některou z následujících substitucí (opět R je racionální funkce dvou proměnných).

1. $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) \,\mathrm{d}x$, substituce $x = a \sin t$, $x = a \cos t$ nebo $x = a \operatorname{tgh} t$.
2. $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) \,\mathrm{d}x$, substituce $x = a \operatorname{tg} t$ nebo $x = a \sinh t$.
3. $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) \,\mathrm{d}x$, substituce $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $x = \dfrac{a}{\sin t}$ nebo $x = a \cosh t$.

Příklad 1

Vypočtěte $\int \sqrt{x^2+4x} \,\mathrm{d}x$.

Návod:

$$\int \sqrt{x^2+4x} \,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+2)^2-4} \,\mathrm{d}x \begin{bmatrix} x+2 = 2\cosh t \\ \mathrm{d}x = 2\sinh t \,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \sqrt{4\cosh^2 t - 4}\,(2\sinh t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int 2\sinh^2 t \,\mathrm{d}t = 2\int (\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \sinh 2t - 2t + C =$$
$$= \sinh\left(2 \operatorname{argcosh} \frac{x+2}{2}\right) - 2 \operatorname{argcosh}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

Pokud použijeme vyjádření argumentů hyperbolických funkcí pomocí přirozených logaritmů, můžeme výsledek ještě upravit

$$\sinh\left(2 \operatorname{argcosh} \frac{x+2}{2}\right) - 2 \operatorname{argcosh}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C = \tfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x} - 2\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x}) + C'.$$

Zkuste sami použít některou ze substitucí $x+2 = \dfrac{2}{\cos t}$, $x+2 = \dfrac{2}{\sin t}$ a srovnejte náročnost a rychlost výpočtu.

Které z Eulerových substitucí můžeme použít? Použijte obě a srovnejte náročnost a rychlost výpočtu.

10.9 Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Pro komplexní funkci $w(x)$ reálné proměnné x se derivace a integrál definují stejně jako pro reálné funkce s tím, že imaginární jednotka i se chová jako konstanta. Je-li $a \neq 0$ komplexní číslo, je např. $(\mathrm{e}^{ax})' = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$, $\int \mathrm{e}^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C$.

Elementární funkce e^z, $\cos z$, $\sin z$ se definují i pro komplexní proměnnou z; jejich vzájemný vztah je vyjádřen *Eulerovými vzorci*, podle nichž je

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}), \qquad \sin x = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}).$$

Těchto vzorců lze využít pro výpočet některých integrálů.

Příklad 1

Vypočtěte $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

Návod: Přes funkce komplexní proměnné

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4 = \frac{1}{16}\int (\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}) \,\mathrm{d}x = \ldots = \\ &= \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) + \frac{3}{8}x = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.\end{aligned}$$

Srovnej s výpočtem přes užití goniometrických vzorců

$$\begin{aligned}\int (\sin^2 x)^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \big(1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\big) \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

Příklad 2

Vypočtěte (užitím Eulerových vzorců) $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Návod:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}}{1-\mathrm{i}}\right) + C = \\ &= \ldots = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) + C.\end{aligned}$$

Srovnej s odvozením a výsledkem pro I_c v sekci 10.3.

Kapitola 11

Riemannův určitý integrál

11.1 Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem: užitím (Cauchyho) integrálních součtů nebo pomocí dolních a horních integrálů.

Užití integrálních součtů

Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Dále uvedeme pojmy používané při definici integrálu:

Dělením intervalu (označíme D) nazveme každou konečnou posloupnost reálných čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (zvaných *dělicí body*), kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Element dělení $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, jeho délku označíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Norma dělení $\nu(D) = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$, stručné označení ν.

Definice 11.1.1 (Riemannův určitý integrál)
Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Ke každému dělení D uvažujeme integrální součet

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \text{kde } \xi_i \text{ je libovolný bod elementu } \Delta_i.$$

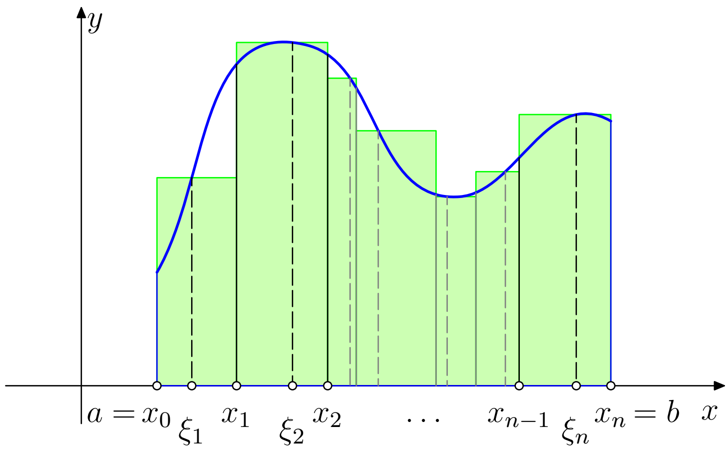
Řekneme, že reálné číslo I je Riemannovým (určitým) integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, právě když ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje kladné reálné číslo δ tak, že pro všechna dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, a pro libovolnou volbu bodů $\xi_i \in \Delta_i$, platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$.

Pak píšeme $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Funkci f nazveme *riemannovsky integrovatelná* na intervalu $\langle a, b\rangle$, tento interval je *oborem integrace*, čísla a, b se nazývají *dolní* resp. *horní mez integrace*, x je *integrační proměnná.*

Znak $\int_a^b$ je symbol pro součet od a do b, $f(x)$ pro $f(\xi_i)$, $\mathrm{d}x$ pro Δx_i. Název Riemannův integrál používáme hlavně pro jeho odlišení od jiných typů integrálů. Není-li třeba zdůrazňovat (Riemannovu) metodu definice integrálu, lze používat jen historický název *určitý integrál.* Kromě funkce riemannovsky integrovatelná funkce říkáme též *integrovatelná (integrace schopná) podle Riemanna.* Množinu všech funkcí integrovatelných na $\langle a, b\rangle$ označíme $R(\langle a, b\rangle)$, a proto můžeme používat stručný zápis $f \in R(\langle a, b\rangle)$. Zvláště si uvědomme, že Riemannův integrál funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$ je reálné číslo.

Geometrickou interpretací součinu $f(\xi_i)\Delta x_i$ pro $f > 0$ je obsah obdélníku o stranách Δx_i a $f(\xi_i)$. Geometrickým významem integrálního součtu $\sigma(f, D)$ je pro $f > 0$ přibližný obsah *základního obrazce*, tj. křivočarého lichoběžníku, jehož hranice leží na přímkách $x = a$, $x = b$, na ose x a na grafu funkce f. Geometrickým významem Riemannova určitého integrálu je v tomto případě obsah základního obrazce.

Uvedenou definici Riemannova integrálu lze vyslovit i pomocí pojmu limita. Nejprve však pojednejme o zjemnění dělení.



Geometrický význam $\sigma(f, D)$

Definice 11.1.2

Dělení D' nazveme *zjemněním dělení* D, právě když každý dělicí bod dělení D je dělicím bodem i dělení D'.

Poznámka:

a) Ke každým dvěma dělením existuje jejich společné zjemnění, i „nejmenší“ společné zjemnění. Množina všech dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ tvoří vzhledem k operaci společného zjemnění tzv. dolní polosvaz.

b) Jestliže postupně zjemňujeme dělení, tak z toho neplyne, že $\nu(D) \to 0$, dokonce se přitom ν nemusí ani zmenšovat. (Zdůvodněte proč.)

Potom můžeme definovat pojem limita integrálních součtů.

Definice 11.1.3

Řekneme, že integrální součty $\sigma(f, D)$ mají limitu $I \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim\limits_{\nu(D) \to 0} \sigma(f, D) = I$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_0 tak, že pro všechna jeho zjemnění D a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$.

A nyní již můžeme vyslovit definici 11.1.1 následujícím způsobem.

Definice 11.1.4 (Riemannův určitý integrál)

Nechť f je omezená funkce na $\langle a, b \rangle$. Ke každému dělení D uvažujeme integrální součet

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \qquad \text{kde } \xi_i \text{ je libovolný bod z elementu } \Delta_i.$$

Řekneme, že číslo I je Riemannovým (určitým) integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$, právě když $\lim\limits_{\nu(D) \to 0} \sigma(f, D) = I$

Dolní a horní integrál

Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné dělení D tohoto intervalu. Označme

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x).$$

Uvažujme součty

$$s(f,D)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \qquad S(f,D)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

které nazveme *dolní*, resp. *horní integrální součet* příslušný k funkci f a dělení D .

Vlastnosti:

a) Nechť D je libovolné dělení intervalu $x\in\langle a,b\rangle$ a D' jeho libovolné zjemnění, potom platí

$$s(f,D)\leqq s(f,D')\leqq S(f,D')\leqq S(f,D).$$

b) Libovolný dolní integrální součet není větší než libovolný horní integrální součet (příslušný třeba i k jinému dělení).

c) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže označíme $m=\inf\{f(x),x\in\langle a,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x),x\in\langle a,b\rangle\}$, platí

$$m(b-a)\leqq s(f,D)\leqq S(f,D)\leqq M(b-a).$$

Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

Definice 11.1.5

Čísla

$$I_*f=\sup_{\forall D} s(f,D), \qquad I^*f=\inf_{\forall D} S(f,D)$$

(kde supremum, resp. infimum počítáme přes všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$) nazýváme *dolní* resp. *horní Riemannův integrál.*

Zřejmě po všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ platí

$$s(f,D)\leqq I_*f\leqq I^*f\leqq S(f,D).$$

Příklad 1

Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce χ na intervalu $\langle 0;1\rangle$.

Návod: Protože libovolný nedegenerovaný uzavřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních i iracionálních čísel, platí pro libovolné dělení D intervalu $\langle 0;1\rangle$

$$s(\chi,D)=\sum_{i}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0, \qquad S(\chi,D)=\sum_{i}^{n} 1\cdot\Delta x_i=1.$$

Proto pro funkci χ platí

$$I_*\chi=0, \qquad I^*\chi=1.$$

Definice 11.1.6 (jiná definice Riemannova určitého integrálu)

Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že f je na $\langle a, b\rangle$ riemannovsky integrovatelná, právě když

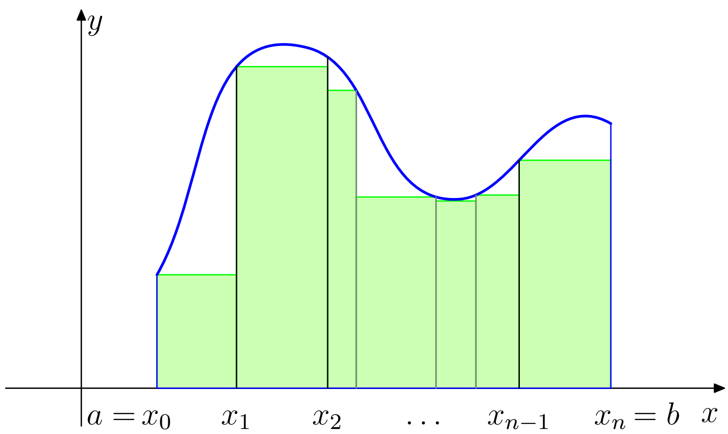
$$I_* f = I^* f.$$

Společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazveme Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ a označíme

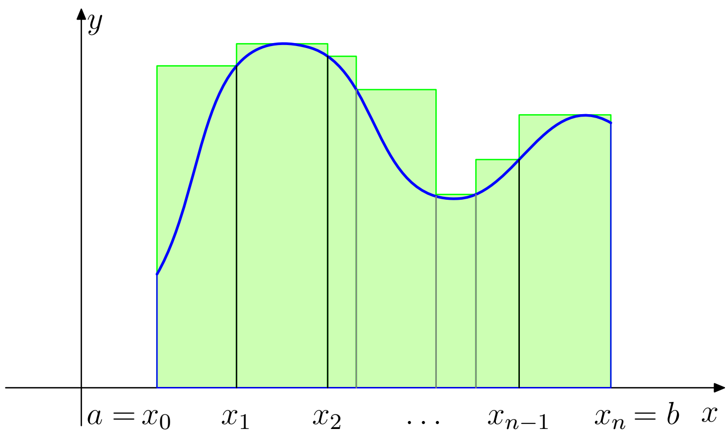
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_* f = I^* f.$$

Dá se dokázat ekvivalence obou definic Riemannova integrálu.

Geometrickým významem dolního součtu je pro $f > 0$ obsah jistého mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce, geometrickým významem horního součtu je obsah jistého mnohoúhelníku, do nějž je základní obrazec vepsán (viz obr.). V souladu s definicí míry rovinného obrazce je geometrickým významem Riemannova určitého integrálu obsah (míra) základního obrazce.



Geometrický význam $s(f, D)$



Geometrický význam $S(f, D)$

I v tomto případě lze využít pojmu limita. Důsledkem vlastnosti a) dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ totiž je, že pro každou *normální posloupnost* (D_n) dělení, tj. kde $\nu(D_n)\to 0$ a přitom každý další člen je zjemněním předchozího, je odpovídající posloupnost $\big(s(f,D_n)\big)$ neklesající a posloupnost $\big(S(f,D_n)\big)$ je nerostoucí.

Integrovatelnost funkcí

Z teoretických důvodů (tj. pro použití v důkazech vlastností funkcí integrovatelných) se formuluje následující nutná a postačující podmínka integrovatelnosti, v níž se vyskytuje pojem oscilace funkce. *Oscilace funkce* f na intervalu $\Delta_i=\langle x_{i-1},x_i\rangle$ je číslo $\omega_i=M_i-m_i$.

Věta 11.1.1 (nutná a postačující podmínka integrovatelnosti podle Riemanna)

Funkce f patří do $R(\langle a,b\rangle)$, právě když $\displaystyle\lim_{\nu(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$, tj. když ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje kladné reálné číslo δ tak, že pro všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že $\nu(D)<\delta$ platí $|\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i|<\varepsilon$.

Důkaz: (princip) Lze ukázat, že

$$I_*f=\lim_{\nu(D)\to 0}s(f,D)\qquad\text{a}\qquad I^*f=\lim_{\nu(D)\to 0}S(f,D).$$

Dále ukážeme

$$\begin{aligned}s(f,D)&=\inf\{\sigma(f,D)\text{ pro každý výběr }\xi_i\in\Delta_i\}\qquad\text{a}\\ S(f,D)&=\sup\{\sigma(f,D)\text{ pro každý výběr }\xi_i\in\Delta_i\}.\end{aligned}$$

Z těchto vztahů pak plyne dokazovaná věta, jelikož $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=S(f,D)-s(f,D)$.

Z praktických důvodů byla formulována kritéria (tj. jednoduché postačující podmínky) integrovatelnosti podle Riemanna. Lze dokázat, že do množiny $R(\langle a,b\rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

- třída všech funkcí spojitých na $\langle a,b\rangle$,
- třída všech funkcí po částech spojitých na $\langle a,b\rangle$,
- třída všech funkcí monotónních a omezených na $\langle a,b\rangle$.

