Diskrétní struktury 1

Pravděpodobnost

Radim Bělohlávek

KATEDRA INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Co je pravděpodobnost

- zabývá se určováním pravděpodobností náhodných jevů
- spolu se statistikou jedna z nejužitečnějších oblastí matematiky
- vznikla s kombinatorikou při analýze hazardních her
  - první úvahy v arabské matematice při studiu kryptografie (8–13. stol. n. l.)
  - modernější matematická teorie pravděpodobnosti: 16. a 17. století n. l.
    Gerolamo Cardano, Pierre de Fermat, Blaise Pascal
  - první kniha: Christian Huygens: De Ratiociniis in Ludo Aleae (1657)
  - moderní úvahy: Pierre de Laplace: Théorie analytique des probabilités (1812)
  - současná teorie pravděpodobnosti: Andrej N. Kolmogorov: Foundations of Probability Theory (1933, rusky)
- význam
  - obecná schopnost kvantitativně pracovat s daty (každý přírodovědec nebo technik)
  - řešení různých problémů v informatice (složitost v průměrném případě, pravděpodobnostní algoritmy, ...)

Úvodní úvahy

Typické základní problémy:

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne číslo 4? [$1/6$]
- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo? [$1/2$]
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný občan ČR má pozitivní test na covid-19? [nevíme]

Důležité otázky:

- jaký je obecný rámec úvah o pravděpodobnosti?
- pravděpodobnost čeho?
- co je tedy pravděpodobnost?

Intuitivní přístup

Laplaceova (někdy klasická) „definice“ pravděpodobnosti:

$$\text{pravděpodobnost} = \frac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech výsledků}}$$

Příklad Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo?

Možné výsledky: $1, 2, \ldots, 6$; příznivé výsledky: $2, 4, 6$

$$\text{pravděpodobnost} \; = \frac{3}{6} = 0.5$$

Tak lze vyřešit mnoho jednoduchých příkladů.

Příklad Z balíčku 32 mariášových karet vybereme 4 karty.

- Jaká je pravděpodobnost, že vybereme 4 esa?
- Jaká je pravděpodobnost, že vybereme 2 esa?

Výsledek $= \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$. Všech možností je $\binom{32}{4} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot}{4!} = 35960$.

- 4 esa:
  - Příznivý výsledek $=$ všechny karty k_i jsou esa.
  - Existuje 1 příznivý výsledek. Tedy

$$\text{pravděpodobnost} = \frac{1}{\binom{32}{4}} = \frac{1}{35960} \approx 0.0000278$$

- 2 esa
  - Příznivý výsledek $=$ právě dvě karty k_i jsou esa.
  - Jsou celkem 4 esa. Z nich lze vybrat 2 esa $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ způsoby.
    Zbylé 2 karty (ne esa) vybrat z 28 ostatních, což lze $\binom{28}{2} = \frac{28 \cdot 27}{2!} = 378$ způsoby.
    Dle pravidla součinu lze příznivý výsledek $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ vybrat

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} = 6 \cdot 378 = 2268 \text{ způsoby}$$

Tedy

$$\text{pravděpodobnost} = \frac{2268}{35960} \approx 0.063$$

Systematický přístup

- jaký je obecný rámec úvah o pravděpodobnosti?
- pravděpodobnost čeho?
- co je tedy pravděpodobnost?

Obecný rámec:

- je dán „náhodný pokus“:
  - hod kostkou,
  - výběr člověka z populace ČR,
  - spuštění algoritmu na vybraném vstupu, ...
- k pokusu patří množina Ω možných výsledků (elementárních jevů)
  - hod kostkou: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - výběr člověka: $\Omega = \{$ člověk 1, ..., člověk $10^7\}$
  - spuštění algoritmu: $\Omega = \{$ vstup 1, ..., vstup $n\}$
- určujeme pravděpodobnost jevů
  - hod kostkou: jev „sudé číslo“ $= \{2, 4, 6\}$
  - výběr člověka: je „žena“ $= \{$člověk c v ČR $\mid c$ je žena$\}$
  - volba vstupu pro spuštění algoritmu α: jev „skončí v čase t“ $=\{$vstup $\mid t_\alpha($vstup$) \leq t$ $\}$
  - obecně: jev A = množina výsledků (tedy $A \subseteq \Omega$)
- $\mathcal{A}$ = množina uvažovaných (tzv. měřitelných) jevů, např. $\mathcal{A} = 2^\Omega$
- pravděpodobnost (p-stní míra) je funkce $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ splňující jisté vlastnosti

Pravděpodobnostní prostor

- základní pojem pro všechny úvahy o pravděpodobnosti
- každé použití pravděpodobnosti a statistiky: nejdřív zvolit p-stní prostor
- tato volba = napasování teoretických pojmů na realitu
- volba není jednoznačná

Neformálně:

Pravděpodobnostní prostor je trojice $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$, kde

- Ω je neprázdná množina tzv. elementárních jevů (výsledky pokusu)
- $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ je množina tzv. jevů
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ je pravděpodobnostní míra
  pro jev $A \in \mathcal{A}$ je $P(A) \in [0, 1]$ pravděpodobnost, že nastane jev A

splňující přirozené podmínky (viz dále).

