NP-úplnost

Jan Konečný

18. listopadu 2013

Problém splnitelnosti Booleovských formulí

Definice

Jazyk SAT je definován následovně:

$$\mathrm{SAT} = \{[\phi] \mid \phi \text{ je splnitelná formule. } \}$$

SAT jako problém

Problém splnitelnosti Booleovských formulí
Instance: ϕ – Booleovská formule **Otázka:** Existuje ohodnocení e s.t. $\|\|\phi\|\| = 1$?

Věta (Cookova)

$$\mathrm{SAT} \in \quad \textit{iff}\ \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$$

Redukovatelnost v polynomiálním čase

Definice

Funkce $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je *funkce vyčíslitelná v polynomiálním čase*, pokud existuje TS pracující v polynomiálním čase, který pro každé $w \in \Sigma^*$ zastaví a na pásce má zapsáno w.

Definice

Jazyk A je *redukovatelný v polynomilláním čase* na jazyk B, značeno $A \leq_{\mathrm{P}} B$, pokud existuje redukce v polynomiálním čase; tj. $r : \Sigma^* \to \Sigma^*$, t.ž.

$$w \in A \text{ p.k. } f(w) \in B.$$

Věta

Pokud $A \leq_{\mathrm{P}} B$ *a* $B \in \mathrm{P}$, *pak* $A \in \mathrm{P}$.

Důkaz na tabuli

3SAT a problém kliky

Definice

$$\mathrm{3SAT} = \{[\phi] \mid \phi \text{ je splnitelná 3-cnf-formule}\}.$$

3SAT
Instance: ϕ – 3-cnf-formule **Otázka:** Je ϕ splnitelná

Definice

$$\mathrm{CLIQUE} = \{[G, k] \mid G \text{ je graf mající kliku velikosti } k\}.$$

CLIQUE
Instance: Graf G, přirozené číslo k **Otázka:** Má G kliku velikosti k.

Věta

$$3\mathrm{SAT} \leq_{\mathrm{P}} \mathrm{CLIQUE}.$$

Důkaz na tabuli.

NP-úplnost

Definice

Jazyk B je NP-*úplný*, pokud

- B je v NP,
- B je NP-těžký. Tj. pro každý $A \in \mathrm{NP}$ platí $A \leq_{\mathrm{P}} B$.

Věta

Pokud B je NP-úplný a $B \in \mathrm{P}$, pak $P = NP$.

Důkaz.

Přímo z definice redukovatelnosti v polynomickém čase. $\square$

Věta

Pokud B je NP-úplný a $B \leq_{\mathrm{P}} C$ pro $C \in \mathrm{NP}$, pak C je NP-úplný.

Důkaz na TABULI

Cook-Levinova věta

Věta

SAT *je* NP*-úplný.*

Důkaz na TABULI

Důsledek

3SAT *je* NP-*úplný.*

Důsledek

CLIQUE *je* NP-*úplný.*