V množině $R(\langle a,b\rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f\in R(\langle a,b\rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g\in R(\langle a,b\rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

11.2 Newtonův vzorec

Věta 11.2.1 (Newtonův vzorec)

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má zde primitivní funkci F. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

DŮKAZ: (princip) Pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že uvnitř každého elementu $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ má funkce F derivaci, platí, že funkce F na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ splňuje předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Tedy existuje $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tak, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Nyní máme

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(f, D).$$

Jelikož f je integrovatelná, můžeme v integrálních součtech vzít právě tato ξ_i a tvrzení plyne z definice Riemannova integrálu.

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Příklad 1

Vypočtěte

$$\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

NÁVOD:

$$\int_a^b \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Příklad 2

Vypočtěte

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}.$$

NÁVOD: Nejprve (např. substitucí $z = \ln x$) určíme primitivní funkci k funkci $\frac{1}{x\ln^2 x}$. Platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Proto

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

11.3 Základní vlastnosti určitého integrálu

Hodnota integrálu závisí na integrované funkci (integrandu) a současně na intervalu integrace. Dostáváme tak několik typů vlastností integrovatelných funkcí a integrálu.

Vlastnosti závislé na integrované funkci

Věta 11.3.1 (linearita integrálu vzhledem k funkci)

1. Jestliže $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a k je reálné číslo, potom $kf \in R(\langle a,b\rangle)$ a navíc platí
$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Jsou-li $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$, pak $(f+g) \in R(\langle a,b\rangle)$ a navíc platí
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DůKAZ: Užijeme vlastnosti integrálních součtů.

Věta 11.3.2 (monotonnost integrálu)

Nechť $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$.

1. Jestliže $f(x) \geqq 0$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$, pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0$.
2. Jestliže $f(x) \leqq g(x)$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$, pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Platí $|f| \in R(\langle a,b\rangle)$ a navíc $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

DůKAZ: Tvrzení 1. plyne z definice, tvrzení 2. plyne z 1. a tvrzení 3. plyne z nutné a postačující podmínky integrovatelnosti a z tvrzení 2., neboť $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$.

Věta 11.3.3 (o součinu funkcí)

Jsou-li $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$, pak i $f\cdot g \in R(\langle a,b\rangle)$.

DůKAZ: (princip) Jelikož f a g jsou omezené funkce, existují nezáporné reálné konstanty K a L takové, že $\forall x \in \langle a,b\rangle$ platí $|f(x)| \leqq K$ a $|g(x)| \leqq L$. Pro libovolná $x', x'' \in \langle a,b\rangle$ pak platí
$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| = |f(x'')(g(x'')-g(x')) + g(x')(f(x'')-f(x'))| \leqq$$
$$\leqq |f(x'')|\cdot|(g(x'')-g(x'))| + |g(x')|\cdot|(f(x'')-f(x'))| \leqq K|g(x'')-g(x')| + L|f(x'')-f(x')|.$$
Dále užijeme větu 11.1.1.

Uvedená věta na rozdíl od věty 11.3.1 neposkytuje návod, jak daný integrál vyčíslit.

Vlastnosti závislé na intervalu integrování

Věta 11.3.4 (aditivita integrálu vzhledem k mezím)

Nechť $a < c < b$. Potom $f \in R(\langle a,b\rangle)$, právě když $f \in R(\langle a,c\rangle)$ a současně $f \in R(\langle c,b\rangle)$. Přitom platí
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DůKAZ: Plyne z vlastností integrálních součtů, uvažujeme-li bod c jako jeho dělicí bod.

Předcházející větu lze rozšířit i na konečný počet intervalů.

Příklad 1

Vypočtěte
$$\int\limits_0^3 |x-2|\,\mathrm{d}x.$$

Návod:
$$\int\limits_0^3 |x-2|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 |x-2|\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 |x-2|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{5}{2}.$$

Rozšíření definice Riemannova integrálu

Pro zjednodušení úvah v následujících odstavcích je vhodné rozšířit definici Riemannova integrálu pro případ $a \geqq b$ následujícím způsobem

a) Pro $a = b$ definujeme $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Pro $a > b$ dále definujeme $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Potom věta 11.3.4 platí také pro libovolně uspořádaná reálná čísla a, b, c, pokud je funkce f integrovatelná na nejširším intervalu určeném těmito body.

11.4 Výpočet určitých integrálů

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec, viz sekci 11.2 na straně 114.

Výpočet užitím substituce nebo per partes

Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat stejně jako v sekci 11.2, příklad 2, nebo můžeme použít důsledků vět 10.2.1 a 10.2.2 o substituci.

Věta 11.4.1 (o substituci v určitém integrálu)

Nechť funkce φ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má na (a, b) spojitou derivaci. Nechť funkce f je (po částech) spojitá na intervalu $\varphi(\langle a, b\rangle)$, potom
$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta 11.4.2 (o substituci v určitém integrálu)

Nechť funkce f je (po částech) spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce φ je na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitá a má na jeho vnitřku spojitou *nenulovou* derivaci, přičemž platí $\langle a, b\rangle = \varphi(\langle \alpha, \beta\rangle)$. Potom
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 1

Vypočtěte
$$\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Návod:
$$\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x \left[\begin{array}{c} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x \\ x = -\frac{1}{2}\pi, \quad u = 0 \\ x = \frac{2}{3}\pi, \quad u = -\frac{1}{2} \end{array}\right] = \int\limits_{0}^{-\frac{1}{2}} -u^2 \, \mathrm{d}u = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} u^2 \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{24}.$$

Příklad 2

Vypočtěte
$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Návod:
$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t \\ x = 0, \quad t = 0 \\ x = 1, \quad t = \frac{1}{2}\pi \end{array}\right] = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\sin^2 t} \, \cos t \, \mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Podobně pro integraci per partes platí důsledek věty 10.3.1.

Věta 11.4.3 (o integraci per partes v určitém integrálu)

Nechť funkce $u = f(x)$ a $v = g(x)$ jsou na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité a na jeho vnitřku mají spojité derivace, potom
$$\int\limits_{a}^{b} f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_{a}^{b} f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Tuto skutečnost formálně zapisujeme
$$\int\limits_{a}^{b} uv' \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int\limits_{a}^{b} u'v \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 3

Vypočtěte
$$\int\limits_{0}^{2} x \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \, \mathrm{d}x.$$

Návod:
$$\int\limits_{0}^{2} x \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \, \mathrm{d}x \left[\begin{array}{cc} u = x & v' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ u' = 1 & v = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{array}\right] = \left[2x \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^2 - \int\limits_{0}^{2} 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \, \mathrm{d}x = \ldots = 4.$$

Integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pojem určitého integrálu lze jednoduše rozšířit i na komplexní funkce reálné proměnné. Nechť $f_1, f_2 \in R(\langle a,b\rangle)$ a $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$. Pak definujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 4

Rozhodněte, které vlastnosti integrálů reálných funkcí zůstávají zachovány i pro integrály komplexních funkcí.

Příklad 5

Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$$

Návod:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos t + \mathrm{i}\sin t)\,\mathrm{d}t = [\sin t - \mathrm{i}\cos t]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1 + \mathrm{i}.$$

11.5 Další vlastnosti určitého integrálu

Věty o střední hodnotě

Věta 11.5.1 (o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí $m \leqq f(x) \leqq M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

Jestliže je f navíc spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

Důkaz: Nerovnost $m \leqq f(x) \leqq M$ integrujeme na $\langle a,b\rangle$ a výraz $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ označíme μ. Jsou-li m, M po řadě minimum a maximum funkce f spojité na $\langle a,b\rangle$, pak podle věty 6.3.4 (o mezihodnotě) nabývá f hodnoty $\mu \in \langle m, M\rangle$ v nějakém bodě $\xi \in \langle a,b\rangle$.

Věta 11.5.2 (zobecněná věta o střední hodnotě integrálního počtu)
Nechť $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$, $g(x) \geqq 0$, $m \leqq f(x) \leqq M$. Pak platí

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže je f navíc spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál jako funkce horní meze

Pokud $f \in R(\langle a, b\rangle)$, pak pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f \in R(\langle a, x\rangle)$ a $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je integrál, který je funkcí své horní meze x. Vzhledem k rozšířené definici integrálu lze za dolní mez zvolit libovolné číslo $c \in \langle a, b\rangle$, viz str. 117.

Věta 11.5.3
Nechť funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$, $c \in \langle a, b\rangle$. Pak funkce $\Phi(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a v každém bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, v němž je f spojitá, má Φ derivaci (v krajních bodech a, b jednostrannou), pro niž $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz: Protože $f \in R(\langle a, b\rangle)$, existuje (kladná) reálná konstanta M tak, že $|f(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

$$|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)| = \left| \int_c^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)| \,\mathrm{d}t \right| \leqq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} M\,\mathrm{d}t \right| = M|h|.$$

Odtud plyne spojitost funkce Φ.

Ve druhém případě ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\forall t \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap D(f)$$

je $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Stejným způsobem jako v předcházejícím dostaneme pro $0 < |h| < \delta$

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t \right| =$$
$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t \right| \leqq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \right| \leqq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| = \varepsilon.$$

Odtud již plyne druhá část věty, tj. $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek: Každá funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ má na tomto intervalu primitivní funkci Φ. Každá funkce omezená a po částech spojitá na $\langle a, b\rangle$ má na tomto intervalu tzv. zobecněnou primitivní funkci; jednou z nich je funkce Φ (integrál jako funkce horní meze).

Kapitola 12

Užití Riemannova integrálu

12.1 Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

Existuje více přibližných metod, pomocí nichž lze provádět výpočet Riemannova integrálu. Označení „přibližná metoda“ není žádnou degradací příslušné metody, neboť zejména s využitím výpočetní techniky lze takto provádět výpočet Riemannova integrálu prakticky s libovolnou přesností. Takže v aplikacích má tento postup stejnou hodnotu a rozsáhlejší uplatnění než klasický výpočet užitím Newtonova vzorce, protože – jak bylo naznačeno již v kapitole 10 – primitivní funkci ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

Předpokládáme-li $f(x) \geqq 0$ na $\langle a, b\rangle$, jde při výpočtu Riemannova integrálu o výpočet obsahu základního obrazce, viz sekce 11.1.

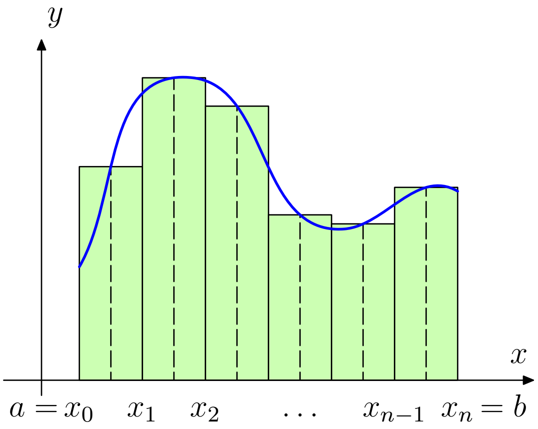
Metoda obdélníková

Princip této metody spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem (tj. s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i v elementech dělení).

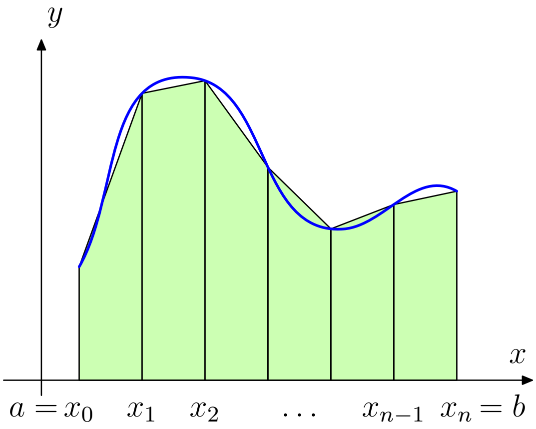
Zpravidla volíme dělení na n shodných elementů (tzv. *ekvidistantní dělení*), tedy délka jednoho elementu (tzv. *krok* h) je $h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, za ξ_i volíme středy elementů. Obsah základního obrazce pokládáme přibližně roven integrálnímu součtu, tedy součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h. Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Chybu metody lze stanovit např. užitím horních součtů a dolních součtů (viz 11.1), což je obzvlášť jednoduché pro monotónní funkce.



Metoda obdélníková



Metoda lichoběžníková

Metoda lichoběžníková

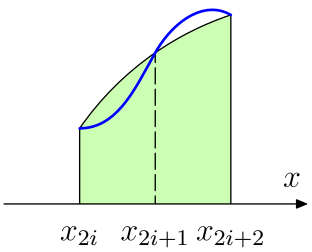
Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n shodných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr.). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami délek $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ a výškou $h = \frac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1})+f(x_i)) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right).$$

Metoda Simpsonova

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $h = \frac{b-a}{2n} = x_i - x_{i-1}$, z nichž vytvoříme n dvojic elementů. V každé dvojici pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed těchto „dvojelementů“). K výpočtu obsahu každého ze vzniklých „křivočarých lichoběžníků“ lze využít vzorce.

$$P = \frac{h}{3}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})).$$



Provedeme-li sčítání přes všechny „dvojelementy“, dostaneme výslednou formuli pro Simpsonovu metodu

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0)+f(x_{2n})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right).$$

12.2 Užití určitého integrálu v geometrii

Obsah rovinného obrazce

Uvažujme dále jen spojité funkce. Z geometrického významu Riemannova integrálu plyne, že pro funkci $f(x) \geqq 0$ definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$ je obsah křivočarého lichoběžníku (základního obrazce) roven

$$P = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pozor! Je-li $f(x) < 0$ (tato část grafu funkce je pod osou x), dostaneme obsah se záporným znaménkem. Pokud bychom použili předchozí vzorec na funkci, která na $\langle a, b\rangle$ střídá znaménka, dostaneme rozdíl obsahů částí základního obrazce nad osou x a pod osou x, tedy výsledek, který nás zpravidla nezajímá. (Interpretujte takto např. fakt, že $\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 0$.)

Platí-li na intervalu $\langle a, b\rangle$ vztah $g(x) \leqq f(x)$, je přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy obou funkcí ohraničena oblast *normální vzhledem k x* a její obsah se vypočte vzorcem

$$P = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li rovinný obrazec ohraničen křivkou danou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a funkce $x = \varphi(t)$ má na tomto intervalu spojitou derivaci, pak platí

$$P = \left|\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Nechť $\rho = \rho(\varphi)$, kde ρ je nezáporná spojitá funkce na intervalu α, β ($\beta - \alpha \leqq 2\pi$), je rovnice křivky v polárních souřadnicích. Obsah křivočaré výseče K, což je oblast omezená polopřímkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a křivkou s polární rovnicí $\rho(\varphi)$, je roven

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Příklad 1

Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r.

