

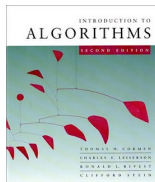
Binární vyhledávací stromy – pokročilé partie

KMI/ALS1 – lekce 1

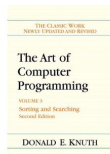
Jan Konečný

30.9.2014

Literatura



Cormen Thomas H. ,
Introduction to Algorithms, 2nd edition
MIT Press, 2001. ISBN 0-262-53196-8
16×, 3×, 



Knuth Donald E.,
The Art of COmputer Programming, Vol. 3
Addison-Wesley, 1998. ISBN 0-201-89685-0
1×, 2×, .

Binární vyhledávací stromy (binary search tree), (BST)

Máme lineárně uspořádanou množinu klíčů.

Binární vyhledávací strom je strom, kde

- ▶ uzly jsou označeny klíčem,
- ▶ každý uzel má nejvýše dva potomky (nejvýše jednoho levého a nejvýše jednoho pravého).
- ▶ pokud má uzel s klíčem k levého potomka s klíčem l , platí $l < k$.
- ▶ pokud má uzel s klíčem k pravého potomka s klíčem p , platí $k < p$.

Hledání v binárním vyhledávacím stromu

Vstup : strom T , klíč k

Výstup: uzel s klíčem k

$N \leftarrow \text{root}(T);$

while $\text{key}(N) \neq k$ **do**

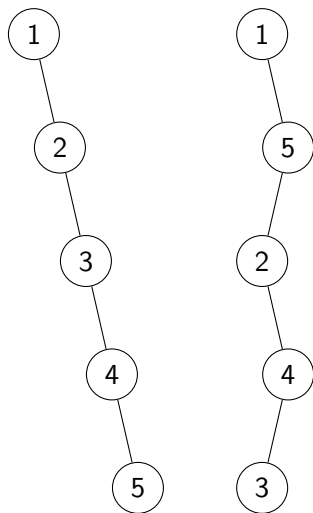
if $\text{key}(N) < k$ **then**

$N \leftarrow \text{left}(N)$

else

$N \leftarrow \text{right}(N)$

Co člověka děsí?



Degenerované stromy

A proč nás to děsit nemusí?

Theorem

Průměrný počet porovnání při vyhledávání v BST o N klíších je asi

$$2 \ln N \approx 1.386 \log_2 N.$$

To platí za předpokladu, že:

- ▶ pravděpodobnost, že N klíčů bylo vloženo v každém z $N!$ pořadí je stejná.
- ▶ ze stromu se nemazalo.

Definujme náhodně vybudovaný BST (**randomly build BST**), (RBBST) o n prvcích jako strom, který byl na počátku prázdný, a bylo do něj vloženo n prvků v libovolném z $n!$ pořadí.

úspěšné hledání

Označme:

- ▶ C_n – průměrný počet porovnání při úspěšném hledání v BST s N klíči.
- ▶ C'_n – průměrný počet porovnání při neúspěšném hledání v BST s N klíči.

$$C_n = 1 + \frac{C'_0 + C'_1 + \dots + C'_{N-1}}{N} \quad (1)$$

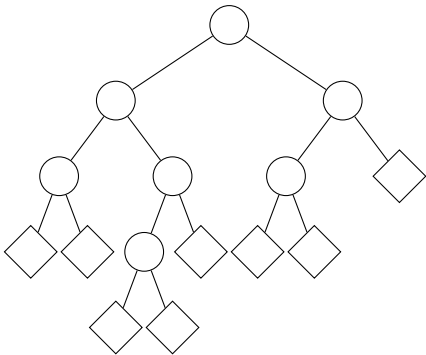
Vysvětlení:

- počet porovnání při úspěšném hledání klíče k v BST s N klíči je o jedna větší než počet porovnání, který byl potřebný ke vložení klíče k .
- počet porovnání, který byl potřebný k vložení klíče k do BST s i klíči je roven počtu porovnání při neúspěšném hledání v BST s $i - 1$ klíči.
- klíč k byl vložen jako i -tý se stejnou pravděpodobností pro všechna $i \in \{1, \dots, N\}$. Proto ten aritmetický průměr.