Příklad Hod kostkou (náhodný pokus).

Jak vypadá příslušný pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$?

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, kde $\omega_i =$ „padne číslo i"
- $\mathcal{A} = 2^\Omega$, všech 64 možných jevů A, např.
  - $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ je jev „padne liché číslo"
  - $A = \{\omega_3\}$ je jev „padne 3"
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ je dána následovně:
  - pro ω_i je $P(\{\omega_i\}) = 1/6$
  - pro ostatní $A \subseteq \Omega$ je $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$, např.

$$\text{pravděpodobnost(„padne liché číslo")} = P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_5\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

$$\text{pravděpodobnost(„padne } 2 \text{ nebo } 5\text{")} = P(\{\omega_2, \omega_5\}) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_5\}) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

Kolmogorovova definice pravděpodobnosti

Definice Pravděpodobnostní prostor je uspořádaná trojice $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$, kde

- $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ je σ-algebra na Ω, tj. $\Omega \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ splňuje:
  (a) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
  (b) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.
- P je pravděpodobnostní míra, tj.
  (a) $P(A) \geq 0$ pro každý $A \in \mathcal{A}$,
  (b) $P(\Omega) = 1$,
  (c) $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$ pro každou posloupnost jevů $A_1, A_2, \dots,$ které jsou po dvou disjunktní, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Diskrétní p-stní prostor = Ω je konečná nebo spočetná. Jiné uvažovat nebudeme.

Příklad Hod kostkou (viz výše). $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ je pravděpodobnostní prostor:

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$
- $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$
- $P(A) = {}^{|A|}/_{6}$.

Příklad (důležité příklady diskrétních p-stních prostorů)

- Konečný s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti:
  - $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
  - $\mathcal{A} = 2^\Omega$
  - $P(A) = {}^{|A|}/_{n}$
  - Odpovídá klasické (Laplaceově) definici pravděpodobnosti.
- Konečný s obecným rozdělením pravděpodobnosti:
  - $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
  - $\mathcal{A} = 2^\Omega$
  - pro každé ω_i dáno $p_i \in [0, 1]$ t.ž. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
  - $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$
  - pro $p_i = {}^{1}/_{n}$ jde o konečný s rovnoměrným rozdělením

- Spočetný:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$,
  - pro každé ω_i dáno $p_i \in [0,1]$ t.ž. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
  - $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

Existují další typy pravděpodobnostních prostorů (zejm. spojité).

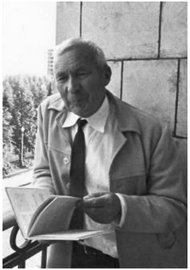
Obecná definice obsahuje výraz $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, tedy součet tzv. nekonečné řady (neznáme). V konečném případě se zjednoduší:

Věta Je-li Ω konečná, pak pak $\left\langle \Omega, 2^\Omega, P \right\rangle$ je pravděpodobnostní prostor, právě když:

(a) $P(A) \geq 0$ pro každý $A \in \mathcal{A}$,

(b) $P(\Omega) = 1$,

(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro každé $A, B \subseteq \Omega$ takové, že $A \cap B = \emptyset$.



Andrej N. Kolmogorov (1903–1987)

- sovětský matematik a informatik
- průkopník v různých oblastech: teorie pravděpodobnosti, topologie, logika, algoritmická teorie informace, výpočetní složitost
- jeho definice pravděpodobnosti je dnes standardní
  A. Kolmogoroff (1933). Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. doi:10.1007/978-3-642-49888-6. ISBN 978-3-642-49888-6.
  anglicky: Foundations of the Theory of Probability (Chelsea, New York, 1950, 1956)

Základní vlastnosti pravděpodobnosti

Věta Pro jevy libovolné A a B v pravděpodobnostním prostoru platí:

(a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) je-li $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$

(d) $0 \leq P(A) \leq 1$

(e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

Důkaz

(a): A a $\overline{A}$ jsou disjunktní, tedy $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

(b): Dle (a) je $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

(c): Když $A \subseteq B$, pak $B = A \cup B - A$.
A a $B - A$ jsou disjunktní, tedy $P(B) = P(A) + P(B - A)$.
Protože $P(B - A) \geq 0$, je $P(B) \geq P(A)$.