Návod:

a) Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ vyjádříme horní polokružnici a použijeme ji do prvního z výše uvedených vzorců, čímž vypočteme obsah půlkruhu

$$\frac{P}{2} = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \dots$$ pokračujeme některou z Eulerových nebo goniometrických substitucí.

b) V parametrickém vyjádření je $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$ a odtud

$$P = \dots = |-r^2\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t| = \dots$$ a výpočet uzavřeme standardním způsobem.

c) Nejjednodušší je zde výpočet užitím polárních souřadnic, neboť kružnice o středu O a poloměru r má rovnici $\varrho = r$ pro $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$. Proto

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \pi r^2.$$

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x. Element objemu je $\Delta V = P(x)\Delta x$, tj. $\mathrm{d}V = P(x)\,\mathrm{d}x$, a objem tělesa tak je

$$V = \int\limits_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi f^2(x)$ a platí

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) V případě parametrického zadání $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, platí

$$V = \pi \int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 2

Určete objem koule o poloměru r.

Návod: Koule vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x a proto

$$V = \pi \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Délka křivky

Nechť je křivka ℓ dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, kde $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ jsou spojité a pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ platí $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0$. Křivka ℓ je prostorová nebo rovinná (pokud některá z funkcí φ, ψ, χ je identicky rovna nule).

Uvažujme libovolné dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$, označme dělicí body křivky ℓ jako $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ a dále délku lomené čáry $M_0 M_1 \ldots M_n$ označme $\sigma(\ell, D) = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$. Délka křivky ℓ se pak definuje $s(\ell) = \sup\limits_D \sigma(\ell, D)$.

Uvažujme dále rovinnou křivku. Délka jedné úsečky lomené čáry je

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t,$$

takže

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

Pro $\Delta t \to 0$ pak máme $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$. Odtud odvodíme

$$s(\ell) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 3

Vypočtěte délku kružnice o poloměru r.

Návod: Kružnici vyjádříme v parametrickém tvaru $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$. Vypočteme $\mathrm{d}s = \ldots = r\,\mathrm{d}t$, takže

$$s(\ell) = \int\limits_{0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

Je-li křivka zadána explicitně rovnicí $y = f(x)$, je to vlastně zvláštní případ parametrického zadání $x = x$, $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Z toho plyne $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, takže

$$s(\ell) = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je-li křivka zadána v polárních souřadnicích vztahem $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$, pak platí

$$x = \varrho(\varphi)\cos\varphi, \qquad y = \varrho(\varphi)\sin\varphi,$$

odkud

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= (\varrho'(\varphi)\cos\varphi - \varrho(\varphi)\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}y &= (\varrho'(\varphi)\sin\varphi + \varrho(\varphi)\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

takže

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nakonec tedy

$$s(\ell) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pro prostorovou křivku zadanou parametricky máme

$$s(\ell) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky ℓ kolem osy x. Element povrchu plochy je $\Delta S = 2\pi y \Delta s$, takže diferenciál povrchu plochy je $\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$.

Pro křivku ℓ zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, je

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pro křivku ℓ zadánu explicitně $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

12.3 Technické křivky

Dále uvádíme příklady technických křivek, které se často vyskytují ve výpočtech s využitím integrálu. Kuželosečky v tomto přehledu neuvádíme.

Řetězovka

Řetězovku vytváří nepružná nit (řetěz) zavěšená ve dvou bodech. Je to graf funkce

$$y = a\cosh\frac{x}{a}, \qquad \text{kde } a > 0, \text{ platí} \qquad \mathrm{d}s = \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Kotálnice

Při kotálení křivky h (tzv. tvořící křivky nebo *hybné polodie*) bez skluzu po pevné křivce p (tzv. základní křivce nebo *pevné polodii*) opíše každý bod roviny křivku, kterou nazýváme kotálnice. Důležité jsou případy, kdy hybná polodie je kružnice a pevná polodie přímka nebo kružnice.

Cykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po přímce p, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) *cykloidu*.

Parametrické rovnice prosté cykloidy je $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Jednu větev dostaneme pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, platí $\mathrm{d}s = 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$.

Parametrické rovnice prodloužené (zkrácené) cykloidy je $x = at - r\sin t$, $y = a - r\cos t$, platí $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos t}\,\mathrm{d}t$.

Epicykloidy a hypocykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po vnějším resp. vnitřním obvodu kružnice p o poloměru A, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) *epicykloidu* resp. *hypocykloidu*. Parametrické rovnice prosté epicykloidy (platí horní znaménko) a hypocykloidy (platí dolní znaménko)

$$x = (A + a)\cos t \mp a\cos\frac{A \pm a}{a}t, \qquad y = (A \pm a)\sin t - a\sin\frac{A \pm a}{a}t.$$

Asteroida

Zvaná též *asteroida* patří mezi kotálnice; asteroidu opisuje každý bod kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, která se bez smyku kotálí zevnitř po kružnici o poloměru a. Je to tedy prostá hypocykloida, kde $A = \frac{a}{4}$. Parametrické rovnice jsou

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t, \qquad t \in \langle 0; 2\pi\rangle.$$

Platí $\mathrm{d}s = 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Kardioida

Patří mezi kotálnice; kardioidu opisuje každý bod kružnice o poloměru a, která se bez smyku kotálí vně po kružnici o poloměru a. Je to tedy prostá epicykloida, kde $A = a$. Rovnice v polárních souřadnicích

$$\varrho = a(1 + \cos\varphi), \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Platí $\mathrm{d}s = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi$.

Evolventa kružnice

Lze ji zařadit mezi kotálnice (kde h je přímka a p je kružnice) i mezi spirály. Jako každá evolventa křivky vznikne tak, že počínaje počátečním bodem nanášíme na tečnu délku oblouku mezi počátečním bodem a bodem dotyku tečny s křivkou. (Evolventu kružnice tedy vytváří konec napjaté niti odmotávané z kruhové cívky.) Parametrické rovnice jsou

$$x = a(t\sin t + \cos t), \qquad y = a(\sin t - t\cos t), \qquad \text{platí} \qquad \mathrm{d}s = at\,\mathrm{d}t.$$

Spirály

Archimédova spirála

Je to spirála s konstantní šířkou jednotlivých závitů. Je vytvořena rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se rovnoměrně otáčí kolem pólu. Rovnice v polární soustavě jsou $r = a\varphi$. Platí $\mathrm{d}s = a\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi$.

Logaritmická spirála

Rovnice v polární soustavě je $\varrho = a\mathrm{e}^{m\varphi}$. Vyskytuje se např. v kresbě ulit plžů. Platí $\mathrm{d}s = a\sqrt{1+m^2}\mathrm{e}^{m\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$.

Lemniskáta

Je to množina bodů které mají od dvou daných pevných bodů stálý součin vzdáleností. Implicitní rovnice $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$. Rovnice v polárních souřadnicích $\varrho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$. Délku nelze vyjádřit užitím elementárních funkcí.

Šroubovice

Je to příklad prostorové křivky. Šroubovice leží na válcové ploše $x^2 + y^2 = a^2$, rozvinutím válcové plochy přejde každý závit šroubovice v úsečku. Její parametrické rovnice jsou

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = ct, \qquad \text{jeden závit pro } t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Platí $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2+c^2}\,\mathrm{d}t$.

12.4 Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost rovinné desky

Mějme spojitou kladnou funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b\rangle$. Nechť σ značí plošnou konstantní hustotu materiálu. Je-li deska homogenní, tj. σ je konstantní, je hmotnost této desky rovna

$$m = \sigma \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li hustota desky funkcí x, je

$$m = \int\limits_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště rovinné desky

Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku Δx $(=\ \mathrm{d}x)$. Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je $\mathrm{d}M_x = (y\,\mathrm{d}x)\cdot\sigma\cdot\frac{1}{2}y$ (hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně $\mathrm{d}M_y = (y\,\mathrm{d}x)\cdot\sigma\cdot x$. Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}x, \qquad M_y = \sigma \int\limits_a^b xy\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště $T[\xi, \eta]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky. Proto $m\xi = M_y$, $m\eta = M_x$ a z toho (po zkrácení σ)

$$\xi = \frac{\int_a^b xy\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}x}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}x}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x, tj. je-li $a \leqq x \leqq b$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$, pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště; dostaneme je z předchozích záměnou $y_2 - y_1$ za y (ve jmenovatelích obou zlomků a v čitateli prvního zlomku) a $y_2^2 - y_1^2$ za y^2 (v čitateli druhého zlomku).

Hmotnost křivky

Uvažujme rovinnou homogenní křivku danou parametricky s konstantní délkovou hustotou σ. Pak

$$m = \sigma \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Těžiště křivky

Při odvození vzorců se postupuje podobně jako u těžiště rovinné desky. Je zde $\mathrm{d}M_x = \sigma y \,\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}M_y = \sigma x \,\mathrm{d}s$, tedy

$$M_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t, \qquad M_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Z rovností $m\xi = M_y$, $m\eta = M_x$ pak plyne, že rovinná homogenní křivka zadaná parametricky má těžiště $T[\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t}, \qquad \eta = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t}.$$

Vidíme, že těžiště homogenní rovinné desky ani těžiště homogenní křivky nezávisí na hustotě.

Kapitola 13
Nevlastní integrály

13.1 Nevlastní integrál vlivem meze

V definici Riemannova integrálu bylo podstatné, že funkce je omezená na uzavřeném intervalu. Pojem Riemannova určitého integrálu však lze rozšířit i na případy, že interval integrace je nekonečný, např. $\langle a, +\infty)$ nebo že funkce není omezená na intervalu konečné délky. Nejprve uvážíme první možnost.

Definice 13.1.1 (nevlastní integrál vlivem horní meze)

Nechť funkce f definována na intervalu $\langle a, +\infty)$ a je riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle a, K\rangle$, kde $K > a$ je reálné číslo. Potom

$$\lim_{K\to+\infty} \int_a^K f(x)\,\mathrm{d}x$$

označíme $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a nazveme *nevlastní integrál vlivem horní meze* funkce f na intervalu $\langle a, +\infty)$. Je-li uvedená limita vlastní, říkáme, že nevlastní integrál *konverguje* (je *konvergentní*), je-li tato limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje* (je *divergentní*).

Definice nevlastního integrálu dává návod i pro jeho výpočet.

Příklad 1

Vypočtěte

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Návod:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{K\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^K = \lim_{K\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 1.$$

Zadaný integrál konverguje.

Příklad 2

Vypočtěte

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Návod:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{K\to+\infty} [\ln x]_1^K = \lim_{K\to+\infty} (\ln K - \ln 1) = +\infty.$$

Zadaný integrál diverguje.

Geometrická interpretace: Pro $f \geqq 0$ vyjadřuje nevlastní integrál obsah neomezeného obrazce, části jehož hranice leží na přímce $x = a$, na ose x a na grafu funkce f (načrtněte obrázek).

Rozšíření definice

Podobně definujeme *nevlastní integrál vlivem dolní meze*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to-\infty} \int_{L}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a definujeme též

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{L\to-\infty\\ K\to+\infty}} \int_{L}^{K} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to-\infty}\left(\lim_{K\to+\infty}\int_{L}^{K} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

v tomto případě jde o tzv. *dvojnou limitu.* Výpočet této dvojné limity lze převést na výpočet dvou jednoduchých limit. Nechť c je libovolné reálné číslo, pak (pokud oba integrály na pravé straně konvergují) platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud alespoň jeden z integrálů na pravé straně diverguje, diverguje i integrál na levé straně.

Příklad 3

Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Návod:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{L\to-\infty}[\operatorname{arctg} x]_L^0 + \lim_{K\to+\infty}[\operatorname{arctg} x]_0^K = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Příklad 4

Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Návod: Protože pro libovolné reálné číslo c platí

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{L\to-\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_L^c = \lim_{L\to-\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{c^2+1}{L^2+1} = -\infty$$

neexistuje alespoň jeden z integrálů a daný integrál diverguje. Z výsledků v sekci 13.3 na straně 134 vyplyne, že pro neexistenci nevlastního integrálu danou úvahu nemusíme dělat pro libovolné reálné číslo c, ale stačí to ukázat jen pro jedno z nich.

Někdy se definuje tzv. *hlavní hodnota nevlastního integrálu* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ s označením v.p.$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a to jako $\lim\limits_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K} f(x)\,\mathrm{d}x$ (tj. místo dvojné limity jde o limitu jednoduchou, kde $L=-K$). Jestliže existuje vlastní limita, pak říkáme, že daný nevlastní integrál *konverguje ve smyslu hlavní hodnoty.* Písmena v.p. jsou zkratkou pro valeur principal [čti valér prénsipál].

Příklad 5

Vypočtěte

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \,\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Návod:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \frac{x \,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \tfrac{1}{2} \lim_{K\to\infty} (\ln(1+K^2) - \ln(1+(-K)^2)) = 0$$

V předchozí úloze jsme viděli, že zadaný integrál (dvojná limita) diverguje, ale nyní jsme zjistili, že ve smyslu hlavní hodnoty konverguje.

13.2 Nevlastní integrál vlivem funkce

Druhé rozšíření Riemannova integrálu je pro případ, že funkce f je definována na $\langle a, b)$, ale *není na tomto intervalu omezená.*

Definice 13.2.1 (nevlastní integrál vlivem funkce)

Nechť funkce f definována na intervalu $\langle a, b)$ a je riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle a, s\rangle$, kde $a < s < b$, není omezená na levém okolí bodu b (který nazveme *singulární bod*). Potom limitu

$$\lim_{s\to b-} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x$$

označíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a nazveme *nevlastní integrál vlivem funkce* na intervalu $\langle a, b)$. Je-li uvedená limita vlastní, říkáme, že nevlastní integrál *konverguje* (je *konvergentní*), je-li tato limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje* (je *divergentní*).

Je třeba dát pozor na to, že ze zápisu integrálu nemusí být hned patrné, zda jde o určitý integrál Riemannův nebo integrál nevlastní. Podobně definujeme, když funkce není omezená v pravém okolí bodu a, když tedy je bod a singulární, definujeme nevlastní integrál vlivem funkce na intervalu $(a, b\rangle$, označení integrálu je stejné.

Příklad 1

Vypočtěte

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$$

Návod: Funkce není omezená v pravém okolí počátku, tj. bod 0 je singulární, a je integrovatelná na každém intervalu $\langle s, 1\rangle$, kde $s \in (0, 1)$.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_s^1 = \lim_{s\to 0+} (2 - 2\sqrt{s}) = 2.$$

Jak byste tento výsledek interpretovali geometricky?

Je-li na daném intervalu integrace více singulárních bodů, rozdělíme tento interval na podintervaly tak, aby na každém z nich byl singulární bod nejvýše jeden (jako krajní bod), a vyšetřujeme integrály z dané funkce na jednotlivých podintervalech. Jsou-li všechny tyto integrály konvergentní, pak je konvergentní i výchozí integrál a je roven součtu komponent.

13.3 Vlastnosti nevlastních integrálů

Oba druhy nevlastních integrálů mají velmi podobné vlastnosti. Formálně je proto sloučíme do stejného vyjádření $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$, kde A je (jediný) singulární bod – buď $A = +\infty$ nebo $A \in \mathbb{R}$, $A > a$, přičemž funkce f není omezená v levém okolí bodu A. Nyní tyto vlastnosti můžeme formulovat v následujících větách.

Věta 13.3.1 (lineární vlastnosti)

Nechť konvergují oba integrály $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$ a c je reálné číslo. Potom

a) $\int\limits_a^A (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$ konverguje a platí $\int\limits_a^A (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\int\limits_a^A cf(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a platí $\int\limits_a^A cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$.