Rozšířený binární strom – přidáme zvláštní uzly tam, kde měl původní strom prázdný podstrom.

```

graph TD
    A(( )) --- B(( ))
    A --- C(( ))
    B --- D(( ))
    B --- E(( ))
    C --- F(( ))
    D --- G(( ))
  
```

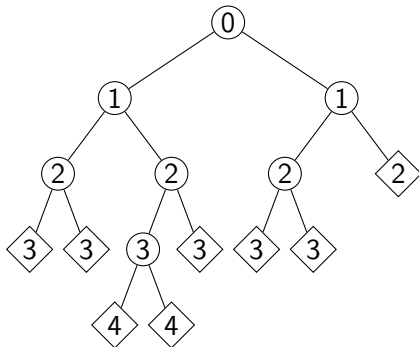


 – vnější uzel

délka vnější cesty (E – external path length): Součet vzdáleností kořene od všech vnějších uzlů.

délka vnitřní cesty (I – internal path length): Součet vzdáleností kořene od všech vnitřních uzlů.

Example



délka vnitřní cesty: $I = 2 + 1 + 3 + 2 + 0 + 2 + 1 = 11$

délka vnější cesty: $E = 3 + 3 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 = 25$

Theorem

Pro BST o N vnitřních uzlech platí, že

$$E = I + 2N$$

Důkaz.

Uvažme smazání jednoho vnitřního uzlu V ve vzdálenosti k od kořene, kde jsou oba potomci vnější: E klesne o $2(k + 1)$, protože potomci V jsou odstraněni a současně stoupne, protože V se stane vnějším uzlem.

Čistá změna v E je tedy $-k - 2$; čistá změna I je $-k$. Tvrzení vyplývá indukcí. □

Pokud předpokládáme, že každý klíč je vyhledáván se stejnou pravděpodobností a že každý z $N + 1$ intervalů mezi klíči a vně extrémních hodnot klíčů je stejně pravděpodobný, dostáváme:

$$C_n = 1 + \frac{I}{N}, \quad C'_n = \frac{E}{N + 1}$$

Protože $E = I + 2N$, dostáváme zajímavý vztah mezi C_n a C'_n :

$$C_n = \left(1 + \frac{1}{N}\right) C'_n - 1 \quad (2)$$

Dáme dohromady (??) a (??), a dostáváme:

$$(N + 1)C'_n = 2N + C'_0 + C'_1 + \cdots + C'_{N-1}. \quad (3)$$

$$(N+1)C'_n = 2N + C'_0 + C'_1 + \cdots + C'_{N-1}. \quad (4)$$

Rekurence se snadno zbavíme, když od (??) odečteme rovnici

$$NC'_{N-1} = 2(N-1) + C'_0 + C'_1 + \cdots + C'_{N-2}.$$

(to je ta samá rovnice pro $N-1$)

Dostaneme

$$(N+1)C'_n - NC'_{N-1} = 2 + C'_{N-1}.$$

Po úpravě...

$$C'_n = C'_{N-1} + \frac{2}{N+1}$$

Intermezzo: Harmonická čísla

Harmonická čísla rekurzivně:

$$H_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ H_{n-1} + \frac{1}{n} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Takže $C'_n = 2H_{N+1} - 2$.

Po dosazení do (??) a zjednodušení dostáváme

$$C_n = 2 \left(1 + \frac{1}{N} \right) H_n - 3 \approx 2 \ln N$$

...odsud pak tvrzení věty

Jiná úvaha o tomtěž

Víme, že složitost vyhledávání v nejhorším případě BST je $\mathcal{O}(h)$, kde h je výška stromu.

Ukážeme, že platí následující věta:

Theorem

Očekávaná výška RBBST o n prvcích je $\mathcal{O}(\log(n))$.