(d) $0 \leq P(A) \leq 1$:

$0 \leq P(A)$ je podmínka z definice.

Protože $A \subseteq \Omega$, plyne z (c) $P(A) \leq P(\Omega)$.

Ale z definice je $P(\Omega) = 1$.

(e) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$:

$A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$,
přitom $A-B$, $B-A$ a $A\cap B$ jsou po dvou disjunktní.

Z aditivity P tedy plyne
$P(A\cup B)=P((A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)$.

Dále je $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ a $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, tedy:

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)=\\
&= P(A-B)+P(A\cap B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)\\
&\quad +P(B-A)+P(A\cap B)-P(A\cap B)=\\
&= P((A-B)\cup A\cap B)+P((B-A)\cup(A\cap B))-P(A\cap B)=\\
&= P(A)+P(B)-P(A\cap B).
\end{aligned}
$$

$\square$

Všimněme si, že v každém $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ je:

- vždy $\Omega \in \mathcal{A}$ a je $P(\Omega) = 1$ (Ω je tzv. jistý jev);
- vždy $\emptyset \in \mathcal{A}$ a je $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ je tzv. jistý jev).

Další příklady určování pravděpodobností

Příklad Balíček mariášových karet obsahuje karty 4 barev (červené, zelené, žaludy, kule) a 8 hodnot (od sedmičky po eso), celkem 32 karet. Náhodně vytáhneme tři karty. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) jako druhá karta bude vytaženo červené eso;

(b) jako druhá karta bude vytažena červená nebo žaludy;

(c) budou vytažena 3 esa;

(d) bude vytaženo aspoň jedno eso?

(a) jako druhá karta bude vytaženo červené eso

záleží na pořadí, tedy el. jevy z $\Omega = \langle k_1, k_2, k_3 \rangle$

trojic je $|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30$.

pravděpodobnost výběru každé trojice je stejná: $\frac{1}{32 \cdot 31 \cdot 30}$ (klasická pravděpodobnost)

příznivý výsledek: $\langle k_1, k_2, k_3 \rangle$, kde $k_2 =$ červené eso
tj. jde o $P(A)$, kde jev $A = \{\langle k_1, k_2, k_3 \rangle \mid k_2 \text{ je červené eso}\}$

a proto

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{31 \cdot 30}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{32}.$$

Jinou úvahou: pro každou kartu je pravděpodobnost p, že bude vytažena jako druhá, stejná. Protože karet je 32 a protože součet těchto pravděpodobností je 1, je $p = \frac{1}{32}$.

(b) jako druhá karta bude vytažena červená nebo žaludy

Ω a P stejně jako v (a). Jde o $P(A)$, kde

$$A = \{\langle k_1, k_2, k_3\rangle \in \Omega \mid k_2 \text{ je červená nebo žaludy}\},$$

má $(8+8)\cdot 31 \cdot 30$ prvků:

za k_2 lze zvolit libovolnou z 8 červených nebo 8 žaludských karet; zbylé karty $31 \cdot 30$ způsoby.

Tak dostaneme všechny trojice v A. Tedy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16 \cdot 31 \cdot 30}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{2}$$

(b) jinak: volba $\langle k_1, k_2, k_3 \rangle$ od první karty po třetí

k_1 lze zvolit 32 způsoby

dál je třeba rozlišit, zda k_1 je, nebo není jednou z červených nebo žaludských:

pokud je (k_1 je jednou z 16 červených nebo žaludských), lze k_2 zvolit 15 způsoby, pak lze zvolit k_3 jedním ze 30 zbývajících způsobů;
to je $16 \cdot 15 \cdot 30$ výsledků

pokud ne (k_1 je jednou z 16 zelených nebo kulových), lze k_2 zvolit 16 způsoby, poté k_3 30 způsoby;
to je $16 \cdot 16 \cdot 30$ dalších způsobů.

Ty dva způsoby jsou navzájem různé, celkem tedy
$16 \cdot 16 \cdot 30 + 16 \cdot 15 \cdot 30 = 16 \cdot (16 + 15) \cdot 30 = 16 \cdot 31 \cdot 30$ způsobů.

Tedy stejný počet výsledků příznivých jevu A, ovšem složitější odvození.

$\Rightarrow$ Je důležité se vhodným způsobem na situaci podívat.

(c) budou vytažena 3 esa

Ω a P stejně jako v (a).