I některé další vlastnosti Riemannova integrálu se přenášejí na integrály nevlastní. Např. pro všechna $b \in \langle a, A)$ platí pro konvergentní integrál

$$\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Přitom si uvědomme že na pravé straně je první integrál Riemannův a druhý nevlastní.

13.4 Kriteria konvergence nevlastních integrálů

Věta 13.4.1 (srovnávací kriterium)

Nechť $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ na $\langle a, A)$, kde $a < A \leqq +\infty$, funkce f, g jsou integrovatelné na každém intervalu $\langle a, s\rangle$, kde $s \in (a, A)$, A je (jediný) singulární bod. Pak

a) z konvergence $\int\limits_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$ plyne konvergence $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$,

b) z divergence $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ plyne divergence $\int\limits_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: Pro $t \in \langle a, A)$ označíme $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, $G(t) = \int\limits_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$. Obě funkce jsou neklesající, podle věty 11.3.2 platí $0 \leqq F(t) \leqq G(t)$. Tvrzení věty pak plynou z vět o limitách funkcí.

Následující věta plyne z definice konvergence.

Věta 13.4.2

Nechť f je integrovatelná na každém intervalu $\langle a, K\rangle$, kde $a < K < A$. Pak pro všechna $b \in \langle a, A)$ oba integrály $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int\limits_b^A f(x)\,\mathrm{d}x$ buď současně konvergují, nebo současně divergují.

Při použití srovnávacího kriteria proto není třeba uvažovat celý interval $\langle a, A)$, ale nerovnost mezi funkcemi stačí dokázat jen na jeho části $\langle b, A)$.

Věta 13.4.3 (o absolutní hodnotě integrálu)

Jestliže konverguje $\int\limits_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\left|\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 1

Srovnejte tento výsledek s větou 11.3.2 a řekněte, v čem se tvrzení obou vět liší.

Příklad 2

Rozhodněte o konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Návod: Protože $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ je konvergentní a pro všechna $x \in \langle 1, +\infty)$ platí

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqq \frac{1}{x^2},$$

je podle srovnávacího kriteria $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$ konvergentní a tedy podle věty o absolutní hodnotě integrálu je konvergentní i integrál ze zadání.

Nacházíme hlubokou analogii mezi nevlastními integrály a číselnými řadami, založenou nejen na formální podobnosti, ale i na věcných souvislostech, o níž bude více v kapitole 15. Např. stejně jako u číselných řad zavádíme i u nevlastních integrálů pojem absolutní a neabsolutní konvergence.

Definice 13.4.1

Říkáme, že $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ je *absolutně konvergentní* (*konverguje absolutně*), právě když s ním současně konverguje i $\int\limits_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x$. V případě, když $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a zároveň $\int_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverguje, nazýváme $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ *neabsolutně konvergentní.*

Nevlastní integrály mohou záviset ještě na parametru. Dostáváme tak nevlastní integrály závislé na parametru, např.

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Pomocí nevlastních integrálů závislých na parametru jsou pro kladné hodnoty argumentů definovány známé funkce Beta a Gama:

$$B(u,v) = \int\limits_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Kapitola 14

Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

14.1 Základní pojmy

V této kapitole budeme zpravidla (v souladu s většinou používané literatury) označovat nezávisle proměnnou písmenem t.

Příklad 1

Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.

Návod: Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je (libovolná) integrační konstanta.

Příklad 2

Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.

Návod: Z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna např. pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Příklad 3

Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.

Návod: Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde C je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2 + C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t + 3$ vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce.

Definice 14.1.1

Diferenciální rovnice je název pro rovnice, kde neznámou je funkce a v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace neznámé funkce. *Řádem* diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace neznámé funkce v rovnici.

V našich příkladech jde o obyčejné diferenciální rovnice po řadě 1., 2. a konečně opět 1. řádu. V matematice i v aplikacích se pracuje s *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací, a také s *parciálními diferenciálními rovnicemi*, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.

Definice 14.1.2

Řešením (*integrálem*) obyčejné diferenciální rovnice nazýváme každou funkci definovanou na některém intervalu, která po dosazení v každém bodě tohoto intervalu vyhovuje dané diferenciální rovnici.

Tak rovnice z příkladu 2 má řešení $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, ale též $y_3 = 5\cos t - \sin t$, $y_4 = C \sin t$ (kde C je libovolná konstanta) a další.

Definice 14.1.3

Obecným řešením diferenciální rovnice n-tého řádu nazýváme to řešení, v němž se vyskytuje n libovolných konstant, které nelze nahradit menším počtem konstant.

Tak třeba funkce $y = C_1 C_2 \sin t$ není obecným řešením diferenciální rovnice z příkladu 2, neboť lze položit $C = C_1 C_2$ a v řešení $y = C \sin t$ je už jen jedna libovolná konstanta. Uvedená rovnice má obecné řešení $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, ale také třeba $y = A \sin(t - \varphi)$, kde A, φ jsou libovolné konstanty.

Definice 14.1.4

Partikulárním řešením diferenciální rovnice nazýváme řešení, které lze dostat z obecného řešení tím, že za některé konstanty C volíme přípustné číselné hodnoty. Řešení, která z obecného řešení *nelze* získat specifikací některých konstant, nazýváme *singulární.*

V této kapitole se budeme dále zabývat již jen obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu, které lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f(t, y).$$

Řešení rovnice může mít tvar explicitní, např. $y = t + C$, nebo implicitní, např. $y - t = C$, nebo parametrický, např. $t = \varphi^3$, $y = \varphi^3 + C$.

Definice 14.1.5

Mějme diferenciální rovnici $y' = f(t, y)$ a dále nechť t_0, y_0 jsou libovolně daná reálná čísla. *Cauchyho počáteční úloha* znamená najít partikulární řešení $y(t)$ dané diferenciální rovnice, které je definováno na nějakém intervalu I (kde $t_0 \in I$) a splňuje podmínku $y(t_0) = y_0$. Tato podmínka se nazývá *Cauchyho počáteční podmínka.*

Příklad Cauchyho úlohy je v úloze 3.

Geometrický význam řešení diferenciální rovnice

Na obecné řešení diferenciální rovnice se můžeme dívat jako na množinu funkcí s parametrem C, tj. jako na množinu všech partikulárních řešení. Grafem každého partikulárního řešení je nějaká křivka; nazýváme ji *integrální křivka.* Geometrickým významem obecného řešení je tedy jednoparametrická soustava čar – integrálních křivek. Např. obecné řešení rovnice z úlohy 3 znamená (v pravoúhlém souřadnicovém systému s osami t, y) soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$. Partikulární řešení dané Cauchyho počáteční podmínkou $y(2) = 5$ pak znamená tu přímku soustavy, která prochází bodem $[2; 5]$.

14.2 Základní problémy

Při studiu diferenciálních rovnic vyvstávají tyto problémy:

1. Zda u dané diferenciální rovnice je vůbec zaručena *existence řešení*, které by splňovalo zadanou Cauchyho počáteční podmínku, resp. za jakých předpokladů na funkci f takové řešení existuje na nějakém okolí I bodu t_0.
2. Za předpokladu, že na intervalu I existuje partikulární řešení splňující Cauchyho počáteční podmínku, zda je zaručena *jednoznačnost* jeho určení danou podmínkou, resp. za jakých předpokladů a na jakém okolí bodu t_0 je tato jednoznačnost zaručena.

3. Jaký je pro danou Cauchyho počáteční úlohu nejširší interval, na němž takové partikulární řešení existuje, resp. je určeno zadanou podmínkou jednoznačně. Problémy existence a jednoznačnosti řešení jsou tedy jednak *lokální*, jednak *globální*.
4. Určit (globální) vlastnosti řešení, tj. jeho průběh nebo části průběhu, jako jsou *omezenost*, *nulové body*, *periodičnost* a *asymptotické vlastnosti* (chování řešení pro $t \to +\infty$, např. tzv. *stabilita* řešení).

Tento 4. problém lze řešit v podstatě dvěma způsoby:

a) Určit (vypočítat) funkci, která je řešením diferenciální rovnice, a její vlastnosti získat vyšetřováním průběhu této funkce.
b) Určit potřebné vlastnosti řešení diferenciální rovnice, aniž je tato rovnice řešena, tj. užitím vlastností koeficientů nacházejících se v rovnici (tomuto se věnuje tzv. kvalitativní teorie diferenciálních rovnic).

V dalších paragrafech této kapitoly se budeme zabývat problémem 4 a), tj. uvedeme určité metody řešení *vybraných typů* diferenciálních rovnic, přičemž budeme vždy předpokládat, že řešení dané diferenciální rovnice existuje. K tomu ještě praktická poznámka: Víme, že primitivní funkce k funkci spojité sice existuje, ale primitivní funkce k funkci elementární obecně už není funkce elementární. Dovedeme tedy v elementárních funkcích integrovat jen vybrané typy funkcí. Tato vlastnost se přenáší i na diferenciální rovnice, tedy i když je funkce $f(t, y)$ vyjádřena elementárními funkcemi, dovedeme řešení rovnice $y' = f(t, y)$ vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen u některých typů rovnic (algoritmy řešení pro část z nich uvádíme v dalších paragrafech).

Chceme-li tedy úspěšně řešit takové diferenciální rovnice, je třeba:

- poznat, jakého typu je zadaná rovnice,
- znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,
- správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

14.3 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u rovnic, které lze převést na tvar

$$\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \psi(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

(tzv. *separovatelné diferenciální rovnice*, separace proměnných znamená, že na jedné straně rovnice je výraz pouze v proměnné y, na druhé straně je výraz pouze v proměnné t). Je-li $y = u(t)$ nějaké řešení rovnice (1) na intervalu J, pak pro $t \in J$ je $\mathrm{d}y = u'(t)\,\mathrm{d}t$, takže platí $\varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t)\,\mathrm{d}t$ a je to identická rovnost dvou diferenciálů na J, tj. $\mathrm{d}\Phi(u(t)) = \mathrm{d}\Psi(t)$, kde funkce Φ, Ψ jsou primitivní k funkcím φ, ψ (u nichž se zřejmě předpokládá např. spojitost). Proto platí $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$. To znamená, že funkce $y = u(t)$ – jako řešení diferenciální rovnice (1) – vyhovuje současně rovnici

$$\Phi(y) = \Psi(t) + C. \tag{2}$$

Toto tvrzení platí i naopak, tedy každá funkce $y = u(t)$, která vyhovuje rovnici (2), splňuje též rovnici (1), jak plyne z derivace identity $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$.

Závěr: Funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice (1) právě tehdy, když vyhovuje rovnici (2); touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice (1).

Příklad 1

Najděte obecné řešení rovnice

$$(1+t)y' = t(1-y). \tag{3}$$

Návod: Tato rovnice je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované

$$\frac{\mathrm{d}y}{y-1} = -\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}, \tag{4}$$

přičemž použitá metoda vyžaduje předpoklady $y \neq 1$, $t \neq -1$. Odtud

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} = \int \frac{-t\,\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$\ln|y-1| = \ln|1+t| - t + C, \tag{5}$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je již daná diferenciální rovnice v podstatě vyřešena, získali jsme její řešení jako funkci danou implicitně, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Odstraněním logaritmů dostaneme

$$|y-1| = \mathrm{e}^C \mathrm{e}^{-t}|1+t|.$$

Dále odstraněním absolutních hodnot

$$y - 1 = \pm\mathrm{e}^C \mathrm{e}^{-t}(1+t)$$

Označme $C_1 = \pm\mathrm{e}^C$, protože C je libovolná reálná konstanta, je C_1 libovolná nenulová reálná konstanta. Odtud již dostaneme

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-t}(1+t) + 1,$$

což je řešení rovnice (4) v separovaném tvaru.

Nyní se vrátíme k podmínce $y \neq 1$, jejíž pomocí jsme převedli rovnici (3) na rovnici (4). Ověříme, zda $y = 1$ s derivací $y' = 0$ je řešením původní rovnice (3). Pro všechna t dostaneme platnou rovnost

$$(1+t)0 = 0 = t(1-1),$$

takže funkce $y = 1$ skutečně je řešením rovnice (3) (i když není řešením rovnice (4)). Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C_1. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-t}(1+t) + 1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Podívejme se ještě na podmínku $t \neq -1$. Pro $t = -1$ máme $y = 1$, tedy všechny integrální křivky procházejí bodem $[1, -1]$. Uvědomíme si, že Cauchyho úloha $y(-1) = 1$ není řešitelná jednoznačně a např Cauchyho úloha s podmínkou $y(-1) = 2$ nemá řešení.

V rovnici (5) jsme na obou stranách získali logaritmy a po jejich odstranění se konstanta C objevila jako argument exponenciální funkce a zjednodušili jsme její zápis pomocí C_1. V zápise řešení (5) proto bývá v případě takových rovnic jednodušší přímo uvést konstantu C v logaritmickém tvaru $C = \ln|C_1|$, kde $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 2

Znázorněte soustavu partikulárních řešení diferenciální rovnice z předešlého příkladu.

14.4 Užití substitucí

U některých typů diferenciálních rovnic lze pomocí vhodných substitucí (transformace neznámé funkce, případně i transformace nezávisle proměnné) přeměnit tyto rovnice na separovatelné.

Rovnice typu $\boldsymbol{y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)}$, $\boldsymbol{\beta \neq 0}$

Užijeme substituci $z = \alpha t + \beta y + \gamma$, odkud $z' = \alpha + \beta y'$, tj. $y' = \frac{1}{\beta}(z' - \alpha)$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z' = \alpha + \beta f(z),$$

v níž lze separovat proměnné. Protože přitom tuto rovnici dělíme výrazem $\alpha + \beta f(z)$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se ovšem vracíme k původní proměnné.

Příklad 1

Řešte rovnici $y' = t + y$.

Návod: Zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = t + y$, odkud $z' = 1 + y'$, tj. $y' = z' - 1$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice máme $z' - 1 = z$, neboli

$$z' = z + 1.$$

Dělením této rovnice výrazem $(z + 1)$, kde $z \neq -1$, a násobením $\mathrm{d}t$ provedeme separaci proměnných, z níž plyne

$$z + 1 = C_1 \mathrm{e}^t, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Přejdeme-li zpět k proměnné y, dostaneme

$$y = C_1 \mathrm{e}^t - 1 - t.$$

Rovnost $z = -1$ dává $y = -1 - t$, a to je funkce, která (jak zjistíme dosazením do dané diferenciální rovnice) je rovněž řešením. Obecné řešení je tedy

$$y = C_1 \mathrm{e}^t - 1 - t, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice typu $\boldsymbol{y' = F\left(\frac{y}{t}\right)}$, tzv. *homogenní rovnice*

Této rovnici se říká homogenní podle toho, že funkce F na pravé straně je tzv. *homogenní funkce*. Užijeme substituci $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z't = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Dále tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme proto vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.

Příklad 2

Řešte rovnici $2tyy' = y^2 - t^2$.