Důkaz

Nadefinujeme si tyto tři náhodné proměnné:

- ▶ výška RBBST o n prvcích X_n ,
- ▶ exponenciální výška $Y_n = 2^{X_n}$,
- ▶ klíč v kořeni RBBST R_n .

Hodnota R_n je se stejnou pravděpodobností kterýkoli z prvků $\{1, \dots, n\}$.

Pokud $R_n = i$, pak

- ▶ levý podstrom je RBBST o $i - 1$ prvcích
- ▶ pravý podstrom je RBBST o $n - i$ prvcích
- ▶ $Y_n = 2 \cdot \max(Y_{i-1}, Y_{n-i})$

Jako krajní případy Y_n máme $Y_1 = 1, Y_0 = 0$.

Dále definujeme náhodné proměnné $Z_{n,1}, Z_{n,2}, \dots, Z_{n,n}$, kde

$$Z_{n,i} = \mathbb{I}\{R_n = i\}.$$

Máme $\Pr\{R_n = i\} = 1/n$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,
a tedy $\mathbb{E}[Z_{n,i}] = 1/n$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Protože právě jedna hodnota $Z_{n,i} = 1$ a všechny ostatní jsou 0,
máme taky:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n Z_{n,i} (2 \cdot \max(Y_{i-1}, Y_{n-i}))$$

Ukážeme, že $\mathbb{E}[Y_n]$ je polynomická v n , z toho pak vyplyne, že
 $\mathbb{E}[X_n] = \mathcal{O}(\log n)$.

$Z_{n,i}$ je nezávislá na Y_{i-1} a Y_{n-i} :

Když vybereme $R_n = i$, levý podstrom (s exp. výškou Y_{i-1}) je náhodně vybudován z $i - 1$ klíčů, které jsou menší než i .

Tento podstrom je jako jakýkoli jiný podstrom vybudovaný z $i - 1$ prvků:

- ▶ pouze počet prvků v něm je závislý na volbě R_n ,
- ▶ jeho struktura není nijak závislá na volbě R_n .

stejně tak pro pravý podstrom.

A proto...

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n Z_{n,i} (2 \cdot \max(Y_{i-1}, Y_{n-i})) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [Z_{n,i} (2 \cdot \max(Y_{i-1}, Y_{n-i}))] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [Z_{n,i}] \mathbb{E} [2 \cdot \max(Y_{i-1}, Y_{n-i})] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mathbb{E} [2 \cdot \max(Y_{i-1}, Y_{n-i})] \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\max(Y_{i-1}, Y_{n-i})] \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E} [Y_{i-1}] + \mathbb{E} [Y_{n-i}])
\end{aligned}$$

Z předchozího slajdu:

$$E[Y_n] \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (E[Y_{i-1}] + E[Y_{n-i}])$$

Tam se každý term $E[Y_0], E[Y_1], \dots, E[Y_{n-1}]$ vyskytuje dvakrát; můžeme zjednodušit na

$$E[Y_n] \leq \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E[Y_{i-1}]$$

Ted' ukážeme (substituční metodou), že pro všechna kladná n je toto ekvivalentní s

$$E[Y_n] \leq \frac{1}{4} \binom{n+3}{3}$$

Přitom použijeme rovnost $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+3}{3} = \binom{n+3}{4}$.

(ověříme ji na cvičení)

Pro základní případ overíme, že ohraničení platí:

$$1 = Y_1 = E[Y_1] \leq \frac{1}{4} \binom{1+3}{1} = 1.$$

Dále

$$\begin{aligned} E[Y_n] &\leq \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E[Y_i] = \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4} \binom{i+3}{3} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+3}{3} = \frac{1}{n} \binom{n+3}{4} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n+3)!}{3!n!} = \frac{1}{4} \binom{n+3}{3} \end{aligned}$$

Platí (ne vždy, ale v tomto případě ano), že

$$2^{E[X_n]} \leq E[2^{X_n}] = E[Y_n].$$

A z toho máme, že

$$2^{E[X_n]} \leq \frac{1}{4} \binom{n+3}{3} = \frac{1}{4} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

Zlogaritmováním obou stran dostáváme $E[X_n] = \mathcal{O}(\log n)$.
Odtud tvrzení věty.