Jsou celkem 4 esa, tedy celkem $4 \cdot 3 \cdot 2$ trojic, ve kterých jsou 3 esa = výsledky příznivé danému jevu A.

Tedy
$$P(A) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30} \approx 0.0008.$$

(c) jinak

výsledek = tříprvková množina $\{k_1, k_2, k_3\}$ (tj. neuspořádaná trojice)

Takových trojic je $\binom{32}{3}$.

Jde o $P(A)$, kde $A = \{\{k_1, k_2, k_3\} \mid$ všechny k_i jsou esa$\}$.

Trojic obsahujících jen esa je $\binom{4}{3}$.

Tedy:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\{k_1, k_2, k_3\} \mid k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1\}, \\ A &= \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}, \end{aligned}$$

kde $e_1, \ldots, e_4$ jsou všechna esa.

Tedy

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!}}{\frac{32!}{29!3!}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30}.$$

(d) bude vytaženo aspoň jedno eso

Snadnější je určit pravděpodobnost jevu $\overline{A}$ (žádné eso)

Ω a P jako v (a).

$\overline{A}$ sestáva z $\langle k_1, k_2, k_3 \rangle$, kde každá k_i je některou z 28 karet, které nejsou esa.

takových trojic je $|\overline{A}| = 28 \cdot 27 \cdot 26$.

Tedy

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{32 \cdot 31 \cdot 30} \approx 0.66, \\ P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \approx 0.34. \end{aligned}$$

(d) jinak

výsledky = neuspořádané trojice, viz [DS1]

přímo bez $\overline{A}$, viz [DS1]

Pozor na chyby

Příklad Házíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 8?

Jak určit množinu Ω elementárních jevů? Ukážeme tři možnosti.

(a) Možnosti výsledného součtu jsou: 2 (padnou dvě jedničky), 3 (jednička a dvojka), $\dots$, 12 (dvě šestky). Tedy $\Omega = \{2, \dots, 12\}$. Ω má 11 prvků.

(b) Elementární jev $=$ (neuspořádaná) dvojice $\{i, j\}$: na jedné kostce padne i, na druhé j a my nerozlišujeme, na které. Tedy $\Omega = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{6,6\}\}$. Ω má 21 prvků (15 dvojic, které je možné vybrat z 6 možností: $15 = \binom{6}{2}$; 6 jednoprvkových množin $\{1,1\}, \dots, \{6,6\}$).

(c) Elementární jev $=$ uspořádaná dvojice čísel $\langle i, j\rangle$: na první kostce pade i a na druhé j. Pak $\Omega = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \dots, \langle 6,6\rangle\}$ a Ω má 36 prvků.

Žádná z těchto možností není „ta správná“. Záleží, jak budeme se zvolenou Ω pracovat.

(a) Možnosti výsledného součtu jsou: 2 (padnou dvě jedničky), 3 (jednička a dvojka), $\ldots$, 12 (dvě šestky). Tedy $\Omega = \{2, \ldots, 12\}$. Ω má 11 prvků.

$$\text{Laplaceovo pravidlo:} \quad P(\text{součet } = 8) = \frac{1}{11} \approx 0.091.$$

(b) Elementární jev = (neuspořádaná) dvojice $\{i, j\}$ (na jedné i, na druhé j). Tedy $\Omega = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{6,6\}\}$. Ω má 21 prvků.

$$\text{Laplaceovo pravidlo:} \quad P(\text{součet } = 8) = \frac{3}{21} \approx 0.143.$$

(c) Elementární jev = uspořádaná dvojice čísel $\langle i, j\rangle$ (na první i, na druhé j). $\Omega = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \ldots, \langle 6,6\rangle\}$. Ω má 36 prvků.

$$\text{Laplaceovo pravidlo:} \quad P(\text{součet } = 8) = \frac{5}{36} \approx 0.139.$$

Jak to?

Úvahy v (a) a (b) jsou chybné. Elementární jevy v množinách Ω nejsou stejně pravděpodobné, jak vyžaduje Laplaceovo pravidlo.

Uvažme elementární jevy $\{2, 6\}$ a $\{4, 4\}$ v případu (b). $\{2, 6\}$ představuje ve skutečnosti dva možné výsledky: na první kostce padne 2, na druhé 6, druhý výsledek je, že na první kostce padne 6, na druhé 2; $\{4, 4\}$ představuje jen jeden takový výsledek: na první i na druhé kostce padne 4. $\{2, 6\}$ má tedy dvakrát větší pravděpodobnost než $\{4, 4\}$, a použít Laplaceovo pravidlo tedy nelze.