NÁVOD: Rovnici nejprve upravíme na tvar ($yt \neq 0$)

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}$$

a po dělení čitatele i jmenovatele výrazem t^2 dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\,\frac{y}{t}}.$$

Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme

$$z + tz' = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

a po separaci proměnných pak máme

$$\frac{2z\,\mathrm{d}z}{z^2 + 1} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vidíme, že obecným řešením je jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C; 0]$ a poloměrem $|C|$.

Rovnice typu $y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$

V případě $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$ se jedná o homogenní rovnici. Pokud je determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

jedná se o rovnici typu $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$. Nyní předpokládejme, že $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$. Dále užijeme substituci, v níž transformujeme jak neznámou funkci y, tak nezávisle proměnnou t

$$t = \tau + A, \qquad y = z + B.$$

Koeficienty A, B volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynulovaly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ (tedy $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t$) a daná rovnice

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right) = f\left(\frac{\alpha_1 \tau + \beta_1 z + \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1}{\alpha_2 \tau + \beta_2 z + \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2}\right)$$

přejde na tvar rovnice homogenní, pokud položíme

$$\begin{aligned} \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Determinant Δ této soustavy je nenulový, existuje proto její řešení A, B.

Příklad 3

Řešte rovnici
$$y' = \frac{5t-2y-1}{2t-y+1}.$$

Návod: Řešením soustavy
$$\begin{aligned}5A-2B-1&=0,\\ 2A-B+1&=0,\end{aligned}$$
dostaneme $A=3$, $B=7$. Substituce $y=z+7$, $t=\tau+3$ transformuje rovnici na tvar
$$z' = \frac{5\tau-2z}{2\tau-z} = \frac{5-2\frac{z}{\tau}}{2-\frac{z}{\tau}},$$
tj. na rovnici homogenní. Položíme nyní $\dfrac{z}{\tau}=u(\tau)$, tj. $z=u\tau$. Z toho $z'=u+u'\tau$, takže
$$u+u'\tau = \frac{5-2u}{2-u}, \qquad \text{odtud} \qquad u'\tau = \frac{u^2-4u+5}{2-u}.$$
Separací proměnných dostáváme
$$\frac{2u-4}{u^2-4u+5}\,\mathrm{d}u = -2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}.$$
Po integraci máme
$$\ln(u^2-4u+5) = -2\ln|\tau| + \ln C, \qquad \text{kde} \qquad C\in(0;+\infty),$$
tedy
$$u^2-4u+5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Zpětným dosazením $u=\dfrac{z}{\tau}$, $z=y-7$, $\tau=t-3$ dostaneme $u=\dfrac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice je funkce $y=y(t)$ implicitně daná rovnicí
$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2},$$
kterou ještě můžeme upravit na tvar
$$(y-7)^2 - 4(y-7)(t-3) + 5(t-3)^2 = C, \qquad C\in(0;+\infty)$$

Snížení řádu diferenciální rovnice

Pokud v diferenciální rovnici n-tého řádu chybí $y, y', \dots, y^{(n-2)}$, lze ji substitucí $z=y^{(n-1)}$ převést na diferenciální rovnici 1. řádu.

Příklad 4

Řešte rovnici $ty'' + (t-1)y' = 0$.

Návod: V zadané rovnici 2. řádu chybí y, takže položíme $y'=z$. Pak $y''=z'$ a daná rovnice přejde na diferenciální rovnici 1. řádu $tz' + (t-1)z = 0$ (snížili jsme řád rovnice), kterou řešíme separací proměnných. Pro $z\neq 0$, $t\neq 0$ máme po separaci
$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t$$
a po integraci
$$\ln|z| = \ln|t| - t + \ln|C_1|, \qquad \text{kde} \qquad C_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
Po úpravách dostáváme obecné řešení upravené rovnice
$$z = C_1 t\mathrm{e}^{-t}, \qquad \text{kde} \qquad C_1\in\mathbb{R},$$
a z toho po návratu k původní proměnné y dostaneme $y' = C_1 t\mathrm{e}^{-t}$, tedy $y=\int C_1 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, odkud použitím metody per partes dostaneme
$$y = C_1(t+1)\mathrm{e}^{-t} + C_2, \qquad \text{kde} \qquad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

Vidíme, že zde obecné řešení diferenciální rovnice 2. řádu skutečně závisí na dvou integračních konstantách.

14.5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t). \qquad (nlr)$$

Funkce $q(t)$ se někdy nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme lineární rovnici *nehomogenní*, v opačném případě máme rovnici

$$y' + p(t)y = 0 \qquad (hlr)$$

homogenní. Pokud v (nlr) i (hlr) je $p(t)$ jedna a táž funkce, nazývá se (hlr) *příslušná homogenní rovnice* (tj. příslušná k dané rovnici nehomogenní).

Lineární diferenciální rovnice jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles ad.) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na rovnice lineární.

Existuje několik metod, jak tyto rovnice řešit; lze je např. řešit i vzorcem. Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce. Nejznámější je *metoda variace konstanty*. Tato metoda spočívá ve třech krocích.

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní (která je vždy separovatelná) a obecné řešení zapíšeme ve tvaru součinu integrační konstanty K a funkce proměnné t.
2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je (neznámá) funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K'.
3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení lineární diferenciální rovnice metodou variace konstanty ukážeme na příkladě.

Příklad 1

Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$. (viz příklad 1 v sekci 14.4)

Návod: Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je t, příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot \mathrm{e}^t$.
2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je (neznámá) funkce. Proto po dosazení máme
$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$
dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme $K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}$.
3. Integrujeme: $K = \int t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ odkud metodou per partes dostaneme $K = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - e^{-t}$. Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme $y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - e^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t$. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy
$$y = C\mathrm{e}^t - t - 1.$$

Poznámka: Pro $C = 0$ odsud dostáváme partikulární řešení $y = -t - 1$.

Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní. Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.

Bernoulliova rovnice

Bernoulliova rovnice je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t)y^m,$$

kde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Transformací neznámé funkce y lze tuto rovnici převést na diferenciální rovnici lineární.

Postup při řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

1. Rovnici dělíme činitelem y^m (pro $m > 0$ je funkce $y = 0$ vždy řešením Bernoulliovy rovnice, přidáme je k výsledku nakonec)

$$\frac{y'}{y^m} + p(t)\frac{1}{y^{m-1}} = q(t).$$

2. Užijeme substituci $z = \frac{1}{y^{m-1}}$, tj. $z' = (1-m)\frac{y'}{y^m}$. Pak do rovnice dosadíme a dostaneme tak lineární rovnici

$$z' + (1-m)p(t)z = (1-m)q(t).$$

3. Řešíme tuto lineární rovnici s neznámou funkcí z.
4. V získaném řešení se vrátíme k původní proměnné dosazením $z = \frac{1}{y^{m-1}}$.

Příklad 2

Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y = t\sqrt{y}$ (pro $y > 0$).

Návod:

1. Dělíme $\sqrt{y}$ a dostaneme

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = t.$$

2. Substitucí $z = \sqrt{y}$ přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + z = t \qquad (z > 0).$$

3. Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$K = C + t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t},$$

takže

$$z = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + t - 2.$$

4. Položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = (Ce^{-\frac{1}{2}t} + t - 2)^2.$$

a singulární řešení řešení $y = 0$.

14.6 Ortogonální a izogonální trajektorie

Diferenciální rovnice dané soustavy čar

Při řešení diferenciálních rovnic 1. řádu dostáváme jako výsledek obecné řešení, což je vlastně jednoparametrická soustava čar (integrálních křivek) s parametrem p (viz 14.1). Ptáme se nyní naopak, jak k dané jednoparametrické soustavě čar nalézt diferenciální rovnici, pro niž je daná soustava čar soustavou grafů partikulárních řešení. Takovou diferenciální rovnici pak nazveme *diferenciální rovnice dané soustavy čar.* Začněme příkladem.

Příklad 1

Najděte diferenciální rovnici soustavy kružnic, které se v počátku O pravoúhlé souřadnicové soustavy Oty dotýkají osy t.

Návod: Každá kružnice, která se v bodě O dotýká osy t, má svůj střed na ose y, $S = [0, p]$, a její poloměr r je $r = |p|$, $p \neq 0$. Příslušná rovnice je

$$t^2 + (y - p)^2 = C^2,$$

neboli

$$t^2 + y^2 - 2py = 0.$$

Je-li $y(t)$ partikulárním řešením hledané diferenciální rovnice, pak toto řešení vyhovuje předchozí rovnici kružnice identicky pro určitou hodnotu parametru p. Derivujeme-li tedy obě strany poslední rovnice podle t dostaneme rovnici

$$2t + 2yy' - 2py' = 0,$$

jejímž řešení je opět funkce y. Vyloučením parametru p z posledních dvou rovnic (např. 1. rovnici násobíme y', druhou rovnici $-y$ a sečteme) dostaneme po úpravě

$$y' = \frac{2ty}{t^2 - y^2},$$

což je hledaná diferenciální rovnice zadané soustavy kružnic.

Stejně postupujeme i v jiných případech. Nechť je daná soustava čar vyjádřena implicitní rovnicí $F(t, y, p) = 0$, kde p je parametr. Pro různá p tak dostáváme různé čáry dané soustavy, tedy na dané čáře je p konstantní a $y = y(t)$. Derivace podle t tak dává

$$F'_x + F'_y y' = 0.$$

Současně však pro každou čáru soustavy platí $F(t, y, p) = 0$ a odsud plyne následující postup pro určení diferenciální rovnice dané soustavy čar.

1. Implicitní rovnici $F(t, y, p) = 0$ dané soustavy čar derivujeme podle t s tím, že $y = y(t)$: $F'_t + F'_y y' = 0$.
2. Z rovnic $F'_t + F'_y y' = 0$ a $F(t, y, p) = 0$ vyloučíme parametr p a dostaneme tak hledanou diferenciální rovnici (1. řádu).

Ortogonální trajektorie

Definice 14.6.1

Ortogonální trajektorie soustavy čar $F(t, y, p) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod pravým úhlem.

Také ortogonální trajektorie vytvářejí (jednoparametrickou) soustavu čar.

Postup při určování ortogonálních trajektorií

1. Sestavíme diferenciální rovnici dané soustavy čar.
2. Vytvoříme diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií.
3. Řešíme tuto diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií.

ad 2. Je-li $y' = f(t, y)$ diferenciální rovnice dané soustavy čar, znamená $f(t, y)$ směrnici tečny k té křivce soustavy, která prochází bodem $[t, y]$. Protože úhel dvou křivek je definován jako úhel jejich tečen v průsečíku a jelikož směrnice k_1, k_2 dvou navzájem kolmých přímek jsou ve vztahu $k_1 = -1/k_2$, platí pro každou ortogonální trajektorii

$$y' = -\frac{1}{f(t, y)},$$

a právě toto je tedy diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií.

Příklad 2

Najděte ortogonální trajektorie soustavy kružnic, které se v počátku O pravoúhlé souřadnicové soustavy dotýkají osy t.

NÁVOD: Nejprve určíme diferenciální rovnici dané soustavy čar; podle příkladu 1 je to

$$y' = \frac{2ty}{t^2 - y^2}.$$

Diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií je tedy

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}.$$

Řešíme-li tuto diferenciální rovnici, dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Tedy ortogonálními trajektoriemi k zadané soustavě kružnic je opět soustava kružnic a to takových, které se v počátku souřadnicové soustavy dotýkají osy y: střed mají v bodě $[C; 0]$ a jejich poloměr je $|C|$, kde $C \neq 0$ je libovolná konstanta (hodnota parametru).

Příklad 3

Výsledek předchozího příkladu si graficky znázorněte.

Izogonální trajektorie

Definice 14.6.2
Izogonální trajektorie soustavy čar $F(t, y, p) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod zadaným úhlem φ.

Je-li směrový úhel tečny v daném bodě křivky soustavy roven α, je směrový úhel tečny izogonální trajektorie v jejich průsečíku roven $\alpha + \varphi$ nebo $\alpha - \varphi$. K dané soustavě čar lze tedy uvažovat dva systémy izogonálních trajektorií.

Postup při určování izogonálních trajektorií je stejný jako pro ortogonální trajektorie, liší se jen v provedení bodu 2. Diferenciální rovnice izogonálních trajektorií jsou tvaru

$$y' = \frac{f(t,y) \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f(t,y)\operatorname{tg}\varphi}.$$

Protože směrový úhel izogonálních trajektorií je $\beta = \alpha \pm \varphi$, je směrnice tečny (a tedy y') rovna $\operatorname{tg}\beta$ a výše uvedený vzorec plyne ze vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)$.

14.7 Užití diferenciálních rovnic

Ochlazování těles

Má-li nějaké těleso teplotu y, která je větší než teplota η jeho okolí, ochlazuje se, a to tím rychleji, čím je rozdíl $y - \eta$ těchto teplot větší. Podle fyzikálního významu derivace je rychlost ochlazování tělesa rovna $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t$, kde t je čas. Koeficient $a > 0$ úměrnosti závisí na materiálu tělesa a na prostředí. Předpokládáme-li, že ochlazováním tělesa se nezvyšuje teplota jeho okolí, dostáváme vztah

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -a(y - \eta),$$

kde znaménko „$-$“ na pravé straně je tu proto, že je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} < 0,$$

neboť jde o ochlazování. Separací proměnných dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y - \eta} = -a\,\mathrm{d}t,$$

odkud, po integraci a úpravě máme obecné řešení

$$y = \eta + C\mathrm{e}^{-at},$$

kde pro $y > \eta$ je $C > 0$ libovolná konstanta. Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$, je

$$y = \eta + (y_0 - \eta)\mathrm{e}^{-at}.$$

Lehce zjistíme, že stejný vztah platí i pro ohřev tělesa, tj. pro případ, že $y_0 < \eta$.

Zákon radioaktivní přeměny

Atomy radioaktivní látky se rozpadají tak, že rychlost rozpadu v okamžiku t je přímo úměrná počtu atomů $N(t)$ přítomných v okamžiku t. Počet atomů je přirozené číslo, tedy v realitě není funkce $N(t)$ spojitá. Ukazuje se však, že když považujeme funkci $N(t)$ za spojitou (dokonce diferencovatelnou), odpovídá model procesu realitě velmi přesně, pro velké hodnoty N se $N(t)$ chová téměř jako spojitá funkce. Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t),$$

kde koeficient úměrnosti $\lambda > 0$ (přeměnová konstanta) je základním charakteristickým číslem pro každou radioaktivní látku. Znaménko „$-$" opět souvisí s tím, že rychlost je záporná (atomů ubývá). Je-li počet atomů na počátku procesu (v čase 0) roven N_0, tj. za počáteční podmínky $N(0) = N_0$ dostáváme řešení *dané diferenciální rovnice radioaktivního rozpadu* ve tvaru

$$N(= N(t)) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Poločas rozpadu T, tj. dobu, v níž se původní množství atomů N_0 sníží na polovinu, dostaneme ze vztahu

$$N(T) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda T},$$

tedy $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, takže

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2} \left(= N_0 2^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Množení organismů

V neohraničeném živném prostředí (Malthusův model)

Jestliže kolonie organismů (např. kultura bakterií) žije v neohraničeném živném prostředí (za dostatku potravy i prostoru), pak se rozmnožuje rychlostí, která je v každém okamžiku t přímo úměrná počtu x těchto organismů. To dává diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax,$$

kde koeficient $a > 0$ je závislý na druhu organismů a prostředí, v němž žijí. Je-li na počátku v procesu x_0 organismů, vede daná diferenciální rovnice k řešení

$$x = x(t) = x_0 \mathrm{e}^{at}$$

(exponenciální růst, populační exploze).