Optimální stromy

Pokud je každý klíč vyhledáván stejně často je samozřejmě nejlepší vyvážený strom.

Jak je to, pokud jsou frekvence vyhledávání klíčů různé?

Uvažujme pravděpodobnosti $p_1, \dots, p_n$ pravděpodobnosti $q_0, q_1, \dots, q_n$, kde

- ▶ p_i je pravděpodobnost hledání i -tého vloženého klíče K_i ,
- ▶ q_i je pravděpodobnost hledání klíče, který leží mezi klíči K_i a K_{i+1} ,
 q_0 je pravděpodobnost hledání klíče, který leží před klíčem K_1 ,
 q_n je pravděpodobnost hledání klíče, který leží za klíčem K_n ,

t.ž. $p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_0 + q_1 + \dots + q_n = 1$.

(toto vlastně nebudeme potřebovat; pravděpodobnostem budeme říkat váhy)

Chceme najít binární vyhledávací strom (optimální strom), který minimalizuje počet porovnání během hledání:

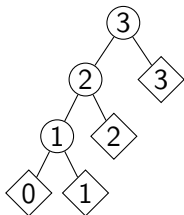
$$\sum_{j=1}^n p_j(\text{level}(\textcircled{j}) + 1) + \sum_{k=0}^n q_k(\text{level}(\text{◇}_k)), \quad (5)$$

kde $\textcircled{j}$ je j -tý vnitřní uzel v symetrickém uspořádání a ◇_k je $(k + 1)$ -tý vnější uzel a kde kořen má level 0.

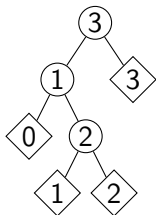
Example

Mějme klíče 1,2,3, s vahami p_1, p_2, p_3 a q_0, q_1, q_2, q_3 .

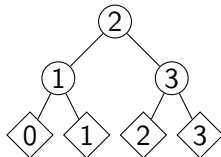
Je 5 možných stromů:



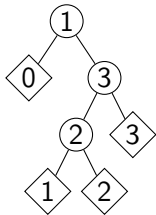
$$2p_1 + p_2 + 3q_0 + 3q_1 + 2q_2 + q_3$$



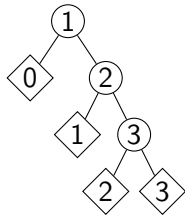
$$p_1 + 2p_2 + 2q_0 + 3q_1 + 3q_2 + q_3$$



$$p_1 + p_3 + 2q_0 + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3$$



$$2p_2 + p_2 + q_0 + 3q_1 + 3q_2 + 2q_3$$



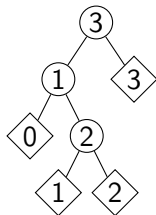
$$p_2 + 2p_3 + q_0 + 2q_1 + 3q_2 + 3q_3$$

Pozorování

Všechny podstromy optimálního stromu jsou optimální.

Example

Pokud je tento strom optimální pro váhy $(p_1, p_2, p_3; q_0, q_1, q_3)$, pak jeho levý podstrom musí být optimální pro $(p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$. Jakékoli zlepšení v podstromu vede ke zlepšení celého stromu.



Tento princip využijeme a budeme konstruovat větší a větší podstromy.

pozn.: obecně se tomuto principu říká „dynamické programování.“

Pozorování

Všechny podstromy optimálního stromu jsou optimální.

Označme (pro $0 \leq i \leq j \leq n$):

- ▶ $c(i, j)$ - cena optimálního podstromu s vahami $(p_{i+1}, \dots, p_j; q_i, \dots, q_j)$,
- ▶ $w(i, j)$ - součet těchto vah, tj. $p_{i+1} + \dots + p_j + q_i + \dots + q_j$.