Při volbě elementárních jevů je třeba přihlížet k úloze, kterou máme řešit.

Rozumná zásada: volit jako elementární jevy neredukovatelné, neagregované entity.

Další příklady

Příklad V dodávce zboží je 85 výrobků bezchybných a 15 vadných. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude aspoň jeden vadný?

Na pořadí nezáleží, tedy $\Omega =$ množina všech 10-tiprvkových podmnožin $\{v_1, \dots, v_{100}\}$. Je $|\Omega| = \binom{100}{10}$.

Místo určení $P(A)$ jevu A (aspoň jeden je vadný) určíme $P(\overline{A})$ (žádný není vadný).

Je $|\overline{A}| = \binom{85}{10}$. Tedy

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{85}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{85!}{75!10!}}{\frac{100!}{90!10!}} = \frac{85!90!}{75!100!} \approx 0.18$$

a

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0.82.$$

Příklad V dodávce je n výrobků, z nich je k bezchybných a $n-k$ vadných. Jaká je pravděpodobnost, že z p náhodně vybraných výrobků bude právě r vadných?

Elementární jev = množina p vybraných výrobků. Jejich počet: $|\Omega| = \binom{n}{p}$.

r vadných lze vybrat $\binom{n-k}{r}$ způsoby
zbývajících $p-r$ bezchybných lze vybrat $\binom{k}{p-r}$ způsoby.

Tedy existuje $\binom{n-k}{r} \cdot \binom{k}{p-r}$ elementárních jevů, které jsou obsaženy v daném jevu A (r vadných a $p-r$ bezchybných). Je tedy

$$P(A) = \frac{\binom{n-k}{r}\binom{k}{p-r}}{\binom{n}{p}}.$$

Náhodné veličiny a jejich charakteristiky

Co ukážeme:

- náhodné veličiny = číselné charakteristiky výsledků náhodných pokusů
- jaká je očekávaná hodnota?
- jaký je rozptyl hodnot, popř. další charakteristiky?

Definice Náhodná veličina na konečném nebo diskrétním pravděpodobnostním prostoru $\left\langle \Omega, 2^{\Omega}, P \right\rangle$ je funkce

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

- X = nějaká číselná charakteristika výsledků (hmotnost, věk, cena atd.).
- $X(\omega)$ je hodnota výsledku ω (např. hmotnost osoby ω).
- Definice je speciálním případem obecné definice náhodné veličina. Obecně: X musí být tzv. měřitelná (pro $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ je vždy měřitelná).
- Náhodná veličina dle naší definice je tzv. diskrétní (množina hodnot veličiny X je konečná nebo spočetná).
- $X(\Omega)$ je množina všech hodnot veličiny X.

Příklad (triviální) Hod kostkou, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, $P(\{\omega_i\}) = 1/6$. Pak funkce X definovaná

$$X(\omega_i) = i$$

je náhodná veličina na $\left\langle \Omega, 2^\Omega, P \right\rangle$.

Příklad Experiment skončí úspěchem s pravděpodobností p a neúspěchem s p-stí $1-p$. Provedeme ho $3\times$ po sobě; provedení jsou na sobě nezávislá. Uvažujme $p = 1/2$.

Pravděpodobnostní prostor $\left\langle \Omega, 2^{\Omega}, P \right\rangle$:

- $\Omega = \{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \dots, \langle 1,1,1\rangle\}$,
  $P(\{\omega\}) = 1/|\Omega| = 1/8$.

Zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$X(\langle a,b,c\rangle) = a+b+c \text{ (počet úspěchů v sérii tří pokusů)}$$

je náhodná veličina, pro niž platí např.

$$X(\langle 0,0,0\rangle) = 0, X(\langle 0,1,0\rangle) = 1, X(\langle 1,0,1\rangle) = 2.$$

Možné hodnoty X jsou 0, 1, 2 a 3, tj. $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

Jaká je pravděpodobnost, že veličina X má hodnotu x?

- Jaká je p-st, že počet chyb náhodně vybraného výrobku je 2?
- (popř. obecněji: Jaká je p-st, že hmotnost h náhodně vybraného muže je $75\,\text{kg} \leq h \leq 85\,\text{kg}$?)

Jinak řečeno: Jakou p-st má jev $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$, tedy jakou hodnotu má

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})? \quad \text{(značíme také } P(X = x) \text{ nebo } p_X(x))$$

Příklad (z předchozího slajdu) Jaká je p-st, že ze 3 pokusů budou právě dva úspěšné? Tedy jaká je $P(X = 2)$?