V ohraničeném prostředí (Verhulstův model)

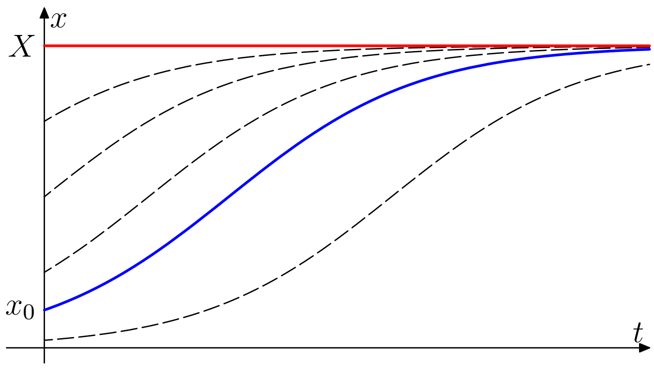
V reálných přírodních podmínkách však probíhá konkurenční boj uvnitř populace pro nedostatek místa a potravy, rovněž při velké hustotě organismů dochází ke snadnému přenosu infekcí, atd. Hledejme zákon vývoje počtu živých jedinců v kolonii za těchto podmínek.

Označme $x(t)$ rozsah populace v čase t a X maximální rozsah populace, která může stabilně existovat. Změna populace bude úměrná

- rozsahu x dané populace (předcházející model),
- hodnotě $\left(1 - \frac{x}{X}\right)$, která vyjadřuje kolik zdrojů populaci ještě zbývá.

To dává diferenciální rovnici
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\left(1 - \frac{x}{X}\right)x,$$
kde koeficient $a > 0$ je závislý na druhu organismů a prostředí, v němž žijí. Tuto rovnici budeme řešit separací proměnných
$$\frac{\mathrm{d}x}{\left(1 - \frac{x}{X}\right)x} = a\,\mathrm{d}t.$$
Protože
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{X}\right)x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{X - x},$$
je obecné řešení této rovnice
$$\ln\left|\frac{x}{X - x}\right| = at + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Odtud
$$\frac{x}{X - x} = C\mathrm{e}^{at}$$
a řešením vzhledem k proměnné x dostaneme
$$x = \frac{CX\mathrm{e}^{at}}{C\mathrm{e}^{at} + 1}.$$
Je-li v čase 0 v kolonii x_0 organismů, platí
$$x_0 = \frac{CX}{C + 1}, \qquad \text{tedy} \qquad C = \frac{x_0}{X - x_0}.$$
Po dosazení a úpravě získáme řešení Cauchyho počáteční úlohy
$$x = \frac{Xx_0\mathrm{e}^{at}}{X - x_0 + x_0\mathrm{e}^{at}}.$$

Vidíme, že pro $t \to +\infty$ je $x \to X$ (nikoli $x \to +\infty$ jako u neohraničeného růstu). Grafem tohoto řešení je tzv. *logistická křivka*. Přímka $x = X$ je zřejmě její asymptotou.



Populace organismů v ohraničeném prostředí neroste tedy neohraničeně, ale nepřekročí mez X. Vyšetřováním průběhu funkce můžeme zjistit, že růst je nejprve progresivní (tj. graf je konvexní) – při malém počtu organismů v kolonii ještě vnitřní konkurence nebrání rozvoji. Po dosažení inflexního bodu začne být růst degresivní (graf je konkávní), konkurence se uplatňuje stále silněji, rozvoj se zpomaluje, až prakticky ustane.

Tak se může matematický model vytvořený diferenciální rovnicí stát jedním z prostředků analýzy chování komunit organismů.

Kapitola 15

Číselné řady

15.1 Základní pojmy

Definice 15.1.1

Nechť (a_n) je číselná posloupnost. Symbol $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, se nazývá *číselná řada*. Jiná označení: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum a_n$ (vynecháme-li meze pro n, uvažujeme členy od nejmenšího $n \in \mathbb{N}$, pro něž má výraz a_n smysl).

Číselnou řadu lze tak považovat za zobecnění součtu konečného počtu reálných čísel. Základními otázkami jsou: jak a kdy přiřadit řadě číslo, které by bylo vhodné nazvat součtem řady, a které z vlastností konečných součtů se přenášejí i na řady, jež lze pak považovat za součty nekonečné.

Definice 15.1.2

Nechť $\sum a_n$ je číselná řada, pak

- číslo a_n se nazývá *n-tý člen řady*,
- číslo $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se nazývá *n-tý částečný součet* řady $\sum a_n$,
- posloupnost (s_n) se nazývá *posloupnost částečných součtů*,
- řada $\sum a_n$ se nazývá *konvergentní*, právě když existuje vlastní limita $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$; tato limita s se nazývá *součet řady* $\sum a_n$ a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$,
- řada $\sum a_n$ se nazývá *divergentní*, právě když neexistuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, tj. když tato limita je nevlastní (pak ji též nazýváme součet řady) nebo neexistuje (pak řada nemá součet),
- řada $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ a též její součet r_n (pokud existuje) se nazývá *zbytek řady* $\sum a_n$ (po n-tém členu).

Zřejmě pro konvergentní řadu je $s = s_n + r_n$, tedy $r_n \to 0$ pro $n \to \infty$.

U každé řady vyvstávají dva problémy: zda řada konverguje, a když konverguje, tak stanovit její součet. V některých případech lze k odpovědi na oba problémy využít definice konvergence a součtu řady.

Příklad 1

Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

NÁVOD:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

takže $s_n \to 1$, součet dané řady je $s = 1$.

Dalším příkladem řady, u níž lze snadno rozhodnout o konvergenci a určit její součet, je *geometrická řada* ($a \neq 0$, $|q| < 1$)

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

Její n-tý částečný součet určíme např. takto:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}, \tag{1}$$

$$qs_n = \qquad aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n, \tag{2}$$

po odečtení vztahu (1) od (2) máme $s_n = a\,\dfrac{1-q^n}{1-q}$ a odtud $s = \dfrac{a}{1-q}$.

Zbytek po n-tém členu je $r_n = \dfrac{aq^n}{1-q}$.

Pro $q > 1$ je $s_n \to (+\infty)\operatorname{sgn} a$, takže geometrická řada diverguje. Pro $q \leqq -1$ neexistuje $\lim s_n$, řada diverguje, součet neexistuje. Pro $q = 1$ máme divergentní řadu

$$a + a + \ldots + a + \ldots = (+\infty) \cdot \operatorname{sgn} a.$$

Základní harmonická řada je další důležitý příklad číselné řady. Platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n},$$

přičemž

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \qquad \text{atd.},$$

takže

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_4 > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \quad s_8 > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Protože vybraná posloupnost (s_{2^n}) je divergentní (má limitu $+\infty$), je také posloupnost částečných součtů (s_n) divergentní.

Tedy základní harmonická řada je *divergentní*, $s = +\infty$.

Tento fakt bychom sotva mohli odhalit neúplnou indukcí z několika prvních členů řady, neboť např. $s_{1\,000} = 7{,}48\ldots$, $s_{1\,000\,000} = 14{,}39\ldots$

Ukažme si ještě jeden instruktivní příklad, jak lze dokázat divergenci nějaké řady přímo využitím definice.

Příklad 2

Dokažte divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Návod:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty,$$

tedy daná řada je divergentní.

15.2 Některé vlastnosti číselných řad

Věta 15.2.1 (nutná podmínka konvergence)
Konverguje-li řada $\sum a_n$, pak $\lim a_n = 0$.

DŮKAZ: Tvrzení plyne ze vztahu $s_n = s_{n-1} + a_n$ a z toho, že $\lim s_n = \lim s_{n-1} = s$.

Uvedená podmínka konvergence není postačující, neboť např. základní harmonická řada tuto podmínku splňuje, i když je divergentní.

Některé formulace vlastností řad se zjednoduší, jestliže zavedeme pojem *chování řady.*

Definice 15.2.1
Říkáme, že dvě řady mají *stejné chování*, právě když jsou obě konvergentní, nebo obě mají nevlastní součet nebo obě nemají součet.

Věta 15.2.2 (o vynechání prvních k členů)
Chování řady se nezmění, vynecháme-li jejích prvních k členů.

DŮKAZ: V původní řadě je $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, v upravené řadě je částečný součet

$$\sigma_m = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}.$$

Pro $n > k$ položme $n = k+m$; pak $s_n = s_k + \sigma_m$, částečné součty s_n, σ_m se navzájem liší jen o konstantu s_k a odtud plyne tvrzení pro všechny tři druhy chování.

Definice 15.2.2 (lineární operace)
Součtem řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ nazýváme řadu $\sum(a_n + b_n)$, rozdílem řadu $\sum(a_n - b_n)$. Násobkem řady $\sum a_n$ číslem $c \in \mathbb{R}$ nazýváme řadu $\sum c a_n$.

Věta 15.2.3 (o lineárních operacích s řadami)
Nechť $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t$, kde $s, t \in \mathbb{R}^*$. Pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, platí

$$\sum(a_n + b_n) = s + t, \qquad \sum c a_n = cs$$

ve všech případech, kdy má smysl pravá strana těchto rovností. Navíc pro $c = 0$ je vždy $\sum c a_n = 0$.

DŮKAZ: Plyne z věty o lineárních operacích s posloupnostmi, neboť $s = \lim s_n$, $t = \lim t_n$.

Tato věta neplatí naopak: Z konvergence řady $\sum(a_n + b_n)$ neplyne konvergence řad $\sum a_n$, $\sum b_n$; uvažte příklad $\sum(1-1) = \sum 0 \neq \sum 1 - \sum 1$.

Věta 15.2.4 (asociativní zákon pro řady)
Nechť $\sum a_n = s$ a (k_n) je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Je-li $c_1 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1})$, $c_2 = (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2})$, $\ldots$, $c_n = \big(a_{k_{n-1}+1} + \ldots + a_{k_n}\big)$, $\ldots$, pak $\sum c_n = s$.

DŮKAZ: Je-li (s_n) posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ a (σ_n) posloupnost částečných součtů řady $\sum c_n$, pak $\sigma = s$, neboť (σ_n) je posloupnost vybraná z posloupnosti (s_n) a má proto tutéž limitu.

Věta neplatí naopak: např. konverguje-li řada skupin členů, nemusí být řada po odstranění závorek konvergentní; uvažte opět řadu $\sum(1-1) = \sum 0 \neq \sum(-1)^{n+1}$.

15.3 Řady s nezápornými členy

Řady $\sum a_n$ s nezápornými členy, $a_n \geqq 0$, mají některé význačné vlastnosti, pokud jde o konvergenci a její zjišťování. Jsou založeny zejména na tom, že posloupnost (s_n) jejich částečných součtů je neklesající, takže má vždy limitu. Tedy je-li posloupnost (s_n) shora omezená, je řada $\sum a_n$ konvergentní, není-li (s_n) shora omezená, má řada $\sum a_n$ součet $+\infty$.

V této sekci pojednáme zejména o kriteriích konvergence nebo divergence (každé kriterium vyjadřuje postačující podmínku a je přizpůsobeno pro praktické využití). Pro všechny řady v 15.3 nechť tedy platí $a_n \geqq 0$ a pokud bude třeba, aby $a_n > 0$, budeme mluvit o řadách s kladnými členy.

První skupina tří kriterií je známa pod společným názvem *srovnávací kriteria.* Jejich společným znakem je to, že zkoumanou řadu určitým způsobem srovnáme s vhodnou známou řadou a na základě tohoto srovnání vyslovíme závěr o konvergenci nebo divergenci.

Věta 15.3.1 (1. srovnávací kriterium)

Uvažujme řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ s nezápornými členy. Nechť pro skoro všechna n platí $a_n \leqq b_n$. Pak z konvergence *majorantní řady* $\sum b_n$ plyne konvergence řady $\sum a_n$ a z divergence *minorantní řady* $\sum a_n$ a plyne divergence řady $\sum b_n$.

DŮKAZ: Předpokládejme, že nerovnost $a_n \leqq b_n$ platí již od $n = 1$ (jinak můžeme vynechat členy, kde tato nerovnost neplatí, aniž se změní chování řad, věta 15.2.2). Pak pro částečné součty s_n, t_n těchto řad platí táž nerovnost $s_n \leqq t_n$. Z konvergence $t_n \to t$ a z nerovnosti $t_n \leqq t$ plyne $s_n \leqq t$, takže také (s_n) je konvergentní a naopak.

Příklad 1

Rozhodněte o chování řady $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n}-n}$.

NÁVOD: Řada $\sum \mathrm{e}^{-n}$ je geometrická řada s kvocientem $q = 1/\mathrm{e} < 1$ a je tedy konvergentní. Protože $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 3$ pro všechna n, je $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{-n} < 3\mathrm{e}^{-n}$, což je člen konvergentní geometrické řady. Proto je také daná řada konvergentní.

Věta 15.3.2 (2. srovnávací kriterium)

Uvažujme dvě řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ s kladnými členy. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$. Pak pro $K \in (0; +\infty)$ mají obě řady stejné chování.

DŮKAZ: Pro každé ε, $0 < \varepsilon < K$, pro skoro všechna přirozená čísla n platí

$$0 < K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon.$$

Odtud platí $(K - \varepsilon)b_n < a_n < (K + \varepsilon)b_n$ a tvrzení věty plyne z 1. srovnávacího kriteria.

Kriterium lze doplnit případem $K = 0$ (pak platí stejné tvrzení jako u 1. srovnávacího kriteria) a případem $K = +\infty$ (pak platí analogické tvrzení, ale se záměnou obou řad, tj. z konvergence $\sum a_n$ plyne konvergence $\sum b_n$, z divergence $\sum b_n$ plyne divergence $\sum a_n$).

Příklad 2

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{an+b}$, kde $a > 0$, $an + b > 0$.

NÁVOD: Danou řadu srovnáme se základní harmonickou řadou. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{an+b}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an+b} = \frac{1}{a} > 0,$$

mají obě řady stejné chování, tedy daná řada je divergentní.

Věta 15.3.3 (3. srovnávací kriterium)

Uvažujme řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ s kladnými členy. Nechť pro skoro všechna n platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Pak z konvergence řady $\sum b_n$ plyne konvergence řady $\sum a_n$ a z divergence řady $\sum a_n$ plyne divergence řady $\sum b_n$.

DŮKAZ: Nechť uvedená nerovnost platí již od $n = 1$, viz věta 15.3.2. Pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ uvažujme $n - 1$ nerovností $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqq \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Jestliže je všechny mezi sebou vynásobíme, dostaneme po úpravě $a_n \leqq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ a tvrzení věty plyne z 1. srovnávacího kriteria.