Vyplývá, že

$$c(i, i) = 0$$

$$c(i, j) = w(i, j) + \min_{i < k \leq j} (c(i, k-1) + c(k, j)), \quad \text{pro } i < j, \quad (6)$$

protože minimální možná cena stromu s kořenem $\textcircled{k}$ je

$$w(i, j) + c(i, k-1) + c(k, j).$$

Pro $i < j$, nechť $R(i, j)$ je množina všech k , pro které je v (??) dosaženo minimum (tj. množina možných kořenů optimálních stromů).

Rovnice (??) umožňuje vyhodnotit $c(i, j)$ pro $j - i = 1, 2, \dots, n$. Je asi $\frac{1}{2}n^2$ takových hodnot. Minimalizace je prováděna pro $\frac{1}{6}n^3$ hodnot k .

To znamená, že můžeme určit optimální strom v čase $\mathcal{O}(n^3)$ a paměti $\mathcal{O}(n^2)$.

Ve skutečnosti jsme na tom ještě lépe...

My totiž nepotřebujeme počítat celou $R(i, j)$ stačí nám jeden reprezentant $r(i, j)$.

Pokud vypočítáme $r(i, j - 1)$ a $r(i + 1, j)$, můžeme automaticky předpokládat, že

$$r(i, j - 1) \leq r(i, j) \leq r(i + 1, j).$$

To omezí hledání minima: místo $j - i$ hodnot k stačí prozkoumat $r(i + 1, j) - r(i, j - 1) + 1$ hodnot.

Celkové množství práce (když $j - i = d$) je omezeno teleskopickými posloupnostmi

$$\sum_{\substack{d \leq j \leq n \\ i = j - d}} r(i + 1, j) - r(i, j - 1) + 1 = r(n - d + 1, n) - r(0, d - 1) + n - d + 1 < 2n$$

Časová složitost je tedy $\mathcal{O}(n^2)$.

Algoritmus hledání optimálního stromu

Vstup: $2N + 1$ nezáporných vah $(p_1, \dots, p_n; q_0, \dots, q_n)$.

Výstup: binární vyhledávací stromy $t(i, j)$, které mají minimální cenu vyhledávání pro váhy $(p_{i+1}, \dots, p_j; q_i, \dots, q_j)$.

Budeme počítat 3 pole:

$c[i, j]$,	pro $0 \leq i \leq j \leq n$,	cena stromu $t(i, j)$
$r[i, j]$,	pro $0 \leq i < j \leq n$,	kořen stromu $t(i, j)$
$w[i, j]$,	pro $0 \leq i \leq j \leq n$,	celková váha stromu $t(i, j)$

Jak potom číst výsledek:

- ▶ pokud $i = j$, pak $t(i, j)$ je null.
- ▶ jinak jeho levý podstrom je $t(i, r[i, j] - 1)$ a pravý podstrom je $t(r[i, j], j)$.

Hledání optimálního stromu

Vstup : $2n + 1$ nezáporných vah $(p_1, \dots, p_n; q_0, \dots, q_n)$

Výstup: binární vyhledávací stromy $t(i, j)$, které mají minimální cenu vyhledávání pro váhy $(p_{i+1}, \dots, p_j; q_i, \dots, q_j)$

Inicializace;

Pro $0 \leq i \leq n$: $c[i, i] \leftarrow 0$;

$w[i, i] \leftarrow q_i$

$w[i, j] \leftarrow w[i, j-1] + p_j + q_j$ pro $j = i+1, \dots, N$;

Pro $1 \leq j \leq n$: $c[j-1, j] \leftarrow w[j-1, j]$;

$r[j-1, j] \leftarrow j$;

for $d \leftarrow 2$ **to** n **do**

for $j \leftarrow d$ **to** n **do**

$i \leftarrow j - d$;

$c[i, j] \leftarrow w[i, j] + \min_{r[i, j-1] \leq k \leq r[i+1, j]} (c[i, k-1] + c[k, j]);$

$r[i, j] \leftarrow k$ pro které nastává to minimum;

Vstup: $p_i = (4, 1, 2, 2, 6)$; $q_i = (1, 1, 1, 3, 2, 1)$.