Platí: jev „$X = 2$“ $= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,1,0\rangle\}$.
Proto $P(X = 2) = 3 \cdot {}^1\!/_8 = {}^3\!/_8$.

Princip výše uvedeného přechodu

$$P(\{\omega_i\}) \text{ (p-st výsledků) } \longrightarrow p_X(x_i) \text{ (p-st hodnot sledované veličiny)}$$

je následující tvrzení:

Věta Nechť X je náhodná veličina na konečném nebo diskrétním $\left\langle \Omega, 2^{\Omega}, P \right\rangle$. Definujme pro $x_i \in X(\Omega)$:

$$p_X(x_i) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}).$$

Pak

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} p_X(x_i) = 1.$$

Důkaz Přednáška. $\square$

Tedy:

- Pravděpodobnost P na původním prostoru vytváří p-st $p_X(x_i)$ hodnot x_i veličiny X, ta dále p-sti $P_X(B)$ množin $B \subseteq X(\Omega)$ hodnot náhodné veličiny.
- Dostaneme tak konečný nebo diskrétní pravděpodobnostní prostor

$$\left\langle X(\Omega), 2^{X(\Omega)}, P_X \right\rangle$$

kde pro $B \subseteq X(\Omega)$ definujeme

$$P_X(B) = \sum_{x_i \in B} p_X(x_i).$$

Příklad (3 pokusy, pokračování) Jaká je p-st, že ze 3 pokusů bude právě 1 úspěšný nebo právě 3 úspěšné?

Jaká je tedy

$$P_X(\{1,3\})?$$

Dle definice P_X je

$$\begin{aligned} P_X(\{1,3\}) = P(X \in \{1,3\}) = P(\{\omega \mid X(\omega) = 1 \text{ nebo } X(\omega) = 3\}) = \\ P(\{\langle 0,0,1\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\}) = 4 \cdot {}^1\!/_8 = {}^1\!/_2. \end{aligned}$$

Střední hodnota náhodné veličiny

Definice Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X se značí $E(X)$ a je definována následovně

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) \qquad \text{neboli} \qquad E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p_X(x).$$

- Pokud je množina hodnot veličiny X konečná, tj. $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, je

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

- Pokud je navíc p-stní rozdělení rovnoměrné, tj. $P(X = x_i) = {}^1/_n$, pak

$$E(X) = x_1 \cdot {}^1/_n + \cdots + x_n \cdot {}^1/_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

  tedy $E(X)$ je aritmetický průměr hodnot x_i.
- Obecně: $E(X)$ vyjadřuje, s přihlédnutím k p-sti hodnot, očekávanou hodnotu výsledku.
- $E(X)$ nemusí být rovna žádné z hodnot, které X nabývá.

Příklad $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$ s rovnoměrným rozdělením, tj. tj. $P(\{\omega_i\}) = 1/4$ pro každé i. X je dána takto:

$$X(\omega_1) = 1,\ X(\omega_2) = 10,\ X(\omega_3) = 1,\ X(\omega_4) = 12.$$

Tři možné hodnoty, $x_1 = 1$, $x_2 = 10$ a $x_3 = 12$ a je
Je $P(X = 1) = P(\{\omega_1, \omega_3\}) = 1/2$, $P(X = 10) = P(\{\omega_2\}) = 1/4$ a
$P(X = 12) = P(\{\omega_4\}) = 1/4$. Tedy

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) = \\ &= 1 \cdot P(X = 1) + 10 \cdot P(X = 10) + 12 \cdot P(X = 12) = \\ &= 1 \cdot 1/2 + 10 \cdot 1/4 + 12 \cdot 1/4 = 6. \end{aligned}$$

Příklad Jaká je $E(X)$ v příkladu výše s posloupností tří pokusů?

Je $\Omega = \{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \dots, \langle 1,1,1\rangle\}$. Je $X(\langle a,b,c\rangle) = a+b+c$ a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) = \\ &= 0 \cdot {}^{1}\!/_{8} + 1 \cdot {}^{3}\!/_{8} + 2 \cdot {}^{3}\!/_{8} + 3 \cdot {}^{1}\!/_{8} = \\ &= {}^{12}\!/_{8} = 1.5. \end{aligned}$$

Příklad (časová složitost $T(n)$ algoritmu A v průměrném případě jako střední hodnota)

Obvyklá definice $T(n)$: nechť $I_1, \dots, I_k$ jsou všechny vstupy velikosti n, pak

$$T(n) = \frac{t_1 + \cdots + t_k}{k}, \quad \text{kde } t_i \text{ je počet kroků } A \text{ (trvání) pro zpracování vstupu } I_i.$$

Definice přes $E(X)$ (navíc obecnější):