Výhodou těchto tří srovnávacích kriterií je jejich univerzálnost, nevýhodou pak potřeba „testovacích“ řad, u nich umíme rozhodnout o konvergenci. Pokud za testovací řadu vezmeme některou ze známých řad, můžeme kriteria vyslovit jednodušeji.

Věta 15.3.4 (podílové kriterium – d'Alembertovo)

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

1. Existuje-li číslo $q \in (0; 1)$ tak, že pro skoro všechna n je $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.
2. Jestliže pro skoro všechna n je $D_n \geqq 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ: 1. tvrzení dostaneme, když ve 3. srovnávacím kriteriu použijeme jako $\sum b_n$ konvergentní geometrickou řadu $\sum q^n$. Druhé tvrzení znamená, že řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Příklad 3

Rozhodněte o konvergenci řady

$$1 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3\cdot 2}{5^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{3\cdot 2^2}{5^3} + \frac{2^3}{5^3} + \ldots + \frac{3\cdot 2^{n-1}}{5^n} + \frac{2^n}{5^n} + \ldots$$

NÁVOD: Vidíme, že v řadě jsou členy dvou druhů: $a_{2k} = \frac{3\cdot 2^{k-1}}{5^k}$, $a_{2k-1} = \frac{2^k}{5^k}$. Musíme tedy vyšetřit dva podíly dvou po sobě jdoucích členů:

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{3\cdot 2^{k-1}}{5^k} : \frac{2^{k-1}}{5^{k-1}} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^k}{5^k} : \frac{3\cdot 2^{k-1}}{5^k} = \frac{2}{3}.$$

V obou případech $D_n \leqq \frac{2}{3} < 1$, takže řada konverguje.

Toto kriterium se častěji používá ve své limitní podobě.

Věta 15.3.5 (limitní podílové kriterium – d'Alembertovo)

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a existuje $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$. Pak pro $A < 1$ daná řada konverguje a pro $A > 1$ řada diverguje.

DŮKAZ: Nechť $A < 1$, označme $\varepsilon = (1-A)/2$. Pak pro skoro všechna n je $D_n < A+\varepsilon < 1$, takže podle podílového kriteria řada konverguje.

Pro $A > 1$ dokážeme podobně divergenci volbou $\varepsilon = A - 1$.

Uvědomme si, že pro $A = 1$ nedává toto kriterium odpověď.

Příklad 4

Rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum \frac{n}{2^n}.$$

NÁVOD:
$$D_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} < 1,$$
řada konverguje.

Věta 15.3.6 (odmocninové kriterium – Cauchyho)

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy.

1. Existuje-li číslo $q \in (0;1)$ tak, že pro skoro všechna n je $C_n = \sqrt[n]{a_n} \leqq q$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.
2. Jestliže pro nekonečně mnoho n je $C_n \geqq 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ: Z nerovnosti $C_n \leqq q$ plyne $a_n \leqq q^n$, takže konvergence plyne z 1. srovnávacího kriteria (majorantou je konvergentní geometrická řada). Nerovnost $C_n \geqq 1$ znamená, že $a_n \geqq 1$, takže řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Příklad 5

Rozhodněte o konvergenci řady
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^4} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots$$

NÁVOD: Vyzkoušíme podílové kriterium. Pro n liché je
$$D_n = \frac{1}{7^{n+1}} : \frac{1}{5^n} = \frac{1}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{5}{7} < 1,$$
ale pro n sudé je
$$D_n = \frac{1}{5^{n+1}} : \frac{1}{7^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{7}{5}\right)^n \to +\infty.$$
Podílové kriterium tedy nedává odpověď, ani jeho limitní verze.

Použijeme odmocninové kriterium. Pro n liché je $C_n = \frac{1}{5}$, pro n sudé je $C_n = \frac{1}{7}$ tedy pro všchna přirozená čísla n platí $C_n \leqq \frac{1}{5} < 1$, řada proto konverguje.

Jak podílové, tak odmocninové kriterium srovnávají řadu $\sum a_n$ s nějakou geometrickou řadou, dalo by se očekávat, že tedy budou přibližně stejně silná. Jak ale naznačuje tento příklad, bylo by možno dokázat, že odmocninové kriterium je trochu silnější než kriterium podílové.

Věta 15.3.7 (limitní odmocninové kriterium – Caychyho)

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy a existuje $\lim \sqrt[n]{a_n} = A$. Pak pro $A < 1$ daná řada konverguje a pro $A > 1$ řada diverguje.

DŮKAZ: se provádí obdobně jako u limitního podílového kriteria.

I v tomto případě pro $A = 1$ nedává uvedené kriterium odpověď.

Příklad 6

Rozhodněte, zda řada

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

je konvergentní.

NÁVOD:

$$C_n = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1,$$

tedy daná řada konverguje.

Všimněme si, že na řadu z příkladu 5 nelze použít limitní odmocninové kriterium, neboť posloupnost (C_n) nemá limitu. Každé kriterium je zpravidla vhodné pro určité typy řad, bez ohledu na jeho „sílu“. Takto budeme chápat i náš výběr kriterií. Existuje však celá posloupnost kriterií konvergence, v nichž každé další je „silnější“ než předchozí. Ovšem „silnější“ kriterium je zpravidla složitější na formulaci a používání. Jako ukázku uveďme ještě:

Věta 15.3.8 (Raabeho kriterium)

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

1. Existuje-li číslo $r > 1$ tak, že pro skoro všechna n je
$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqq r,$$
pak řada $\sum a_n$ konverguje.
2. Jestliže pro skoro všechna n je $R_n < 1$, pak řada diverguje.

I toto kriterium má svou limitní verzi (viz následující příklad).

Příklad 7

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

NÁVOD: (Uvědomíme si definici dvojných faktoriálů, např. $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$, $9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.)

Než přistoupíme k Raabeho kriteriu, obvykle zkoušíme (formulačně jednodušší) podílové kriterium a počítáme D_n. Po zkrácení je tedy

$$D_n = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 1,$$

takže podílové kriterium nedává odpověď. Ale

$$R_n = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right) = \ldots = \frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 4n + 1} \to \frac{3}{2},$$

řada konverguje podle limitního Raabeova kriteria.

Uvědomíme si, že podle žádného z uvedených kriterií nelze rozhodnout o divergenci základní harmonické řady. Tuto schopnost má však integrální kriterium.

Věta 15.3.9 (Integrální kriterium)

Nechť členy řady $\sum a_n$ jsou hodnotami kladné nerostoucí funkce f, která je riemanovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle 1; K\rangle$, $K \in \mathbb{R}$; tedy $a_n = f(n)$. Pak řada $\sum a_n$ a nevlastní integrál

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\ dx$$

současně konvergují nebo divergují.

DŮKAZ: Funkce f je nerostoucí, z vlastností integrovatelných funkcí plyne

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqq \int\limits_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq f(n) = a_n$$

(načrtněte si obrázek). Proto pro n-tý částečný součet s_n řady $\sum a_n$ platí

$$s_{n+1} - a_1 \leqq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq s_n.$$

Limitním přechodem pak odtud dostaneme tvrzení věty.

Příklad 8

Rozhodněte o konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

kde $s \in \mathbb{R}$ (tzv. *harmonických řad*).

NÁVOD: Pro $s \leqq 0$ jsou zřejmě divergentní, protože nesplňují nutnou podmínku konvergence. Nechť tedy dále $s > 0$. Pro $s = 1$ dostáváme základní harmonickou řadu, která je divergentní. Je-li $s < 1$, je $n^s < n$, takže $\frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}$, takže dle 1. srovnávacího kriteria jsou harmonické řady pro $s < 1$ rovněž divergentní.

Pro $s > 1$ použijme integrální kriterium. Funkce $\frac{1}{x^s}$ je nerostoucí kladná funkce, která je integrace schopná (protože je spojitá) na každém intervalu $\langle 1; K\rangle$, $K \in \mathbb{R}$ a pro všechna přirozená čísla n je $a_n = \frac{1}{n^s} = f(n)$. Nevlastní integrál

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{K\to+\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^K = \lim_{K\to+\infty} \left(\frac{K^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}\right) = \frac{1}{s-1}$$

konverguje a proto je harmonická řada stupně $s > 1$ konvergentní.

Závěr: Harmonické řady jsou konvergentní pro $s > 1$ a divergentní pro $s < 1$.

Poznámka: Tvrzení o divergenci harmonické řady stupně $s \in (0; 1\rangle$ plyne také z integrálního kritéria.

15.4 Řady s libovolnými členy, absolutní konvergence

V číselné řadě $\sum a_n$ mohou být některé členy kladné a některé záporné (nulové nejsou zajímavé, protože pro zjišťování konvergence řady nebo součtu řady je lze vynechat). Je-li záporných členů jen konečný počet, zacházíme při zjišťování konvergence s řadou, jako by měla jen kladné členy (podle věty o vynechání prvních k členů). Jsou-li všechny členy řady záporné, lze konvergenci zjišťovat pro kladnou řadu $-\sum a_n = \sum -a_n$ a takto lze vyřídit i případ konečného počtu kladných členů. Proto zbývá jediný podstatný případ, tj. že řada $\sum a_n$ má nekonečně mnoho kladných členů a nekonečně mnoho členů záporných. Z praktických důvodů však nebudeme vylučovat ani existenci nulových členů, neboť důležité číselné řady vznikají často z funkčních (mocninných) řad po dosazení za nezávisle proměnnou a některé členy mohou být tedy nulové.

Proveďme nejprve několik induktivních úvah. Zaveďme označení $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$. Pak zřejmě platí: $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$. K řadě $\sum a_n$ tak lze vytvořit řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum |a_n|$; všechno to jsou řady s nezápornými členy. Označme $s' = \sum a_n^+$, $s'' = \sum a_n^-$, přičemž $0 < s', s'' \leqq +\infty$.

Z lineárních vlastností řad plyne: Konvergují-li řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, pak konvergují i řady $\sum a_n$, $\sum |a_n|$ a platí $\sum a_n = s' - s''$, $\sum |a_n| = s' + s''$. První z těchto vztahů platí i ve všech dalších případech, kdy má smysl rozdíl $s' - s''$ (tj. mimo případu $\infty - \infty$), druhý platí vždy.

Naopak je známo, že z konvergence řady $\sum a_n$ obecně neplyne konvergence řad $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$. Ovšem z konvergence $\sum |a_n|$ plyne, že částečné součty řady $\sum (a_n^+ + a_n^-)$ jsou omezené, takže jsou omezené i částečné součty obou řad $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, obě tyto řady jsou tedy konvergentní a také řada $\sum a_n$ je konvergentní. Tak jsme dostali:

Věta 15.4.1 (o konvergenci řady absolutních hodnot)
1. Řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ konvergují, právě když konverguje řada $\sum |a_n|$.
2. Z konvergence řady $\sum |a_n|$ plyne konvergence řady $\sum a_n$.

Tato věta je základem pro definici významného pojmu absolutní konvergence.

Definice 15.4.1
Řada $\sum a_n$ se nazývá *absolutně konvergentní*, právě když konverguje řada $\sum |a_n|$ a nazývá se *neabsolutně konvergentní*, právě když je konvergentní a přitom řada $\sum |a_n|$ je divergentní.

Vyšetřování absolutní konvergence tedy znamená zabývat se řadou $\sum |a_n|$ s nezápornými členy, k čemuž lze použít kriteria konvergence uvedená v předchozích paragrafech. Zbývá tedy zejména případ neabsolutně konvergentních řad s libovolnými členy.

15.5 Alternující řady

Jde o důležitý a často se vyskytující zvláštní případ řad s libovolnými členy:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots,$$

kde (c_n) je posloupnost kladných čísel. Základní kriterium konvergence alternujících řad je překvapivě jednoduché.

Věta 15.5.1 (Leibnizovo kriterium konvergence)
Nechť (c_n) je monotónní nulová posloupnost kladných čísel. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$$

konverguje. Přitom pro zbytek r_n řady platí:

$$c_{n+1} - c_{n+2} \leqq |r_n| < c_{n+1} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{sgn} r_n = (-1)^n.$$

DŮKAZ: Nejprve ukážeme, že posloupnost (s_{2k}) sudých částečných součtů vybraná z posloupnosti (s_n) částečných součtů je neklesající

$$s_{2k+2} = s_{2k} + c_{2k+1} - c_{2k+2} > s_{2k}.$$

Dále vidíme, že posloupnost (s_{2k}) je shora omezená

$$s_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2k-2} - c_{2k-1}) - c_{2k} < c_1.$$

Z toho plynou dva závěry:

a) Existuje vlastní $\lim s_{2k}$, označme ji s,

b) $c_1 - c_2 < s < c_1$.

Dále ukážeme, že s je také limitou posloupnosti lichých částečných součtů. Platí $s_{2k-1} = s_{2k} - c_{2k}$; pravá strana konverguje k rozdílu $s - 0$, tedy k s, proto $s_{2k-1} \to s$, takže $s_n \to s$, tedy řada je konvergentní a má součet s.

Zbytek po n-tém členu je opět alternující řada; tvrzení o jejím součtu r_n plyne z výše uvedeného závěru b).

Příklad 1

Rozhodněte o konvergenci řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

NÁVOD: Daná řada je alternující a posloupnost $(c_n) = (\frac{1}{n})$ je monotónní nulová, takže podle Leibnizova kriteria je daná řada konvergentní.

Alternující řada z předchozího příkladu je příkladem neabsolutně konvergentní řady, neboť řada absolutních hodnot je divergentní základní harmonická řada.

Řadám, které splňují předpoklady Leibnizova kriteria, se též říká *řady leibnizovské*. Leibnizovské řady se často a s výhodou používají při numerických výpočtech (při přibližném výpočtu konstant, které jsou součtem číselné řady), neboť umožňují velmi jednoduchý odhad chyby metody.

15.6 Přerovnávání číselných řad

Sčítání konečného počtu čísel je asociativní a komutativní. Je tedy otázka, v jaké formě tyto dvě vlastnosti přecházejí nebo nepřecházejí na řady jakožto zobecněný součet. V sekci 15.2 je ukázáno, že asociativnost se v jisté podobě zachovává: členy řady lze „závorkovat“, ale obecně v řadě nelze závorky odstraňovat.

Vyšetřování komutativnosti je složitější a snad i zajímavější. Samozřejmě, zaměníme-li pořadí třeba u prvních dvou členů řady (nebo u prvních n – např. milionu – členů řady), nestane se nic, pokud jde o chování řady resp. o její součet, protože jde vlastně o uplatnění komutativnosti v konečném součtu s_n. Budeme se proto zajímat o případy, kdy „změna pořadí“ členů řady zasahuje nekonečně mnoho členů řady.

Definice 15.6.1

Říkáme, že řada $\sum b_n$ vznikla přerovnáním řady $\sum a_n$, právě když existuje bijekce $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla n platí $b_n = a_{\beta(n)}$.

Definice tedy říká, že n-tý člen přerovnané řady je $\beta(n)$-tým členem řady původní. Obráceně n-tý člen původní řady je $\beta^{-1}(n)$-tým členem v řadě přerovnané, kde β^{-1} je bijekce inverzní k β.