Initalize:

$$\begin{array}{c}
 W \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\
 & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\
 & & 1 & 6 & 10 & 17 \\
 & & & 3 & 7 & 14 \\
 & & & & 2 & 9 \\
 & & & & & 1
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 6 \\
 3 \\
 6 \\
 7 \\
 9
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 R \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 2 - 2 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 1] = 1$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 2] = 2$$

$$\begin{aligned} k = 1 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 0] + c[1, 2] = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 1] + c[2, 2] = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c[i, j] &= c[0, 2] \leftarrow w[0, 2] + 3 = \\ &11 \end{aligned}$$

$$r[i, j] = r[0, 2] \leftarrow 1$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 3 - 2 = 1$$

$$r[i, j - 1] = r[1, 2] = 2$$

$$r[i + 1, j] = r[2, 3] = 3$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 1] + c[2, 3] = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 2] + c[3, 3] = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c[i, j] = c[1, 3] &\leftarrow w[1, 3] + 3 = \\ &11 \end{aligned}$$

$$r[i, j] = r[1, 3] \leftarrow 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 4 - 2 = 2$$

$$r[i, j - 1] = r[2, 3] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[3, 4] = 4$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 2] + c[3, 4] = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 3] + c[4, 4] = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c[i, j] = c[2, 4] &\leftarrow w[2, 4] + 6 = \\ &16 \end{aligned}$$

$$r[i, j] = r[2, 4] \leftarrow 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 5 - 2 = 3$$

$$r[i, j - 1] = r[3, 4] = 4$$

$$r[i + 1, j] = r[4, 5] = 5$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[3, 3] + c[4, 5] = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 5 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[3, 4] + c[5, 5] = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c[i, j] = c[3, 5] &\leftarrow w[3, 5] + 7 = \\ &21 \end{aligned}$$

$$r[i, j] = r[3, 5] \leftarrow 5$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 3 - 3 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 2] = 1$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 3] = 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 1 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 0] + c[1, 3] = 11 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & & \\ & & 3 & 11 & & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 1] + c[2, 3] = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 2] + c[3, 3] = 11 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 4 - 3 = 1$$

$$r[i, j - 1] = r[1, 3] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[2, 4] = 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 2] + c[3, 4] = 10 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & & \\ & & 3 & 11 & 22 & \\ & & & 6 & 16 & \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 3] + c[4, 4] = 11 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & 3 & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$c[i, j] = c[1, 4] \leftarrow$$

$$w[1, 4] + 10 = 22$$

$$r[i, j] = r[1, 4] \leftarrow 3$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 5 - 3 = 2$$

$$r[i, j - 1] = r[2, 4] = 4$$

$$r[i + 1, j] = r[3, 5] = 5$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 3] + c[4, 5] = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 5 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 4] + c[5, 5] = 16 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[2, 5] \leftarrow$$

$$w[2, 5] + 15 = 32$$

$$r[i, j] = r[2, 5] \leftarrow 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & & \\ & & 3 & 11 & 22 & \\ & & & 6 & 16 & 32 \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & 3 & \\ & & & 3 & 4 & 4 \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 4 \quad 5$$

$$i = 4 - 4 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 3] = 1$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 4] = 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 1 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 0] + c[1, 4] = 22 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & 35 & \\ & & 3 & 11 & 22 & \\ & & & 6 & 16 & 32 \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 1] + c[2, 4] = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 2] + c[3, 4] = 18 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 3 & \\ & & 2 & 3 & 3 & \\ & & & 3 & 4 & 4 \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 4 \quad 5$$