Pro n uvažujme $\Omega_n = \{I_1, \dots . I_k\}$ spolu s p-stmi $p(I_1), \dots, p(I_k)$, tj. $\sum_{i=1}^{k} p(I_i) = 1$.
Definujme náhodnou veličinu X_n:

$$X(I_i) = t_i$$

Pak časová složitost v průměrném případě je funkce $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovaná

$$T(n) = E(X_n), \quad \text{tedy } T(n) = \sum_i [\text{p-st vstupu } I_i] \cdot [\text{trvání pro } I_i].$$

Pokud $p(I_i) = 1/k$ (stejně pravděpodobné vstupy), dostaneme obvyklou definici.

Věta Nechť X a Y jsou náhodné veličiny na konečném nebo diskrétním $\left\langle \Omega, 2^{\Omega}, P \right\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$. Uvažujme funkce $X + Y$ a $c \cdot X$ definované $(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ a $(c \cdot X)(\omega) = c \cdot X(\omega)$. Pak

(a) $X + Y$ je náhodná veličina

(b) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

(c) $c \cdot X$ je náhodná veličina.

(d) $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$.

Důkaz (a) a (c): triviální (za předpokladů je každá funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodná veličina).

(b) a (d): Uvědomme si, že $E(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z \cdot P(Z = z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot P(\{\omega\})$.
Pak tedy
$E(X+Y) = \sum_z z \cdot P(X+Y=z) = \sum_{\omega\in\Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$
$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = E(X) + E(Y)$.

$E(cX) = \sum_z z \cdot P(cX = z) = \sum_{\omega\in\Omega} (cX)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = c \cdot \sum_{\omega\in\Omega} (cX)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$
$c \cdot E(X)$. $\square$

Rozptyl a směrodatná odchylka náhodné veličiny *

Příklad Jeden člověk sní celé kuře, druhý nic. V průměru měl každý půl kuřete.

Příklad
(a) Existují tři vstupy, I, J a K pro algoritmus A. jejich zpracování trvá 10, 1000 a 1990 kroků. V průměru tedy trvá zpracování vstupu 1000 kroků.

(b) Zpracování vstupů I, J a K trvá 990, 1000 a 1010 kroků. V průměru tedy 1000 kroků.

Ponaučení:

Průměr (a střední hodnota) poskytují jen omezenou charakterizaci veličiny X.

Hodnoty X (počet snědených kuřat, počet vykonaných kroků) mohou být kolem $E(X)$ různě rozptýleny.

Definice Rozptyl (také variance) $\operatorname{var} X$ (také $\mu_2(X)$) náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\operatorname{var} X = E((X - E(X))^2).$$

Směrodatná odchylka σ náhodné veličiny X je druhá odmocnina rozptylu, tj.

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{var} X}.$$

- $\operatorname{var} X$ vyjadřuje, jak moc jsou hodnoty X rozptýleny kolem $E(X)$.
- X je n. veličina, $E(X)$ je číslo, $X - E(X)$ je n. veličina, $(X - E(X))^2$ je n. veličina, rozptyl $E((X - E(X))^2)$ je tedy střední hodnota veličiny $(X - E(X))^2$.

Věta Pro náhodnou veličinu X a konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $\mathrm{var}(b) = 0$ (b jako konstantní funkce je náhodnou veličinou),

(b) $\mathrm{var}(aX) = a^2\mathrm{var}(X)$,

(c) $\mathrm{var}(X + b) = \mathrm{var}(X)$,

(d) $\mathrm{var}(aX + b) = a^2\mathrm{var}(X)$,

Důkaz Stačí (d), ostatní plynou z (d):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(aX+b) &= E([aX+b-E(aX+b)]^2) = E([aX+b-aE(X)-b]^2) = \\
&= E([aX-aE(X)]^2) = E(a^2[X-E(X)]^2) = \\
&= a^2E([X-E(X)]^2) = a^2\mathrm{var}(X).
\end{aligned}
$$

$\square$

Poznámka Pro náhodnou veličinu X má náhodná veličina Z daná $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{var}\, X}}$ vlastnosti (důkaz dosazením):

$$E(Z) = 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{var}\, Z = 1$$

Příklad Uvažujme $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$, $P(\{\omega_i\}) = 1/4$, a náhodnou veličinu danou

$$X(\omega_1) = 0, X(\omega_2) = 2, X(\omega_3) = 4, X(\omega_4) = 6.$$

Je zřejmé, že

$$P(X = 0) = 1/4, P(X = 2) = 1/4, P(X = 4) = 1/4, P(X = 6) = 1/4,$$

a tedy

$$E(X) = 0 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 6 \cdot 1/4 = 3.$$