Např. alternující řadu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

lze přerovnat tak, že vezmeme střídavě vždy 3 členy kladné a 1 záporný

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \dots$$

Zde

$$\beta(n) = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,2),(5,7),(6,9),\dots\}.$$

Věta 15.6.1 (o přerovnání řad s nezápornými členy)

Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy. Potom každá řada, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$, je konvergentní a její součet je roven součtu řady původní.

Důkaz: Pro řadu $\sum a_n$ je n-tý částečný součet $s_n \to s$. Označme $\sum b_n$ řadu, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$, a σ_n její n-tý částečný součet; zřejmě (s_n), (σ_n) jsou neklesající posloupnosti. Uvažujme σ_n a $m = \max\{\beta(1),\beta(2),\dots,\beta(n)\}$. Pak $\sigma_n \leqq s_m \leqq$ $\leqq s$, takže řada $\sum b_n$ je konvergentní a má součet $\sigma \leqq s$. Přerovnáním se tedy součet řady nezvětší.

Jestliže nyní řadu $\sum b_n$ přerovnáme zpět na $\sum a_n$, pak podle první části důkazu se součet opět nezvětší, takže $s \leqq \sigma$. Proto $\sigma = s$, součet přerovnané řady je tedy týž.

Věta 15.6.2 (o přerovnání absolutně konvergentních řad)

Nechť $\sum a_n$ je absolutně konvergentní řada. Potom každá řada, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$, je konvergentní a její součet je roven součtu řady původní.

Důkaz: Označme $\sum b_n$ řadu, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$; pak $\sum |b_n|$ vznikne přerovnáním konvergentní řady $\sum |a_n|$, takže podle předchozí věty je $\sum |b_n|$ konvergentní, tedy $\sum b_n$ je absolutně konvergentní; její součet označme σ. Je-li $s = \sum a_n$, pak $s = s' - s''$, kde $s' = \sum a_n^+$ a $s'' = \sum a_n^-$ jsou součty řad s nezápornými členy. Podobně $\sigma = \sigma' - \sigma''$, kde $\sigma' = \sum b_n^+$, $\sigma'' = \sum b_n^-$. Přerovnání řady $\sum a_n$ na řadu $\sum b_n$ indukuje přerovnání řady $\sum a_n^+$ na řadu $\sum b_n^+$ a přerovnání řady $\sum a_n^-$ na řadu $\sum b_n^-$. Je tedy $\sigma' = s'$, $\sigma'' = s''$, takže $\sigma = s$.

Předchozí věta potvrzuje rozšíření platnosti komutativního zákona pro sčítání konečného počtu čísel na řady absolutně konvergentní. U řad neabsolutně konvergentních nastává nový jev. Nejprve však připomeňme, že u těchto řad je $s' = +\infty$ a též $s'' = +\infty$ i když i zde je $a_n \to 0$.

Věta 15.6.3 (o přerovnávání řad neabsolutně konvergentních – Riemannova)

Je-li řada $\sum a_n$ neabsolutně konvergentní, pak pro každé $B \in \mathbb{R}^*$ lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada $\sum b_n$ má součet B.

DŮKAZ: Z řady $\sum a_n$ vytvoříme dvě řady: $\sum p_n$ a $\sum q_n$ a to tak, že do 1. řady dáme bez změny pořadí všechna nezáporná a_n a do druhé řady dáme absolutní hodnoty záporných členů a_n. Jde vlastně o řady $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ po vynechání nadbytečných nulových členů. Pak každý člen řady $\sum a_n$ padne právě do jedné z řad $\sum p_n$ a $\sum q_n$ v původním uspořádání. Je $\sum p_n = +\infty$ a $\sum q_n = +\infty$. Dále se důkaz vede konstruktivně, tedy k libovolně zadanému B zkonstruujeme přerovnání tak, že součet přerovnané řady bude B.

1. Nechť B je reálné číslo (např.kladné).
   a) Nejprve vezmeme právě tolik kladných členů, aby
   $$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r_1} > B$$
   (tj. bez p_{r_1} je součet $\leqq B$). To lze vzhledem k tomu, že $\sum p_n = +\infty$.
   b) Dále vezmeme právě tolik záporných členů, aby
   $$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r_1} - q_1 - \ldots - q_{s_1} \leqq B$$
   (tj. bez q_{s_1} je součet $> B$). To lze vzhledem k tomu, že $\sum q_n = +\infty$.
   c) Pak vezmeme právě tolik kladných členů, aby pro částečný součet platilo $\sigma_{r_2+s_1} >$ $> B$, atd.

   Vidíme, že takto se „čerpají“ jak kladné členy, tak záporné, takže každý člen a_n původní řady se dostane do přerovnané řady $\sum b_n$. Protože $a_n \to 0$, je $p_n \to 0$ i $q_n \to 0$, tedy $b_n \to 0$. Z uvedené konstrukce přerovnání plyne $|\sigma_n - B| \leqq |b_n| \to 0$, tedy $\sigma_n \to B$.
2. Nechť $B = +\infty$. Předchozí konstrukci nelze přímo použít, protože nelze vzít tolik kladných členů, aby částečný součet byl větší než $+\infty$. A je třeba též zajistit „čerpání“ záporných členů. Postupujeme tedy takto:

   Nejprve vezmeme právě tolik kladných členů, aby
   $$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r_1} > 1,$$
   pak jeden záporný, pak tolik kladných členů, aby částečný součet $\sigma_{r_2+1} > 2$, pak opět jeden záporný, atd. Protože $q_n \to 0$, lze již jednoduchou úvahou (proveďte ji!) dospět k závěru, že $\sigma_n \to +\infty$.

Z důkazu Riemannovy věty plyne, že i z některých divergentních řad lze přerovnáním vytvořit řady (neabsolutně) konvergentní s libovolně předem zadaným součtem. Jde o řady, které splňují nutnou podmínku konvergence a kde $s' = +\infty$ a $s'' = +\infty$.

Příklad 1

Přerovnejte neabsolutně konvergentní řadu $\sum a_n$ tak, aby přerovnaná řada neměla žádný součet, ani nevlastní.

NÁVOD: Nejprve vezmeme tolik nezáporných členů, aby částečný součet byl alespoň 1, potom tolik záporných členů, aby částečný součet byl nejvýše 0, potom nezáporné členy, aby částečný součet byl alespoň 1 atd.

15.7 Mocninné řady

Geometrická řada

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots$$

je příkladem mocninné řady. Tato řada je konvergentní pro všechna $x \in (-1; 1)$; toto je tzv. *obor konvergence* geometrické řady.

Definice 15.7.1

Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je číselná posloupnost. Pak řada

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (\text{stručně} \qquad \sum a_n x^n)$$

se nazývá *mocninná řada.*

Věta 15.7.1 (o konvergenci mocninných řad)

Jestliže mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = x_1 \neq 0$, pak konverguje absolutně pro všechna x z intervalu $(-|x_1|, |x_1|)$. Jestliže mocninná řada $\sum a_n x^n$ diverguje pro $x = x_2$, pak diverguje pro všechna x vně intervalu $\langle -|x_2|, |x_2| \rangle$.

Důkaz: Z konvergence řady $\sum a_n x_1^n$ plyne, že $|a_n x_1^n| \to 0$, tedy existuje reálné číslo M tak, že pro všechna přirozená čísla n je $|a_n x_1^n| \leqq M$. Pak pro $|x| < |x_1|$ platí

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leqq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n .$$

První tvrzení plyne z 1. srovnávacího kriteria, neboť na pravé straně je člen konvergentní geometrické posloupnosti. Druhé tvrzení plyne z nepřímého důkazu užitím tvrzení prvního.

Pro každou mocninnou řadu tak nastává jedna z možností:

- konverguje jen v bodě 0,
- konverguje pro všechna x,
- existuje pro ni číslo R zvané *poloměr konvergence* tak, že uvnitř intervalu $(-R, R)$ řada konverguje (absolutně) a vně intervalu $\langle -R, R \rangle$ řada diverguje.

(V předchozích dvou případech klademe $R = 0$, resp. $R = +\infty$.) *Obor konvergence* pak dostaneme tak, že k intervalu $(-R, R)$ přidáme ten z krajních bodů intervalu konvergence, v němž řada konverguje. Tato konvergence může být i neabsolutní.

Příklad 1

Stanovte obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n 2^n}.$$

Návod: Vyšetříme absolutní konvergenci užitím Cauchyho limitního kritéria

$$C_n = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n 2^n}} = \frac{|x|}{2 \sqrt[n]{n}} \to \frac{|x|}{2}$$

Tento podíl je menší než 1, právě když $|x| < 2$, tedy poloměr konvergence je $R = 2$.

Ještě vyšetříme krajní body intervalu konvergence, tj. body 2 a -2. Dosadíme-li do členů řady $x = 2$, dostaneme po zkrácení základní harmonickou řadu, která je divergentní. Dosadíme-li $x = -2$, dostaneme alternující neabsolutně konvergující řadu (neboť řadou absolutních hodnot je základní harmonická řada). Oborem konvergence je tedy interval $\langle -2; 2)$.

15.8 Násobení řad

V odstavci 15.2 byly připomenuty lineární operace s řadami: sčítání řad a násobení řady reálným číslem. Viděli jsme, že vlastnosti konečných součtů se na řady přenášejí s jistými výhradami: např. konvergentní řady lze sečíst a součet je opět konvergentní řada, ale konvergentní řadu ve tvaru součtu nelze obecně rozdělit na součet konvergentních řad.

Při násobení konečných součtů $a = (a_1 + \ldots + a_n)$, $b = (b_1 + \ldots + b_m)$ násobíme každý člen jednoho součtu každým členem druhého součtu a při libovolném uspořádání takto vzniklých součinů $a_i b_j$ dostaneme vždy týž výsledek ab. Riemannova věta nás varuje, abychom neočekávali totéž pro libovolné konvergentní řady. V další části odstavce předpokládejme $n \in \mathbb{N}_0$, tedy $\sum a_n$ je symbol pro řadu

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

Uvažujeme-li analogii s konečnými součty, očekáváme, že výsledkem násobení dvou řad by měla být řada, v níž jsou všechny součiny, kde každý člen jedné řady násobíme každým členem druhé řady. Toto násobení lze zorganizovat pomocí *čtvercového schématu* (3).

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	$\ldots$
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	$\ldots$
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	$\ldots$
b_3	a_0b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

(3)

Nyní jde o to, jak všechny prvky tohoto schématu uspořádat. Nelze např. „po řádcích“ nebo „po sloupcích“ (to bychom nepoužili všechny prvky), ale lze např. „po diagonálách“

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \ldots$$

Pro uspořádání prvků ze schématu však lze použít i pravidlo čtverců („rámování“), které dá řadu

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0 \ldots$$

Věta 15.8.1 (o násobení řad – Cauchyho)

Jsou-li řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolutně konvergentní a mají součet a resp. b, pak řada vytvořená ze součinů dle schématu (3) vzatých v libovolném pořadí je také absolutně konvergentní a má součet ab.

Důkaz: K řadě $\sum a_{i_s} b_{j_s}$ všech součinů ze schématu (3) uvažujme řadu absolutních hodnot $\sum |a_{i_s} b_{j_s}|$ a její n-tý částečný součet s_n. Označme $m = \max\{i, j\}$ indexů těch členů a_i, b_j, které se vyskytují v s_n. Pak platí

$$\begin{aligned} s_n \leqq \sigma_m &= |a_0b_0| + |a_0b_1| + |a_0b_2| + \ldots + |a_mb_{m-1}| + |a_mb_m| = \\ &= (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_m|) \cdot (|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m|) \leqq a^*b^*, \end{aligned}$$

kde a^*, b^* jsou součty příslušných řad absolutních hodnot. Jelikož posloupnost (s_n) je neklesající a shora omezená, existuje její vlastní limita. Řada absolutních hodnot součinů je konvergentní, tedy i řada součinů je absolutně konvergentní. Podle věty o přerovnání absolutně konvergentních řad nezávisí součet této řady na pořadí členů řady (na jejich uspořádání).

Nyní určíme součet této řady. K tomu lze zvolit libovolné uspořádání členů řady; výhodné se ukáže uspořádání „rámováním“, kde navíc sdružíme vždy všechny členy z téhož „rámu“

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \dots$$

Posloupnost $(\bar{s}_p)$ částečných součtů této řady je vybraná z posloupnosti (s_n) částečných součtů řady původní. Označíme-li částečné součty řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ jako s'_n, s''_n, pak zřejmě platí

$$\bar{s}_0 = s'_0 \cdot s''_0,\ \bar{s}_1 = s'_1 \cdot s''_1,\ \bar{s}_2 = s'_2 \cdot s''_2,\ \dots,\ \bar{s}_m = s'_m \cdot s''_m.$$

Protože $s'_m \to a$, $s''_m \to b$, je $\bar{s}_m \to ab$, tedy $s = ab$.

Definice 15.8.1

Mějme řady $\sum a_n$, $\sum b_n$. Pak řadu $\sum c_n$ nazýváme *Cauchyho součin* daných řad, právě když platí

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0, \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0, \\ c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \\ &\dots \\ c_n &= a_0b_n + \dots + a_nb_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Vidíme, že sdružením vhodných členů při uspořádání „po diagonálách“ dostaneme Cauchyho součin nebo též, že posloupnost částečných součtů v Cauchyho součinu je vybraná z posloupnosti částečných součtů při uspořádání „po diagonálách“.

Pokud by nám stačilo tvrzení o Cauchyho součinu řad, mohli bychom oslabit předpoklady na řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ a to tak, že jedna je absolutně konvergentní, ale druhá (jen) konvergentní.

Příklad 1

Najděte řadu se součtem

$$\frac{3}{2 - x - x^2}$$

a) užitím sčítání řad,
b) užitím násobení řad.

Návod: Rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{3}{2 - x - x^2} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} = -\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}.$$

Rozložíme na součin

$$\frac{3}{2 - x - x^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}.$$

Využijeme pak toho, že $\frac{1}{1-q}$ je součet geometrické řady $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

Seznam doporučené literatury

[1] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z. *Matematická analýza I*, SNTL, Praha, 1989.

[2] Děmidovič, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.

[3] Gillman, L., McDowell, R. H. *Matematická analýza*, SNTL, Praha, 1983.

[4] Fichtěngoľc, G. M. *Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija*, GIFML, Moskva 1962.

[5] Havlíček, K. *Integrální počet pro začátečníky*, SNTL, Praha, 1969.

[6] Horský, Z. *Diferenciální počet*, SNTL, Praha, 1981.

[7] Kalas, J., Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*, MU, Brno, 1995.

[8] Kaucký, J. *Elementární metody řešení diferenciálních rovnic*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1953.

[9] Kojecká J., Závodný M. *Řešené příklady z matematické analýzy I*, UP, Olomouc, 2003.

[10] Kojecká J., Závodný M. *Řešené příklady z matematické analýzy II*, UP, Olomouc, 2003.

[11] Kojecká J., Rachůnková, I. *Řešené příklady z matematické analýzy III*, UP, Olomouc, 1998.

[12] Nagy, J., Nováková, E., Vacek, M. *Integrální počet*, SNTL, Praha, 1984.

[13] Tomica, R. *Cvičení z matematiky I*, SNTL, Praha, 1974.