$$i = 5 - 4 = 1$$

$$r[i, j - 1] = r[1, 4] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[2, 5] = 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 2] + c[3, 5] = 24 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & 35 & \\ & & 3 & 11 & 22 & 39 \\ & & & 6 & 16 & 32 \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 3] + c[4, 5] = 20 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 3 & \\ & & 2 & 3 & 3 & 4 \\ & & & 3 & 4 & 4 \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$c[i, j] = c[1, 5] \leftarrow$$

$$w[1, 5] + 20 = 39$$

$$r[i, j] = r[1, 5] \leftarrow 4$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 5$$

$$i = 5 - 5 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 4] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 5] = 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 13 & 17 & 24 \\ & 1 & 3 & 8 & 12 & 19 \\ & & 1 & 6 & 10 & 17 \\ & & & 3 & 7 & 14 \\ & & & & 2 & 9 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 2] + c[3, 5] = 32 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 6 & 11 & 24 & 35 & 56 \\ & & 3 & 11 & 22 & 39 \\ & & & 6 & 16 & 32 \\ & & & & 7 & 21 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 3] + c[4, 5] = 33 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ & & 2 & 3 & 3 & 4 \\ & & & 3 & 4 & 4 \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$c[i, j] = c[0, 5] \leftarrow$$

$$w[0, 5] + 32 = 56$$

$$r[i, j] = r[0, 5] \leftarrow 3$$

$$p = (1, 5, 2, 2, 1); q = (3, 1, 3, 1, 2, 1)$$

Initialize:

$$\begin{array}{c}
 W \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\
 & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\
 & & 3 & 6 & 10 & 12 \\
 & & & 1 & 5 & 7 \\
 & & & & 2 & 4 \\
 & & & & & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 C \\
 \left[\begin{array}{c}
 5 \\
 9 \\
 6 \\
 5 \\
 4
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 R \\
 \left[\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 2 - 2 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 1] = 1$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 2] = 2$$

$$\begin{aligned} k = 1 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 0] + c[1, 2] = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[0, 1] + c[2, 2] = 5 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[0, 2] \leftarrow w[0, 2] + 5 = 18$$

$$r[i, j] = r[0, 2] \leftarrow 2$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & & & \\ & & 9 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 3 - 2 = 1$$

$$r[i, j - 1] = r[1, 2] = 2$$

$$r[i + 1, j] = r[2, 3] = 3$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 1] + c[2, 3] = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 2] + c[3, 3] = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c[i, j] = c[1, 3] &\leftarrow w[1, 3] + 6 = \\ &18 \end{aligned}$$

$$r[i, j] = r[1, 3] \leftarrow 2$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & & & \\ & & 9 & 18 & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & & & \\ & & 2 & 2 & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 4 - 2 = 2$$

$$r[i, j - 1] = r[2, 3] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[3, 4] = 4$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 2] + c[3, 4] = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 3] + c[4, 4] = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c[i, j] = c[2, 4] &\leftarrow w[2, 4] + 5 = \\ &15 \end{aligned}$$

$$r[i, j] = r[2, 4] \leftarrow 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & & & \\ & & 9 & 18 & & \\ & & & 6 & 15 & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & & & \\ & & 2 & 2 & & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 5 - 2 = 3$$

$$r[i, j - 1] = r[3, 4] = 4$$

$$r[i + 1, j] = r[4, 5] = 5$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[3, 3] + c[4, 5] = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 5 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[3, 4] + c[5, 5] = 5 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[3, 5] \leftarrow w[3, 5] + 4 = 11$$

$$r[i, j] = r[3, 5] \leftarrow 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & & & \\ & & 9 & 18 & & \\ & & & 6 & 15 & \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & & & \\ & & 2 & 2 & & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 3 - 3 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 2] = 2$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 3] = 2$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] = \\ = c[0, 1] + c[2, 3] = 11 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[0, 3] \leftarrow$$