Označíme-li $x_1 = 0, \ldots, x_4 = 6$, pak

$$\begin{aligned}
\operatorname{var} X &= E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - 3)^2 \cdot 1/4 \\
&= [(0-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (6-3)^2] \cdot 1/4 \\
&= [9 + 1 + 1 + 9] \cdot 1/4 = 5.
\end{aligned}$$

Příklad Uvažujme veličinu Y danou (porovnej s předchozím slajdem)

$$Y(\omega_1) = 1, Y(\omega_2) = 2, Y(\omega_3) = 4, Y(\omega_4) = 5.$$

Pak

$$P(Y = 1) = 1/4, P(Y = 2) = 1/4, P(Y = 4) = 1/4, P(Y = 5) = 1/4.$$

Pak $E(Y) = 3$. Označíme-li $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$, $y_4 = 5$, pak

$$\begin{aligned}
\operatorname{var} Y &= \sum_{i=1}^{4} (y_i - 3)^2 \cdot 1/4 \\
&= [(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2] \cdot 1/4 = \\
&= [4 + 1 + 1 + 4] \cdot 1/4 = 2.5.
\end{aligned}$$

Tedy $\operatorname{var} Y < \operatorname{var} X$ v souladu s intuicí: Hodnoty X jsou více rozptýleny.

Dále: pro X je $\sigma = \sqrt{3}$, pro Y je $\sigma = \sqrt{2.5}$.

- Střední hodnota a rozptyl jsou nejčastěji používané charakteristiky.
- Jsou to speciální případy charakteristik nazývaných momenty. ($E(X)$ je 1. obecný moment, $\mathrm{var}\, X$ je 2. centrální moment.)
- Mají uplatnění i v situacích, kde hodnoty nemají typickou pravděpodobnostní interpretaci, viz následující příklad.

Příklad Jsou dány hodnoty $x_1, \dots, x_n$. Jaká je průměrná hodnota a jaký je rozptyl?

Napojení na pravděpodobnostní pojmy:
x_i považujeme za hodnoty náhodné veličiny X; $P(X = x_i) = \frac{count(x_i)}{n}$, kde $count(x_i)$ je počet výskytů x_i v $x_1, \dots, x_n$ (mohou se opakovat).

$E(X)$ a $\mathrm{var}\, X$ se pak rutině spočítá.

Hodnoty x_i jsou např.: zadluženost firem, délka života obyvatel atd.

Kvantily a modus náhodné veličiny

Definice Pro $q \in (0, 1)$ je $100q\%$-kvantil, někdy q-kvantil, diskrétní náhodné veličiny X hodnota $x_q \in \mathbb{R}$, pro kterou je

$$P(X < x_q) \leq q \quad \text{a} \quad P(X \leq x_q) \geq q$$

Význam:

- Při rovnoměrném rozdělení p-sti: 25% všech hodnot je $\leq x_q$.
- Obecně: P-st, že hodnota je $\leq x_q$ je q.

Kvantily nejsou určeny jednoznačně (q-kvantilem může být interval hodnot), uvidíme.

Speciální názvy:

- medián je 0.5-kvantil,
- dolní kvartil je 0.25-kvantil, horní kvartil je 0.75-kvantil,
- k. decil je $k/10$-kvantil, k. percentil je $k/100$-kvantil.

Definice Modus náhodné veličiny je hodnota $\hat{x}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$P(X = \hat{x}) \geq P(X = x).$$

Modus je, zhruba řečeno, nejčastější hodnota náhodné veličiny.

Příklad Hod kostkou, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$, $X(\omega_i) = i$.

- $x_{0.5}$ (medián) je každé číslo z intervalu $[3, 4)$.
- $x_{0.25}$ (dolní kvartil) neexistuje.
- $x_{0.75}$ (horní kvartil) neexistuje.
- $x_{1/3}$ je každé číslo z intervalu $[2, 3)$.
- Modus je každá z hodnot $1, \dots, 6$.

Příklad Uvažujme $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$, $P(\{\omega_i\}) = 1/4$ a náhodnou veličinu danou

$$X(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = 2, X(\omega_3) = 4, X(\omega_4) = 6.$$

Pak

$$p(X = 2) = 1/2, \quad p(X = 4) = 1/4, \quad p(X = 6) = 1/4.$$

- Mediánem je každá hodnota z intervalu $[2, 4)$.
- Dolní kvartil neexistuje.
- Horní kvartil je každá hodnota z $[4, 6)$.
- Modus je jediný, je jím hodnota 2.