$$w[0, 3] + 11 = 27$$

$$r[i, j] = r[0, 3] \leftarrow 2$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & & \\ & & 9 & 18 & & \\ & & & 6 & 15 & \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & & \\ & & 2 & 2 & & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 4 - 3 = 1$$

$$r[i, j - 1] = r[1, 3] = 2$$

$$r[i + 1, j] = r[2, 4] = 3$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 1] + c[2, 4] = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 2] + c[3, 4] = 14 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[1, 4] \leftarrow$$

$$w[1, 4] + 14 = 30$$

$$r[i, j] = r[1, 4] \leftarrow 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & & \\ & & 9 & 18 & 30 & \\ & & & 6 & 15 & \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & & \\ & & 2 & 2 & 3 & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 3 \quad 4 \quad 5$$

$$i = 5 - 3 = 2$$

$$r[i, j - 1] = r[2, 4] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[3, 5] = 4$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 2] + c[3, 5] = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[2, 3] + c[4, 5] = 10 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[2, 5] \leftarrow$$

$$w[2, 5] + 10 = 22$$

$$r[i, j] = r[2, 5] \leftarrow 4$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & & \\ & & 9 & 18 & 30 & \\ & & & 6 & 15 & 22 \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & & \\ & & 2 & 2 & 3 & \\ & & & 3 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 4 \quad 5$$

$$i = 4 - 4 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 3] = 2$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 4] = 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] = \\ = c[0, 1] + c[2, 4] = 20 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & 40 \\ & & 9 & 18 & 30 \\ & & & 6 & 15 & 22 \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] = \\ = c[0, 2] + c[3, 4] = 23 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & 2 & 2 & 3 \\ & & & 3 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$c[i, j] = c[0, 4] \leftarrow$$

$$w[0, 4] + 20 = 40$$

$$r[i, j] = r[0, 4] \leftarrow 2$$

$$d = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = 4 \quad 5$$

$$i = 5 - 4 = 1$$

$$r[i, j - 1] = r[1, 4] = 3$$

$$r[i + 1, j] = r[2, 5] = 4$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 2] + c[3, 5] = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 4 : c[i, k - 1] + c[k, j] &= \\ &= c[1, 3] + c[4, 5] = 22 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[1, 5] \leftarrow$$

$$w[1, 5] + 20 = 38$$

$$r[i, j] = r[1, 5] \leftarrow 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & 40 \\ & & 9 & 18 & 30 & 38 \\ & & & 6 & 15 & 22 \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 3 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$j = \quad 5$$

$$i = 5 - 5 = 0$$

$$r[i, j - 1] = r[0, 4] = 2$$

$$r[i + 1, j] = r[1, 5] = 3$$

$$\begin{aligned} k = 2 : c[i, k - 1] + c[k, j] = \\ = c[0, 1] + c[2, 5] = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : c[i, k - 1] + c[k, j] = \\ = c[0, 2] + c[3, 5] = 29 \end{aligned}$$

$$c[i, j] = c[0, 5] \leftarrow$$

$$w[0, 5] + 27 = 49$$

$$r[i, j] = r[0, 5] \leftarrow 2$$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 13 & 16 & 20 & 22 \\ & 1 & 9 & 12 & 16 & 18 \\ & & 3 & 6 & 10 & 12 \\ & & & 1 & 5 & 7 \\ & & & & 2 & 4 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} & 5 & 18 & 27 & 40 & 49 \\ & & 9 & 18 & 30 & 38 \\ & & & 6 & 15 & 22 \\ & & & & 5 & 11 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 3 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & 4 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

Požadavky ke zkoušce

A -- vše

C -- úspěšné hledání v RBBST (i s důkazem),
-- očekávaná výška RBBST (bez důkazu),
-- optimální stromy -- algoritmus + idea algoritmu.

E -- úspěšné hledání v RBBST (bez důkazu),
-- očekávaná výška RBBST (bez důkazu),
-- optimální stromy (algoritmus).